Egyváltozós rekurzív függvények

Csirmaz László

Az egyváltozós rekurzív függvények egy jellemzését adjuk meg. Az érdekes, és a Church–tézissel — mármint hogy minden egyátalán kiszámítható függvény rekurzív — összevetve különösen meglepő tétel *Julia Robinson*tól származik. Mivel kizárólag természetes számokon értelmezett függvényekkel foglalkozunk, ezt külön nem fogjuk hangsúlyozni.

A rekurzív függvények sok ekvivalens definíciója közül azt választottuk ki, ami az ELTE egyetemi előadásaiban is szerepel; a bizonyítást kis fáradsággal át lehet alakítani hogy tetszőleges más definícióval is működjön. A használt formális definíciót a bizonyítás során fel fogjuk írni.

A tétel kimondását néhány definícióval készítjük elő. Legyen I az (egyváltozós) indentitásfüggvény, S az, ami minden természetes számhoz annak rákövetkezőjét rendeli, végül E az excess (ráadás) függvény, ami azt mondja meg, hogy argumentuma mennyivel nagyobb az alatta levő legnagyobb négyzetszámnál:

$$I(a) = a, \qquad S(a) = a + 1, \qquad E(a) = a - \left[\sqrt{a}\right]^2 \qquad \text{minden } a \in \omega\text{-ra.}$$

Tegyük fel, hogy az $f : \omega \to \omega$ függvényre $\mathrm{Range}(f) = \omega$. Ekkor beszélhetünk f *inverzéről*:

$$f^{-1}(a) = \min \{b \in \omega \, : \, f(b) = a\}.$$

Legyen $\mathcal{S}$ az egyváltozós $f : \omega \to \omega$ függvényeknek az a legszűkebb osztálya, amelyre

(i) az I, S valamint E függvények elemei $\mathcal{S}$-nek;

(ii) ha f és $g \in \mathcal{S}$, akkor összegük és kompozíciójuk is $\mathcal{S}$-beli;

(iii) ha $f \in \mathcal{S}$ értékül minden természetes számot felvesz, akkor $f^{-1} \in \mathcal{S}$.

1. Tétel(Julia Robinson tétele) *$\mathcal{S}$ éppen az egyváltozós rekurzív függvények halmaza.*

Bizonyítás. A tételnek az a felét, hogy az $\mathcal{S}$-beli függvények rekurzívak, gyakorlatképpen az olvasóra hagyjuk, csak azt bizonyítjuk, hogy minden egyváltozós rekurzív függvény $\mathcal{S}$-ben van.

A bizonyítás ötlete hogy a többváltozós rekurzív függvényeket egyváltozósakkal "kódoljuk," és a rekurzív függvények felépítésére vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy ezek a kódok mind $\mathcal{S}$-beliek. A kódolás definícióját azzal kezdjük, hogy egy sor függvényről megmutatjuk, hogy eleme $\mathcal{S}$-nek.

Először is vegyük észre, hogy ha $f \in \mathcal{S}$ és $k \geq 1$ egész szám, akkor f-et k-szor önmagához adva az adódó $k{\cdot}f$ függvény ugyancsak $\mathcal{S}$-beli. Ezt az észrevételünket a továbbiakban minden megjegyzés nélkül használjuk.

Mivel az E függvény értékkészlete ω, azért $E^{-1} \in \mathcal{S}$, továbbá $a \in \omega$-ra

$$E^{-1}(2a) = a^2 + 2a \quad \text{és} \quad E^{-1}(2a - 1) = a^2 + 2a - 1.$$

Az $ESE^{-1}(I+I)$ függvény mint $\mathcal{S}$-beli függvények összege és kompozíciója ugyancsak eleme $\mathcal{S}$-nek és értéke az $a \in \omega$ helyen

$$E(1+E^{-1}(2a)) = E(1+a^2+2a) = 0.$$

Így az azonosan nulla függvény is eleme $\mathcal{S}$-nek jelöljük ezt F_0-lal. Ekkor $S \circ F_0$ azonosan 1, és általában $S^k \circ F_0$ az azonosan k értéket veszi fel, és persze ezek is $\mathcal{S}$-beliek.

Tetszőleges a, $b \in \omega$ számokra

$$\begin{aligned} E^{-1}(2a+2b)+3a+b+4 &= (a+b)^2+(2a+2b)+(3a+b+4) = \\ &= (a+b+2)^2+a-b = \\ &= (a+b+1)^2+3a+b+3, \end{aligned}$$

és ez mindig kisebb $(a+b+3)^2$-nél. Így $a \geq b$ esetén

$$E\Big(E^{-1}(2a+2b)+3a+b+4\Big) = a-b.$$

Az f és g egyváltozós függények *"különbségének"* nevezzük, és $f \ominus g$-vel jelöljük a következő függvényt:

$$E\Big(E^{-1}(2f+2g)+3f+g+4\Big).$$

A korábban mondottak alapján az azonosan 4 értéket felvevő függvény eleme $\mathcal{S}$-nek, tehát ha f és g is $\mathcal{S}$-beli, akkor $f \ominus g$ is az. Ennek a "különbség" függvénynek az értéke az $a \in \omega$ helyen persze csak akkor lesz az $f(a)$ és $g(a)$ értékek különbsége, ha $f(a) \geq g(a)$, egyébként valamilyen más értéket vesz fel.

Mivel $a^2+2a \geq 2a$ minden $a \in \omega$-ra, azért az $\mathcal{S}$-beli $E^{-1}(I+I)$ és $(I+I)$ függvények "különbségének" értéke az a helyen a^2, s mivel a "különbség" is $\mathcal{S}$-ben van, a négyzetfüggvény eleme $\mathcal{S}$-nek. Innen adódik, hogy $\mathcal{S}$-ben van az alábbi *előjel* függvény is:

$$\operatorname{sgn}(x) = E(S(x^2)) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x=0, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az E^{-1} függvény értékét ismerjük, ebből könnyű látni, hogy

$$ESSE^{-1}(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a \text{ páratlan,} \\ 1 & \text{ha } a \text{ páros.} \end{cases}$$

Következésképp minden természetes szám előáll $2E(b)+ESSE^{-1}(b)$ alakban, így ennek a függvénynek inverze ugyancsak $\mathcal{S}$-beli, és

$$\left[\frac{x}{2}\right] = E^{-1}\Big(2E+ESSE^{-1}\Big)^{-1} \in \mathcal{S}.$$

Ebből már közvetlenül adódik, hogy $\mathcal{S}$ zárt a szorzásra: ha f, $g \in \mathcal{S}$, akkor

$$f \cdot g = \left[\frac{(f+g)^2-f^2-g^2}{2}\right] \in \mathcal{S}.$$

Legyen $a \dot{-} b$ értéke $a-b$ ha $a \geq b$, és 0 ha $a < b$. A korábban definiált $I \ominus 1 \in \mathcal{S}$ függvény értéke minden $a \geq 1$ helyen $a-1$, ám $a=0$-ra

$$0 \ominus 1 = E\Big(E^{-1}(0+2)+0+1+4\Big) = E(8) = 4,$$

ezért $x \ominus 1$ és $x \dot{-} 1$ különböző függvények. De $(x \ominus 1)$-ből megkaphatjuk $(x \dot{-} 1)$-et, ha az előbbit $\operatorname{sgn}(x)$-szel szorozzuk:

$$x \dot{-} 1 = \operatorname{sgn}(x) \cdot (x \ominus 1),$$

tehát ez is $\mathcal{S}$-beli. Ha most $x \in \omega$ négyzetszám, akkor az $\mathcal{S}$-beli

$$\mathrm{sq}(x) = \left[\frac{E(x \dot{-} 1)}{2}\right] + \mathrm{sgn}(x)$$

függvény értéke éppen x négyzetgyöke, tehát

$$\left[\sqrt{x}\right] = \mathrm{sq}(x - E(x)) \in \mathcal{S}.$$

A többváltozós függvények kódolásához szükségünk lesz a "rendezett pár" fogalmára. A π "párzó" függvény ω és ω^2 között egy olyan izomorfizmus, melyre π és mindkét inverze "könnyen" számítható. Ennek a követelménynek megfelel a

$$\pi(a, b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a$$

függvény. π ráadásul *monoton*: ha $a \leq c$ és $b \leq d$, akkor $\pi(a, b) \leq \pi(c, d)$. A korábbiak szerint f, $g \in \mathcal{S}$ esetén $\pi(f, g) \in \mathcal{S}$ is fennáll, hiszen $\pi(f, g)$-t f-ből és g-ből összeadással, szorzással és az $[x/2]$ függvénnyel kaphatjuk meg.

Jelölje K azt a függvényt, ami a $\pi(a, b)$ értékhez a-t, L pedig azt, ami $\pi(a, b)$-hez b-t rendeli. Mivel π izomorfizmus ω^2 és ω között, ez egyértelműen definiálja K-t és L-et. Egy kis számolással adódik, hogy

$$K(a) = a - \left[\frac{[\sqrt{8a+1}]^2 - 1}{8}\right], \qquad L(a) = \left[\frac{[\sqrt{8a+1}] - 1}{2}\right] - K(a).$$

Mivel $[x/8] = [[[x/2]/2]/2]$, azért K $\mathcal{S}$-beli függvényekből kompozíció és különbség képzéssel áll elő, tehát maga is $\mathcal{S}$-beli, s természetesen ugyanez áll L-re.

Definiáljuk most $n \geq 1$-re az ω^n és ω közötti π_n izomorfizmust a következőképpen. Legyen π_1 az identitás, $n \geq 1$-re pedig

$$\pi_{n+1}(x_0, \ldots, x_n) = \pi(\pi_n(x_0, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Így például $\pi_2 = \pi$ és $\pi_3(a, b, c) = \pi(\pi(a, b), c)$. Legyen még $i < n$-re K_i^n a π_n-nek az i-edik koordinátára vonatkozó inverze, azaz minden $x \in \omega$-ra

$$x = \pi_n(K_0^n(x), \ldots, K_{n-1}^n(x)).$$

Persze K_0^1 az identitás, K_0^2 és K_1^2 pedig a fent definiált K és L függvényekkel esik egybe. n-re vonatkozó indukcióval könnyen adódik, hogy egyrészt $f_0, \ldots, f_{n-1} \in \mathcal{S}$ esetén $\pi_n(f_0, \ldots, f_{n-1}) \in \mathcal{S}$, másrészt hogy az összes K_i^n függvény $\mathcal{S}$-beli. Valóban, ez utóbbihoz megjegyezzük, hogy $K_n^{n+1} = L \in \mathcal{S}$ és $i < n$-re $K_i^{n+1} = K_i^n \circ K$.

Most már megadhatjuk a bizonyítás elején igért kódolást. $n \geq 1$-re az n-változós f függvény kódja legyen az

$$F(x) = f(K_0^n(x), \ldots, K_{n-1}^n(x))$$

egyváltozós függvény. Persze egyváltozós függvény kódja saját maga. A tétel bizonyítandó fele azonnal következik az alábbi állításból.

2. Állítás*Minden rekurzív függvény kódja $\mathcal{S}$-beli.*

Ennek bizonyítását természetesen a rekurzív függvények felépítésére vonatkozó indukcióval végezzük a következő definíciót használva.

Definíció A rekurzív függvények $\mathcal{R}$ halmaza a természetes számokon értelmezett függvények legszűkebb osztálya, ami teljesíti a következő feltételeket:

(i) A következő függvények elemei $\mathcal{R}$-nek: az összeadás és szorzás (mint kétváltozós függvények), az n-változós $I_i^n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_i$ projekciófüggvény, végül az alábbi $K_<$ függvény:

$$K_<(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a < b, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{R}$ zárt a kompozícióra, azaz ha $g \in \mathcal{R}$ és $i < n$-re $h_i \in \mathcal{R}$, akkor $f(\mathbf{x}) = g(h_0(\mathbf{x}), \ldots, h_{n-1}(\mathbf{x})) \in \mathcal{R}$.

(iii) $\mathcal{R}$ zárt a μ-operációra, azaz ha az $n+1$-változós $g(\mathbf{x}, u)$ $\mathcal{R}$-beli és minden $\mathbf{x} \in \omega^n$-hez van olyan $u \in \omega$, amivel $g(\mathbf{x}, u) = 0$, akkor $\mu u\, g(\mathbf{x}, u) = 0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{u \in \omega : g(\mathbf{x}, u) = 0\}$ szintén $\mathcal{R}$-beli.

Elsőként az kell látnunk, hogy a 2. állítás igaz az alapfüggvényekre. Az I_i^n projekciófüggvényekre ez azzal ekvivalens, hogy $K_i^n \in \mathcal{S}$. Az összeadás és szorzás esetén a megfelelő egyváltozós függvények $K(x) + L(x)$ illetve $K(x) \cdot L(x)$. Ezek $\mathcal{S}$-beliek, mivel K, $L \in \mathcal{S}$ és $\mathcal{S}$ zárt az összeadásra és szorzásra. A hiányzó $K_<$ esethez vegyük észre, hogy

$$\left[\sqrt{E^{-1}(2a+2b) + 3a + b + 4}\right] = \begin{cases} a+b+2 & \text{ha } a \geq b, \\ a+b+1 & \text{ha } a < b, \end{cases}$$

ahogyan azt a függvények "különbségének" definiálásakor láttuk. Ezért

$$\left[\sqrt{E^{-1}(2a+2b) + 3a + b + 4}\right] - (a+b+1) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a < b, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Itt a, b helyébe $K(x)$-et, $L(x)$-et írva éppen a $K_<(K(x), L(x))$ függvényt állítottuk elő.

Másodjára azt kell látnunk, hogy ha a 2. állítás teljesül az m-változós g-re és $i < m$ esetén az n-változós h_i-re, akkor ez a belőlük helyettesítéssel kapható n-változós

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(h_0(\mathbf{x}), \ldots, h_{m-1}(\mathbf{x}))$$

függvényre is áll. Jelöljük a függvényekhez tartozó egyváltozós kódokat a megfelelő nagybetűvel. Az indukciós feltevés folytán G és $i < m$-re H_i is $\mathcal{S}$-beli, és ekkor

$$F(x) = f(K_0^n(x), \ldots, K_{n-1}^n(x)) = g(H_0(x), \ldots, H_{m-1}(x)) = G\left(\pi_m\left(H_0(x), \ldots, H_{m-1}(x)\right)\right)$$

valóban $\mathcal{S}$-beli a π_m-ről tett korábbi megállapításunk alapján.

Végül legyen $g : \omega^{n+1} \to \omega$ olyan függvény, hogy minden $\mathbf{x} \in \omega^n$-hez van $u \in \omega$, amivel $g(\mathbf{x}, u) = 0$. Legyen még G a g-nek, F pedig az $f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mu u\, g(\mathbf{x}, u) = 0$ függvénynek kódja. Ha $x = \pi_n(x_0, \ldots, x_{n-1})$, akkor a g-re tett kikötésünk éppen azt jelenti, hogy van $u \in \omega$, amivel $G(\pi(x, u)) = 0$. A π_n bijekció ω^n és ω között, ezért *minden* $x \in \omega$-hoz található $u \in \omega$, hogy $G(\pi(x, u)) = 0$, és persze

$$F(x) = \mu u\, G(\pi(x, u)) = 0.$$

Így a 2. állításhoz azt kell belátnunk, hogy $G \in \mathcal{S}$ esetén $F \in \mathcal{S}$. Ehhez nézzük az $\langle x, G(\pi(x, u))\rangle$ alakú párokat, amint x és u egymástól függetlenül átfut ω elemein. A párok között az összes olyan előfordul, ahol a második tag 0, így az $y = \pi(x, u)$ jelöléssel a $H(y) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(K(y), G(y))$ függvény értékkészlete tartalmazza az összes $\pi(x,0)$ alakú számot. Mivel π még monoton is, azért rögzített $x \in \omega$-ra a $\pi(x,u)$ értékek közül a minimális olyan, amire $G(\pi(x,u)) = 0$ teljesül, megegyezik a

$$\pi(x, \min\{u \in \omega \,:\, G(\pi(x,u)) = 0\}) = \pi(x, F(x))$$

értékkel. Következésképp

$$\min\{y \in \omega \,:\, H(y) = \pi(x,0)\} = \min\{\pi(x,u) \,:\, u \in \omega \text{ és } G(\pi(x,u)) = 0\} = \pi(x, F(x)),$$

tehát

$$F(x) = K(\pi(x, F(x))) = KH^{-1}(\pi(x,0)).$$

Tudjuk, hogy H $\mathcal{S}$-beli, azért ennek alapján F is $\mathcal{S}$-beli volna, ha tudnánk, hogy $H^{-1} \in \mathcal{S}$. Ennek feltétele, hogy H értékkészlete az összes számot tartalmazza. Ez azonban nem feltétlenül van így, mindössze azt tudjuk garantálni, hogy a $\pi(x,0)$ alakú számok elemei $\mathrm{Range}(H)$-nak. Ezért legyen

$$H'(\pi(y,z)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} H(y) & \text{ha } z = 0, \\ \pi(y,z) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A π bijekció ω^2 és ω között, tehát ez egyértelműen definiálja a H' függvényt, ráadásul $\mathrm{Range}(H') = \omega$. A H' a $\pi(x,0)$ értéket csak úgy veheti fel, ha argumentuma $\pi(y,0)$ alakú és még $H(y) = \pi(x,0)$. Vagyis $H'^{-1}(\pi(x,0)) = \pi(y,0)$ és $y = H^{-1}(\pi(x,0))$. Tehát $H^{-1}(\pi(x,0)) = KH'^{-1}(\pi(x,0))$, ezért

$$F(x) = KH^{-1}(\pi(x,0)) = KKH'^{-1}(\pi(x,0)).$$

Így annak bizonyítására, hogy $F \in \mathcal{S}$ elég látni, hogy $H' \in \mathcal{S}$. Ez pedig például H'-nek az alábbi felírásából következik:

$$H'(x) = x \cdot \mathrm{sgn}(L(x)) + \Big(1 - \mathrm{sgn}(L(x))\Big) \cdot H(K(x)).$$

Ezzel a 2. állítást és így Julia Robinson tételét is igazoltuk. ∎