Paris-Harrington tétel

Csirmaz László

Sokáig nyitott kérdés volt, hogy van-e *értelmes* matematikai állítás (hogy az "értelmes" pontosan mit is jelent, azzal most nem foglalkozunk), melyről meg tudjuk mutatni, hogy a Peano axiómarendszertől független. Az első példát 1977-ben találta *Jeff Paris* és *Leo Harrington*. Példájuk a (véges) Ramsey tételnek egy ártatlannak látszó erősítése, mely végül is függetlennek bizonyult a szokásos Peano axiómarendszertől.

Definíció Azt mondjuk, hogy a természetes számok H részhalmaza $*$ tulajdonságú, ha H-ban több elem van, mint H minimális eleme: $|H| > \min(H)$. Adott e, r és M természetes számok esetén a

$$M \to (*)^e_r$$

partícióreláció jelentése: akárhogyan is szinezzük ki az $M = \{0, 1, \dots, M-1\}$ halmaz e-eseit r színnel, mindig van legalább $e+1$ elemű $H \subset M$ $*$-homogén.

Legyen $\mathfrak{N}$ a természetes számok szokásos struktúrája, aminek alaphalmaza ω, a jelek pedig $+$, $*$, $\leq$, 0 és 1. Ezen kívül még bevezetjük a 2^x (a többi jellel egyébként a Peano axiómarendszerben definiálható) egyváltozós függvényjelet a kettőhatványok jelölésére. A Peano formulák közül fontosak lesznek számunkra az úgy nevezett Δ_0^* formulák. Ezekben minden kvantor egy (összeadás, szorzás és hatványozásból összeállított) kifejezéssel van korlátozva. A szokásos Δ_0 formulákban a kvantorokat más változókkal kell korlátozni.

1. Tétel $\mathfrak{N} \models \forall e \forall r \exists M \; M \to (*)^e_r$.

Bizonyítás. Rögzítsük e és r értékeit, és tegyük fel, hogy hozzájuk egyetlen M sem megfelelő. Ez azt jelenti, hogy minden M-re az M halmaz e-eseit ki lehet szinezni r színnel úgy, hogy M-nek nincs $*$-homogén része. Tekintsük az összes lehetséges ellenpéldát adó szinezést. Ezeket egy fába rendezzük el úgy, hogy a P_1 szinezés kisebb a P_2 szinezésnél, ha a P_1-hez tartozó M_1 kisebb a P_2-höz tartozó M_2-nél, és P_1 éppen P_2-nek M_1]-re való megszorítása. Most ha $P_1 < P_2$, akkor minden $M_1 < M < M_2$-re P_2-nek M-re való megszorítása is ellenpélda, így az P_1 és P_2 között van. Ezért az előállott fának minden szinten csak véges sok rákövetkezője lehet (az M halmaz e-eseit ugyanis csak véges sok féleképpen szinezhetjük), ugyanakkor a fa nem véges magasságú. Ezért a König-lemma értelmében van benne végtelen ág, ami azt jelenti, hogy van $[\omega]^e$-nek olyan r színnel való szinezése, amit tetszőleges M-ra megszorítva ellenpéldát kapunk.

Most alkalmazzuk a végtelen Ramsey tételt, ami szerint van $H \subset \omega$ végtelen homogén. Legyen M akkora, hogy $M \cap H$-ban több mint $\min(H)$ elem található. Ekkor $M \cap H$ $*$-homogén, ellentmondásban azzal, hogy a szinezést erre az M-re megszorítva is ellenpéldát kell kapnunk. ■

A bizonyításban a *végtelen* Ramseyre való hivatkozást nem lehet kikerülni, amit az alábbi tétel mutat:

2. Tétel (Paris-Harrington) *A fenti kombinatorikus elv nem bizonyítható a Peano Aritmetika szokásos axiómarendszerében.*

Bizonyítás. Konstruálunk egy $\mathfrak{A}$ modellt, amiről a következőket fogjuk megmutatni:

(i) $\mathfrak{A}$ Peano modell;

(ii) $\mathfrak{A}$-ban a $\forall e \forall r \exists M \; M \to (*)^e_r$ egy (Peano-beli) következménye nem igaz.

Mielőtt a konstrukcióra rátérnénk, először a $*$ partíció reláció néhány erősítéséről megmutatjuk, hogy (a Peano aritmetikában) ekvivalens az eredeti állítással.

1. Lemma *Előírhatjuk, hogy a H $*$-homogén minimális eleme legalább egy előre adott k szám legyen.*

Bizonyítás. Ezt k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Az $k = 0$-ra ez éppen az eredeti állítás, úgy hogy tegyük fel, hogy az állítást k-ra már tudjuk: legyen adva e és r, és legyen M akkora, hogy $[M]^e$-et $(r{+}1)$ színnel színezve mindig kapunk olyan H $*$-homogént, melynek minimális eleme legalább k. Legyen most adva $[M]^e$ egy r színű partíciója, és definiáljunk egy $(r + 1)$ színű partíciót a következőképpen: $A \in [M]^e$ színe legyen a megadott ha k nem az A minimális eleme, egyébként legyen az $(r + 1)$-edik szín. Indukciós feltevésünk szerint van $H \subset M$ $*$-homogén, melynek minimális eleme legalább k. H-ban legalább $e + 1$ elem van, így van olyan $A \in [H]^e$ is, melyben a minimális elem *nem k*, vagyis A színe nem $r + 1$. Ezért H egyetlen e-esének a színe sem lehet $r + 1$, vagyis $k \notin H$, tehát H minimális eleme legalább $k + 1$, ahogyan kívántuk. ■

2. Lemma *Egyetlen szinezés helyett megkövetelhetjük, hogy H legyen homogén előre megadott j szinezés mindegyikére.*

Bizonyítás. Legyenek a szinezések $f_1, \ldots, f_s$, és mondjuk f_i az $[M]^e$-t r_i színnel szinezi. Definiáljuk $[M]^e$ egyetlen, $\prod_{i<s} r_i$ színnel való f szinezését úgy, hogy $A \in [M]^e$ színe legyen éppen $\langle f_1(A), \ldots, f_s(A) \rangle$. Ha H $*$-homogén az f szinezésre, akkor persze homogén lesz az $f_1, \ldots, f_s$ szinezések mindegyikére is. ■

3. Lemma *Tegyük fel, hogy $\forall e \forall r \exists M \; M \to (*)^e_r$. Akárhogyan is adunk meg s darab (nem feltétlenül ugyanannyi argumentumú) szinezést és egy k számot, létezik olyan $*$-tulajdonságú H halmaz, melynek minimális eleme nagyobb k-nál, és amely homogén az összes szinezésre.*

Bizonyítás. Legyen az i-edik szinezés e_i argumentumú, és legyen $e = \max\{e_i\}$. Minden i-re szinezzük ki $[M]^e$ egy A elemét a következőképpen. Soroljuk fel $[A]^{e_i}$ elemeit mondjuk lexikografikusan növő sorrendben és mindegyikhez írjuk fel annak az i-edik szinezés szerinti színét. Így egy szín 1 és r_i közötti számok $\binom{e}{e_i}$ hosszú sorozata. Ezt minden i-re tegyük meg. Az előző két lemma szerint ha M elég nagy volt, akkor található olyan $H \subset M$, ami $*$-homogén az összes így definiált e-es szinezésekre, továbbá minimális eleme nagyobb mint k és nagyobb mint $2e$.

Állítjuk, hogy ekkor H megfelelő homogén lesz. Világos, hogy $*$-tulajdonságú és hogy minimális eleme legalább k. Az kell, hogy a megadott szinezések mindegyikére homogén. H minimális eleme legalább $2e$, így H-ban van több mint $2e$ elem. Vegyünk egy $A \in [H]^e$ halmazt, és abban két különböző e_i-set, B_1-et és B_2-t. Mivel H-nak van elég sok különböző eleme, azért biztosan találunk olyan A_1

és $A_2 \in [H]^e$ halmazokat, hogy A_1-ben B_1 és A_2-ben B_2 a fenti felsorolás szerint ugyanannyiadik (azt mondjuk, hogy B_1 és B_2 *ikrek*). De A_1-nek és A_2-nek az i-edik szinezésből kapott (vektor)színe ugyanaz, tehát B_1-nek és B_2-nek mint ikreknek az i-edik szinezés szerint is ugyanolyan színűeknek kell lenniük. Ha pedig B_1 és B_2 nem esne ugyanabba az e-esbe, akkor fedjük le mindkettőt egy-egy e-essel, mondjuk $B_1 \subset A_1$ és $B_2 \subset A_2$. Most B_1-nek van egy ikre A_2-ben, aminek (megintcsak H homogenitása miatt) ugyanaz az i szerinti színe mint B_1-nek, s az iker színe az előek szerint megegyezik B_2 színével. ∎

Az eddigiekben a partícióreláció következményeivel foglalkoztunk. Most azt vizsgáljuk meg, hogyan lehet a Peano aritmetikában formalizálni a fenti gondolatmenetet. Nekünk egy kicsit többre lesz szükségünk, nevezetesen arra, hogy a fenti formulák felírhatók úgy is, hogy a bennük szereplő kvantorokat tudjuk felülről korlátozni a szabad változók (2^x-et is használó) kifejezéseivel.

4. Lemma *Legyen $M \geq n > 10$, és u_1, u_2, …, u_n mindegyike kisebb M-nél. Ekkor az $\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ sorozat kódja (Gödel-száma) kisebb mint M^{n^3}.*

Bizonyítás. Emlékeztetőül az $\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ sorozat kódja $u = \pi(x, b)$, ahol π a párzófüggvény, és $\mathrm{rem}(x, 1 + (i+1)b) = u_i$, ahol $u_0 = n$. Ilyen b-nek megfelel például az a szám, amelyik az összes u_i-nél nagyobb és osztható $(n+1)!$-sal. Az x is biztosan kisebb mint a megfelelő $1 + (i+1)b$ értékek szorzata, így

$$b \leq \max\{M, (n+1)!\} < M \cdot n^n,$$

$$x \leq (n+1)!(b+1)^n,$$

$$u < x^2 b^2 \leq M^{2n} \cdot (b+1)^{2+2n} \leq M^{2+4n} \cdot n^{2n+2n^2} < M^{n^3},$$

ahogyan állítottuk. ∎

Legyen $\Theta(\overline{u}, \overline{z})$ egy kvantormentes, csak összeadás- és szorzásjelet tartalmazó Peano formula, ahol Θ-ban csak a felírt szabad változók szerepelnek, és azokat két részre osztottuk: $\overline{u}$ ℓ-es, $\overline{z}$ pedig s-es.

Definíció Legyenek $\overline{x}$ és $\overline{y}$ elemei $[\omega]^s$-nek és legyen $r \in \omega$. Azt mondjuk, hogy $\overline{x} \equiv_r \overline{y} \pmod{\Theta}$, ha minden $\overline{u} < r$ esetén

$$\mathfrak{N} \models (\exists z_1 < x_1)\,(\forall z_2 < x_2) \ldots \Theta(\overline{u}, \overline{z}) \leftrightarrow (\exists z_1 < y_1)\,(\forall z_2 < y_2) \ldots \Theta(\overline{u}, \overline{z}).$$

Definiáljuk még az F_Θ szinezést ω $(1+2s)$-esein a következőképpen:

$$F_\Theta(a, \overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \overline{x} \equiv_r \overline{y} \pmod{\Theta} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol r a legnagyobb olyan egész, amire még $s \cdot (2^{r^\ell} + 1) \leq a$.

5. Lemma *Ha H $*$-homogén F_Θ-ra, akkor minden $(2s+1)$-ese 1 színű.*

Bizonyítás. Legyen $H = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ nagyság szerint. Legyen $a = z_1$, osszuk H-t s hosszúságú blokkokra. Ezek száma $\frac{n-1}{s} \geq \frac{a}{s}$ hiszen $n > z_1 = a$. Válasszuk az x_1, …, x_s értékeket egy blokkból. Egy rögzített $\overline{x}$ mellett minden lehetséges $\overline{u}$ értékre (ebből összesen r^ℓ darab van) írjuk fel, hogy

$$(\exists z_1 < x_1)\,(\forall z_2 < x_2) \ldots \Theta(\overline{u}, \overline{z})$$

igaz, vagy hamis. Mivel ez r^ℓ hosszú igaz/hamis sorozat, belőle összesen 2^{r^ℓ} féle képzelhető el. Blokkból viszont $2^{r^\ell} + 1 \leq a/s$ miatt ennél több van, így lesz két olyan $\overline{x}$ és $\overline{y}$ blokk, amikre minden lehetséges $\overline{u}$ mellett a megfelelő formulák egyszerre igazak illetve hamisak. Ez pedig azt jelenti, hogy $\overline{x} \equiv_r \overline{y}$ $\pmod{\Theta}$, vagyis az $\langle a, \overline{x}, \overline{y}\rangle$ színe 1. S mivel H homogén volt, az összes $(2s+1)$-ese ugyanolyan színű, tehát 1-es. ∎

6. Lemma *Az alábbi k és z szabad változókkal rendelkező állítás felírható Δ_0^* formulaként: "ha k éppen az $\langle \ell, s, \ulcorner\Theta\urcorner\rangle$ sorozat Gödel-száma, akkor z egy F_Θ szinezésre nézve $*$-homogén sorozat kódja."*

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy Δ_0^* formulákban a kvantorokat valamilyen (hatványozást is megengedő) kifejezéssel kell korlátoznunk. Először is, mivel Θ kvantormentes, az a háromváltozós állítás, melynek argumentumai Θ, $\overline{u}$ és $\overline{z}$ Gödel-számai, és megmondja, hogy, Θ a megadott értékelés mellett igaz-e vagy hamis, Δ_0^*. Ez a formula ugyanis úgy írható fel, hogy "van olyan sorozat, melynek tagjai (formula,érték) párok, az utolsó tagjában a formula éppen Θ, a párja a Θ értéke; minden tagja az előzőekből a (kvantormentes) formula felépítésének szabályai szerint áll elő (például ha egy formula $\varphi \vee \psi$, akkor φ és ψ a sorozatban korábban előfordul, és az értéke pontosan akkor igaz, ha vagy φ vagy ψ értéke igaz volt), a változók értéke pedig az $\overline{u}$ és $\overline{z}$ szerint van megadva." Az egyetlen korlátozandó érték a sorozat kódja. Mivel Θ részformuláinak száma legfeljebb $\ulcorner\Theta\urcorner$, azért a sorozatnak legfeljebb $\ulcorner\Theta\urcorner < k$ eleme van, mindegyik elem Θ egy részformulája plusz egy igaz/hamis érték, így kisebb mint $\ulcorner\Theta\urcorner^2 < k^2$. A 4. lemma szerint tehát a sorozat kódja kisebb $(k^2)^{k^3} = k^{2k^3} < 2^{2k^4}$.

Másodszor az, ami $\langle \ell, s, \ulcorner\Theta\urcorner\rangle$ és $\overline{x}$ Gödel-számaiból valamint r-ből megmondja, hogy $(\forall \overline{u} < r)\,(\exists z_1 < x_1)\,(\forall z_2 < x_2)\ldots\Theta(\overline{u},\overline{z})$ igaz-e vagy sem, szintén Δ_0^*. Ehhez vegyük azt a sorozatot, melynek elemei az összes lehetséges $\ell + s$ hosszúságú sorozatok, melyekben az első ℓ elem mindegyike kisebb mint r, a második s elem közül a j-edik kisebb mint x_j. Az elemek értéke így legfeljebb $(\ulcorner\overline{x}\urcorner + r)^{(\ell+s)^3}$, s mivel ez egyúttal a sorozat hosszára is korlát, megintcsak kaptunk egy hatványfüggvénnyel kifejezhető korlátot. Vegyünk még egy ugyanilyen hosszúságú sorozatot, melynek elemei igaz–hamis értékek $s+1$ hosszú sorozatai (a fenti korlát most is működik) a következő tulajdonsággal. Egy $\langle\overline{u},\overline{z}\rangle$ $(\ell+s)$ méretű sorozathoz tartozó $(s+1)$-es utolsó eleme a $\Theta(\overline{u},\overline{z})$ értéke (ez Δ_0^*, lásd fentebb). Minden $0 < j \leq s$-re az $s+1$-es j-edik elemét úgy kapjuk meg, hogy megvizsgáljuk mindazokat az $\langle\overline{u},\overline{z}'\rangle$-hoz tartozó $s+1$-esek $j+1$-edik elemét, ahol $\overline{z}$ és $\overline{z}'$ csak a j-edik helyen tér el. Ha most j páratlan, és a megvizsgált elemek között volt igaz, akkor ez az érték is legyen igaz; ha j páros, akkor ez az érték pontosan akkor igaz, ha minden megvizsgált elem igaz. Végül egy $s+1$-es első (nulladik) eleme (ez felel meg a $(\forall\overline{u} < r)$ résznek) akkor igaz, ha a sorozat összes $j = 1$-es indexű eleme igaz volt. A fenti formula igaz, ha az $s+1$-esek közül bármelyikben (vagy ami ugyanaz, az összesben) a nulladik elem igaz.

A fenti csekély módosításával kapjuk, hogy $\langle \ell, s, \ulcorner\Theta\urcorner\rangle$, a, $\overline{x}$ és $\overline{y}$-ból egy Δ_0^* formulával kaphatjuk meg $F_\Theta(a,\overline{x},\overline{y})$ értékét. Ehhez megjegyezzük, hogy $r < a$ és azt hogy r tényleg a maximális olyan, amire $s\cdot(2^{r^\ell}+1) \leq a$, szintén könnyen felírható.

Végül a keresett állítás: z egy $*$-homogén kódja, ha minden z-beli elemekből álló $(2s+1)$-es sorozatra $F_\Theta(a,\overline{x},\overline{y}) = 1$. A z sorozat elemei kisebbek z-nél, az összes lehetséges $(2s+1)$-es száma legfeljebb $z^{2s+1} < z^{2k}$ és mindegyik Gödel-száma kisebb mint $z^{(2s+1)^3}$. Következésképp az ezeket tartalmazó sorozat Gödel-száma legfeljebb $(z^{(2s+1)^3})^{z^{6k}}$. (Az, hogy az összes $(2s+1)$-es megtalálható-e a sorozatban, könnyen felírható: akárhogy veszünk ki egy $(2s+1)$-est és cseréljük ki bármelyik elemét egy másikra, az is benne kell legyen a sorozatban.) Ezen $(2s+1)$-esek mindegyikére F értéke 1 kell hogy legyen, ezt pedig épp az előbb írtuk fel. ∎

Definíció Legyenek ℓ és s pozitív természetes számok, és definiáljuk pároknak egy szinezését a következőképpen:

$$G_{\ell,s}(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b < 2a \\ 1 & \text{ha } 2a \leq b \leq 2^a \\ 2 & \text{ha } 2^a < b \leq 2^{2^a} \\ 3 & \text{ha } a < \log\log b \leq 2a \\ 4 & \text{ha } 2a < \log\log b \leq 3a \\ \vdots & \\ \ell+s+2 & \text{ha } (\ell+s)a < \log\log b \leq (\ell+s+1)a \\ \ell+s+3 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7. Lemma *Legyen $H \subset [3,\omega)$ $*$-homogén $G_{\ell,s}$-re. Ekkor H bármely két szomszédos z_k és z_{k+1} elemére*

(i) $2^{z_k} < z_{k+1}$;

(ii) $2^{2^{z_k}} < z_{k+1}$;

(iii) $s\cdot(2^{z_k^\ell}+1) < z_{k+1}$.

Bizonyítás. Legyen $z_1 < z_2 < z_3 < \dots$ H összes eleme nagyság szerinti felsorolásban. Mivel H-nak $n = z_1$-nél több eleme van, azért H-ban van $n+1$ indexű elem is, és ennek értéke legalább $z_1 + n = 2z_1$. A (z_1, z_{n+1}) pár G szerinti színe a fenti definíció alapján nem 0, s mivel H homogén, azért tetszőleges két elemének színe sem lehet 0. Ez azt jelenti, hogy például (z_1, z_2) színe sem 0, azaz $2z_1 \leq z_2$, továbbá ugyanezért $2z_2 \leq z_3$, stb. Ebből $z_{n+1} \geq 2^n z_1 > 2^{z_1}$ ($z_1 \geq 3$ alapján), vagyis (z_1, z_{n+1}) színe 1 sem lehet. Ezért bármely két szomszédos elem színe is legalább 2, vagyis $2^{z_k} < z_{k+1}$, amivel igazoltuk (i)-t.

Most $z_1 \geq 3$ miatt H-ban van legalább négy elem, és $z_3 > 2^{z_2} > 2^{2^{z_1}}$. Ezért (z_1, z_3) színe, és így egyetlen pár színe sem lehet 2 sem, ami (ii)-t adja. Ezt másképp felírva $\log\log z_3 > z_2$ és $\log\log z_2 > z_1$. Most ezekből

$$\log\log z_3 > z_2 > 2\log\log z_2 > \log\log z_2 + z_1$$

(hiszen $z_2 \geq 4$ miatt még $z_2 \geq 2\log z_2$ is fennáll). Következésképp $\log\log z_3$ és $\log\log z_2$ nem eshet ugyanabba a z_1 hosszú intervallumba. Ez pedig azt jelenti, hogy (z_1, z_2) és (z_1, z_3) nem lehet mindkettő ugyanolyan $3, 4, \dots, \ell+s+2$ színű, tehát a homogén színe csak $\ell+s+3$ lehet. Ekkor viszont

$$\log\log z_{k+1} > (\ell+s+1)z_k > 1+s+\ell\log z_k > \log(1+s+z_k^\ell) > \log(1+\log s+z_k^\ell) > \log\log(s\cdot(2^{z_k^\ell}+1)),$$

amiből $z_{k+1} > s\cdot(2^{z_k^\ell}+1)$, ahogyan kívántuk. ■

8. Lemma *Az alábbi állítás felírható Δ_0^* formulaként: "ha k éppen az $\langle \ell, s\rangle$ sorozat Gödel-száma, akkor z egy $G_{\ell,s}$ szinezésre $*$-homogén sorozat kódja, aminek minimális eleme legalább 3."*

Bizonyítás. Az előzőekhez hasonlóan csak azt kell megfogalmaznunk egy Δ_0^* formulával, hogy $G(a,b) = \ell+s+3$, vagyis hogy $\log\log b > (\ell+s+1)a$. Ez pedig a korábbiak után már egyszerű. ■

Definíció Legyen $\alpha(k,z)$ a következő Δ_0^* formula: "minden olyan $\langle \ell, s \ulcorner\Theta\urcorner\rangle$ hármasra, melynek Gödel-száma kisebb mint k, z egy, az F_Θ szinezésre és a $G_{\ell,s}$ szinezésre is $*$-homogén is sorozat kódja; továbbá z minimális eleme legalább $k+1$."

Az 6. és 8. lemmák alapján ez tényleg felírható Δ_0^* formulaként.

3. Tétel *Az $\forall k\, \exists z\, \alpha(k,z)$ formula Peano-beli következménye a Paris-Harrington féle $\forall e\, \forall r\, \exists M\; M \to (*)^e_r$ partíció relációnak.*

Bizonyítás. Minden szóbajövő F_Θ és $G_{\ell,s}$ szinezés legfeljebb $(2k+1)$-esekhez rendel szineket, továbbá legfeljebb $2k$ különböző színezés jön szóba. A 3. lemma pedig éppen azt mondja ki, hogy a közös $*$-homogén halmaz létezése következik a fenti partíció relációból. (Az ottani bizonyítás a fentiek mintájára különösebb nehézségek nélkül formalizálható.) ∎

Minden $k \in \omega$-ra nézzük mindazokat a z-ket, melyekre $\mathfrak{N} \models \alpha(k,z)$, és legyen $z^{(k)}$ ezek közül a minimális. A $z^{(k)}$ egy növő sorozat kódja, melynek minimális eleme nagyobb mint k, következésképp n_k elemszáma k-nál több.

Definíció Minden $j \in \omega$-ra definiáljuk a $h_j : \omega \to \omega$ függvényeket a következőképpen:

$$h_j(k) = \begin{cases} z^{(k)}_j \;:\; \text{a } z^{(k)} \text{ sorozat } j\text{-edik tagja ha } j < n_k; \\ \text{a } z^{(k)} \text{ sorozat utolsó tagja, ha } j \geq n_k. \end{cases}$$

9. Lemma *$k < h_0(k)$, $2^k < h_1(k)$ ha $k > 2$, továbbá minden $j \in \omega$-ra véges sok k kivételével $2^{2^{h_j(k)}} < h_{j+1}(k)$.*

Bizonyítás. A lemma első állítása abból következik, hogy z_k minimális eleme legalább $k+1$. A második a 7. lemma (i) állítása, a harmadik pedig a 7. lemma (ii) részéből következik $k > j$ esetén, ekkor ugyanis a $z^{(k)}$ sorozatnak biztosan van $j+1$-edik tagja is. ∎

Definíció Legyen

$$\mathcal{F} = \{g \in {}^{\omega}\omega \;:\; \exists j \in \omega\, \forall i \in \omega\; g(i) < h_j(i)\}$$

és legyen D egy nem triviális ultraszűrő ω-n. Az $\mathcal{F}/D$ faktorstruktúra definíciója a szokásos. Egy $f \in \mathcal{F}$-re f^* jelöli f ekvivalencia osztályát.

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{F}/D$-ben az összeg, szorzat és a 2^x függvény is definiálva van, mivel véges sok argument kivételével $h_j \cdot h_j < h_{j+1}$ valamint $2^{h_j} < h_{j+1}$.

10. Lemma *Legyen $\Psi(x_1,\ldots,x_n)$ egy Δ^*_0 formula. Ekkor $\mathcal{F}/D \models \Psi(f^*_1,\ldots,f^*_n)$ akkor és csak akkor, ha*

$$\{i \in \omega \;:\; \mathfrak{N} \models \Psi(f_1(i),\ldots,f_n(i))\} \in D.$$

Bizonyítás. Kvantormentes formulákra ez a definíció, egyébként mert $\mathcal{F}$ zárt a $\leq$-re. ∎

11. Lemma *Legyen $\overline{g} \in \mathcal{F}$, $\overline{g} \leq h_{a_0}$ és $\Theta(\overline{y},\overline{z})$ egy kvantormentes Peano formula, melyben nem szerepel a hatványozás. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) $\mathcal{F}/D \models \exists z_1 \forall z_2 \ldots\; \Theta(\overline{g}^*,\overline{z})$;

(ii) $\mathcal{F}/D \models (\exists z_1 < h^*_{a_1})\,(\forall z_2 < h^*_{a_2})\;\ldots\;\Theta(\overline{g}^*,\overline{z})$ valamely $a_0 + 1 < a_1 < \ldots < a_s$-re;

(iii) $\mathcal{F}/D \models (\exists z_1 < h^*_{a_1})\,(\forall z_2 < h^*_{a_2})\;\ldots\;\Theta(\overline{g}^*,\overline{z})$ minden $a_0 + 1 < a_1 < \ldots < a_s$-re.

Bizonyítás. A kvantorok számára vonatkozó indukcióval. Ha nincs kvantor, akkor az állítás semmitmondó, tehát igaz.
(i)$\Rightarrow$(ii): Legyen $f \in \mathcal{F}$ olyan, ami mutatja, hogy a megfelelő z_1 létezik, azaz $\mathcal{F}/D \models \forall z_2 \ldots \Theta(\overline{g}^*, f^*, \overline{z})$; tegyük fel, hogy $f < h_{b_1}$, ahol $b_1 > a_0 + 1$. Ekkor az indukciós feltevés szerint (f-et a $\overline{g}$ paraméterek közé soroljuk) van $b_1 + 1 < b_2 < \ldots < b_s$, hogy $\mathcal{F}/D \models (\forall z_2 < h^*_{b_2}) \ldots \Theta(\overline{g}^*, f^*, \overline{z})$, és ekkor tényleg $\mathcal{F}/D \models (\exists z_1 < h_{b_1})\,(\forall z_2 < h^*_{b_2}) \ldots \Theta(\overline{g}^*, z_1, \overline{z})$ valamely $a_0 + 1 < b_1 < \ldots < b_s$-re.
(ii)$\Rightarrow$(iii): A 10. lemma miatt (ii) akkor és csak akkor, ha

$$\{k \in \omega : \mathfrak{N} \models (\exists z_1 < h_{a_1}(k))\,(\forall z_2 < h_{a_2}(k)) \ldots \Theta(\overline{g}(k), \overline{z})\} \in D.$$

Legyen k elég nagy; ekkor $\{h_j(k) : j \in \omega\}$ $*$-homogén az F_Θ szinezésre, vagyis ha $a_1 < \ldots < a_s$ és $b_1 < \ldots < b_s$, akkor $h_{\overline{a}}(k) \equiv_r h_{\overline{b}}(k) \pmod{\Theta}$, vagyis minden $\overline{u} < r$ esetén

$$(\exists z_1 < h_{a_1}(k))\,(\forall z_2 < h_{a_2}(k)) \ldots \Theta(\overline{u}, \overline{z}) \Leftrightarrow (\exists z_1 < h_{b_1}(k))\,(\forall z_2 < h_{b_2}(k)) \ldots \Theta(\overline{u}, \overline{z}).$$

Még csak azt kell észrevennünk, hogy $a = h_{a_0+1} < h_{a_1}$ választással $h_{a_0} \le r$ (ez a 7. lemma (iii) állítása), tehát $\overline{g}(k) \le h_{a_0} \le r$, s az állítás következik.
(iii)$\Rightarrow$(i): azt mutatjuk meg, hogy $\neg$(i)$\Rightarrow\neg$(iii). Ha $\mathcal{F}/D \not\models \exists z_1 \forall z_2 \ldots \Theta(\overline{g}^*, \overline{z})$, akkor $\mathcal{F}/D \models \forall z_1 \exists z_2 \ldots \neg\Theta(\overline{g}^*, \overline{z})$. Legyen most $b_1 > a_0 + 1$ tetszőleges, és $f \in \mathcal{F}$, $f < h_{b_1}$, ekkor $\mathcal{F}/D \models \exists z_2 \ldots \neg\Theta(\overline{g}^*, f^*, \overline{z})$. Az indukciós feltevés szerint (eggyel kevesebb kvantor szerepel) ekkor tetszőleges $b_1 + 1 < b_2 < \ldots < b_s$ értékre $\mathcal{F}/D \models (\exists z_2 < h_{b_2}) \ldots \neg\Theta(\overline{g}^*, f^*, \overline{z})$. Rögzítsük most a $b_1 + 1 < b_2 < \ldots < b_s$ értékeket tetszőlegesen, ezek minden $f < h_{b_1}$-re jók, tehát

$$\mathcal{F}/D \models (\forall z_1 < h_{b_1})\,(\exists z_2 < h_{b_2}) \ldots \neg\Theta(\overline{g}^*, \overline{z}).$$

Ez mutatja, hogy (iii) nem teljesül. ∎

4. Tétel *$\mathcal{F}/D$ Peano-modell.*

Bizonyítás. $\mathcal{F}/D$-ben a teljes indukció kivételével minden Peano axióma igazsága közvetlenül adódik a struktúra definíciójából továbbá abból, hogy ez egy jó definíció. Tehát csak az indukció kell. Legyen ehhez $\Phi(u, \overline{p})$ olyan Peano formula melyben nem szerepel a hatványozás (ez elég), $\overline{p} \in \mathcal{F}$, és tegyük fel, hogy

$$\mathcal{F}/D \models \Phi(0^*, \overline{p}^*) \wedge \forall x\,(\Phi(x, \overline{p}^*) \to \Phi(x+1, \overline{p}^*).$$

Tegyük fel mindjárt, hogy Φ prenex alakú, azaz $\exists z_1 \forall z_2 \ldots \Theta(x, \overline{p}, \overline{z})$. Legyen még $g \in \mathcal{F}$ tetszőleges, és a_0 akkora, hogy $g, \overline{p} < h_{a_0}$. Azt akarjuk megmutatni, hogy $\mathcal{F}/D \models \Phi(g^*, \overline{p}^*)$. A 11. lemma szerint tetszőlegesen rögzítve az $a_0 + 1 < a_1 < \ldots < a_s$ számokat

$$\mathcal{F}/D \models \Phi(0, \overline{p}^*) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}/D \models (\exists z_1 < h^*_{a_1})\,(\forall z_2 < h^*_{a_2}) \ldots \Theta(0^*, \overline{p}^*, \overline{z}^*).$$

Jelölje ez utóbbi Δ^*_0 (valójában Δ_0) formulát $\Psi(0^*, \overline{p}^*, \overline{z}^*)$. Tudjuk ugyancsak a 11. lemma alapján, hogy tetszőleges $f \le g$-re

$$\mathcal{F}/D \models \Phi(f^*, \overline{p}^*) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}/D \models \Psi(f^*, \overline{p}^*, h^*_{\overline{a}}).$$

Következésképp

$$\mathcal{F}/D \models \Phi(0^*, \overline{p}^*, h^*_{\overline{a}}) \wedge (\forall x < g^*)\,\big(\Psi(x, \overline{p}^*, h^*_{\overline{a}}) \to \Psi(x+1, \overline{p}^*, h^*_{\overline{a}})\big).$$

Ez egy Δ_0^* formula, tehát a 10. lemma alapján ez ultraszűrő sok helyen igaz, viszont azokon a helyeken a Ψ formula a $g(j)$ helyen is igaz, tehát megint csak a 10. lemma szerint

$$\mathcal{F}/D \models \Psi(g^*, \overline{p}^*, h_{\overline{a}}^*).$$

Újfent alkalmazva a 11. lemmát kapjuk, hogy $\mathcal{F}/D \models \Phi(g^*, \overline{p}^*)$, ahogyan kívántuk. ∎

A következő állítás adja a Paris-Harrington tétel utolsó még hiányzó láncszemét:

5. Tétel $\mathcal{F}/D \not\models \forall k \, \exists z \, \alpha(k, z)$.

Az a bizonyos k, amire nem fogunk megfelelő z sorozatot találni, éppen az identitásfüggvény ekvivalencia osztálya lesz:

$$\mathcal{F}/D \not\models \exists z \, \alpha(\mathrm{Id}^*, z).$$

Először is, $\mathrm{Id} \in \mathcal{F}$, mivel $j < h_0(j)$. Ha most $g \in \mathcal{F}$ ekvivalencia osztálya mégis ilyen volna, akkor lévén α egy Δ_0^* formula, a 10. lemma szerint ultraszűrő sok $k \in \omega$ értékre

$$\mathfrak{N} \models \alpha(k, g(k)).$$

Tudjuk azt is, hogy $g < h_j$ valamilyen j-re. Választva egy j-nél nagyobb k-t, $g(k) < h_j(k) = z_j^{(k)} < z^{(k)}$, viszont $z^{(k)}$ definíciója szerint ő a legkisebb, amivel $\mathfrak{N} \models \alpha(k, z)$ teljesül. Az ellentmondás bizonyítja az állításunkat. ∎