**Bolyai-díj, 2000**

Csirmaz László

Létezik közgazdasági, fizikai, orvosi és béke Nobel díj is, de nincs matematikai Nobel díj. Ennek okáról többféle magyarázat forog közkézen. Az egyik szerint Alfred Nobel, mikor alapítványát megtette, megkérdezte: van esély arra, hogy egy általa nem nagyon kedvelt matematikus, bizonyos *Gosta Mittag-Leffler* megkapja a díjat. S mikor a válasz az volt, hogy "bizony lehetséges," inkább kihagyta a matematikát a támogatandó tudományok közül. Ez a változat a városi mítoszok közül való, mert az égadta világon semmi sem támasztja alá. Nobelt, mint feltalálót és gyárost egyátalán nem érdekelte a matematika – és általában az elméletek –, ezért maradt ki ez a diszciplína az általa alapított díjból [1].

A matematikusok azért nem maradnak díj nélkül. Jó néhány, kiváló matematikai teljesítmény elismeréseként kapható díj létezik. Ezek közül a legismertebbek az évenként adományozott Wolf-díj valamint a Nemzetközi Matematikai Kongresszus által négyévenként odaitélt Fields-medál. A Magyar Tudományos Akadémia által a 20. század első éveiben alapított *Bolyai Emlékérem* az egyik legkorábbi ilyen típusú díj, melyet az eredeti kiírás szerint a matematikát leginkább előrevivő, nagyszabású munkáért adományoztak. A díjat először Bolyai János (1802–1860) születésének századik évfordulójának emlékére, 1905-ben adták át. A döntést nagy várakozás előzte meg. Mindenki előtt világos volt, hogy a díjat két matematikus valamelyike fogja megkapni: vagy *David Hilbert* vagy *Henri Poincaré*. *Hilbert* (1862-1943) ekkor még viszonylag fiatal volt, aki az 1900-as Matematikai Világkongresszuson tartott nagy hatású előadást arról, milyen problémák megoldását várja az eljövendő huszadik századtól. *Poincaré* (1854–1912) idősebb, munkái új fejezetet nyitottak az algebrai görbék geometriai tanulmányozásában, alapvető munkát végzett a speciális és általános relativitáselmélet matematikai megalapozásában is. Az 1895-ben megjelent *Analysis Situs* című műve a modern topológia első rendszeres összefoglalója. Új módszert dolgozott ki a háromtest-probléma kezelésére (a probléma analitikusan leírni, hogy a világűrben három magára hagyott test, kizárólag egymást vonzva hogyan mozog). Itt jelenik meg először a matematikában a káosz jelensége. Híres modellje a Bolyai geometriáról megmutatta, hogy abban ugyanúgy nem lehet ellentmondásra jutni mint a szokásos Euklideszi rendszerben. Azon kívül, hogy termékeny matematikus, neves és jó tollú ismeretterjesztő is volt. "A tudományról és a hipotézisről" című könyvében írja a következőket [2]:

> *A tudomány úgy épül fel a tényekből, mint ahogyan egy ház épül a kövekből. De egy sor tény együttvéve ugyanúgy nem tudomány, mint ahogyan egy rakás kő sem ház.*

Arról, hogy az "igazi" geometria Euklideszi-e vagy sem, a véleményét következőképpen foglalja össze:

> *Agyunk a természetes kiválasztódás által alkalmazkodott a külső világhoz. Azt a geometriát fogadta el, amely a faj számára a legelőnyösebb, vagy más szóval ami a legkényelmesebb. A geometria nem igaz, hanem használható.*

> *A matematikusokat nem csinálják, hanem születnek.*
>
> H. Poincaré

A Bolyai Emlékérmet odaitélő bizottság (*Kőnig Gyula*, *Rados Gusztáv*, *Gaston Darboux*, *Felix Klein*) 1905-ben a díjat és a vele járó 10,000 aranykoronát *Henri Poincaré*nek itélte. A következő díjátadásra 1910-ben került sor; a bizottságban ekkor Poincaré már mint titkár vett részt, a díjazott pedig *David Hilbert* volt. A méltatás összegzést ad Hilbert addigi munkájáról: az analízisben, számelméletben elért nagyszerű eredményeiről, a matematika alapjainak lerakásánál játszott szerepéről, a geometria axiomatizálásánál végzett munkájáról. Hilbert sokat tett a végtelen fogalmának matematikán belüli elfogadásáért, valamint azért, hogy a halmazelmélet a "komoly," "igazi" matematika részévé váljon. Erre utal a következő mondása is: *Senki sem űzhet ki minket abból paradicsomból, amit Cantor teremtett számunkra*[1]. A végtelenről pedig ezt írja [3]:

> *Egyetlen kérdés sem mozgatta meg az emberek lelkét jobban, egyetlen ötlet sem sarkallta gyümölcsözőbben az intellektusukat, és egyetlen fogalom sem igényli jobban a tisztázást, mint a végtelené.*

Az első világháború megszakította a Bolyai-díjak sorozatát, és a következő kilencven évben az Akadémia nem adta ki a Bolyai Emlékérmet. Bár sokszor próbálták feleleveníteni a hagyományt, a díj megújítása elé politikai és anyagi akadályokon túl szakmaiak is tornyosultak. Két ilyen hatalmas, enciklopédikus tudású díjazott után, akik nem csak kortársaik, hanem az utánuk jövő nemzedékek megitélése szerint is a legnagyobb matematikusok közé tartoztak, ki legyen a következő? Az elmúlt száz évben a matematika bonyolult és összetett tudománnyá vált. Már nincsenek, és nem is lesznek, lehetnek olyanok, akik a matematika összes ágát ismerik, ráadásul mindegyikben maradandót tudnak alkotni. Ha pedig a matematika ennyire szerteágazó, akkor hogyan dönthetnénk el, hogy melyik ága fontosabb, és melyik kevésbé az? Ez is mutatja, milyen nehéz volt a feladata az 1998-ban felállított Bolyai bizottságnak. A bizottság tagjai neves magyar és nemzetközi matematikusok voltak, akiknek feladata a 2000. évi Bolyai Emlékérem nyertesének kiválasztása volt. A kiírás szerint az "elmúlt tíz év legjelentősebb matematikai monográfiájának szerzőjét" kívánták a díjjal jutalmazni.

A 2000. évi Bolyai-díj matematikai fogalomalkotást, monográfiát, iskolateremtést kíván elismerni, ezzel mintegy utalva a díj első két jutalmazottjára. A bizottság a Bolyai Emlékérmet ezek alapján *Saharon Shelah*-nak, az izraeli Hebrew Egyetem es az amerikai Rutgers Egyetem professzorának ítélte *Cardinal Arithmetic* (Számosságaritmetika) című, 1994-ben az Oxford University Press-nél megjelent monográfiájáért [4].

Shelah két éve ünnepelte ötvenedik születésnapját. Tudományos cikkeinek száma 750 fölött van [6], társszerzőinek száma pedig meghaladja a 170-et. Összehasonlításképpen egy átlagos, jól képzett matematikus éves termése 6–8 cikk. Shelah szakterülete a modellelmélet, matematikai logika, halmazelmélet, univerzális algebra, és általában a matematika többi szakterületének a halmazelmélethez kapcsolódó része.

Az alábbiakban vázlatosan bemutatjuk a díjazott néhány korábbi eredményét, majd arról a témakörről ejtünk néhány szót, amiről Shelah monográfája szól. Mind a fogalmak, mind az eredmények a matematikának a mindennapi szemlélettől legtávolabb eső ágához, a halmazelmélethez tartoznak. A végtelen világ nagyon más, mint a mindennap tapasztalt véges. Hosszú időbe telik és sok munkát igényel, míg olyan biztonsággal tudunk benne

[1] Aus Dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

mozogni, mint a többi matematikai diszciplínában. Éppen ezért az olvasó ne keseredjen el, ha az ismertető egyes részei, definíciói számára homályosak vagy egyenesen érthetetlenek.

Shelah fiatalon oldotta meg a modellelmélet egyik legnehezebb problémáját, az úgynevezett *Morley-sejtést*. *Thoralf Skolem* (1887–1963) norvég és *Leopold Löwenheim* (1878–1957) német matematikus még az 1930-as években bizonyította, hogy egy megszámlálható elméletnek minden végtelen számosságban van legalább egy modellje. *M. Morley* tétele szerint ha egy ilyen elméletnek valamilyen megszámlálhatónál nagyobb számosságra (izomorfia erejéig) csak egyetlen modellje van, akkor minden megszámlálhatónál nagyobb számosságra csak egyetlen modellje van. Igaz-e – és ez volt Morley sejtése –, hogy egy rögzített elmélethez az a függvény, ami egy adott számosságra megmondja, hogy az elméletnek hány páronként nem-izomorf modellje van az adott számosságban, nem csökkenhet? Shelah a kérdést úgy döntötte el, hogy az összes lehetséges ilyen függvényt megadta, az pedig könnyen látható, hogy ezen függvények egyike sem csökken. A megoldáshoz a logikai elméletek és modelljeik általános struktúrális leírásával foglalkozó, úgynevezett klasszifikáció elméletet fejlesztette ki.

Shelah egy másik nevezetes eredménye a kombinatorika *van der Waerden*ről (1903–1996) elnevezett tételéhez kapcsolódik. E szerint minden $k$ és $n$ természetes számhoz található olyan nagy $N$ természetes szám, hogy az 1, 2, …, $N$ számok mindegyikét akárhogyan is színezzük ki $k$ szín valamelyikével, mindig fogunk találni $n$ azonos színűt, melyek egymástól egyenlő távolságra vannak (másképpen mondva az $n$ szám számtani sorozatot alkot). Milyen nagy ez az $N$? A tételnek számos bizonyítása ismeretes, ám mindegyik nagyságrendileg hasonló, elképesztően nagy értéket ad $N$-re. A másik irányból viszont nem sikerült megadni még viszonylag kicsi $N$-re sem olyan színezést, amiben ne lett volna megfelelő hosszúságú egyszínű számtani sorozat. Ismervén a tételre adott sok különböző bizonyítást, és hogy azok mindegyike ugyanolyan nagyságrendű becslést adott $N$-re, a matematikusok általában, a kombinatorikusok pedig kivétel nélkül úgy gondolták, hogy $N$ "igazi" értéke nagyon nagy, csak ellenpélda készítésére nincsenek megfelelő technikáink, vagyis kisebb $N$-re nem tudunk megfelelő színezést konstruálni. Éppen ezért okozott nagy meglepetést, mikor Shelah a van der Waerden tétel egy olyan új bizonyításával állt elő, amely $N$-re egy sokkal kisebb, emberközeli (primitív rekurzív) korlátot adott.

Saharon Shelah igazi kutatási területe a halmazelmélethez kapcsolódik. A "naív" halmazelmélet *Georg Cantor* (1845–1918) alkotása. Fogalmai, módszerei a gondolkodás egyszerű módszereihez nyúlnak vissza. Honnan tudja a pásztor, hogy a nap végén egyetlen báránykája sem hiányzik? Például megszámolhatja a nap elején is és végén is a nyájat. És ha nem tud számolni? Reggel ahogyan a bárányokat kiengedi, mikor egy bárány kimegy a karámból, tesz egy kavicsot a tarisznyájába. Este mikor a bárányokat beengedi, minden báránynál kivesz egy kavicsot. Ha egy kavics sem marad, akkor az összes bárány megvan.

Ugyanígy döntjük el, hogy két halmazban ugyanannyi elem van-e: keresünk közöttük egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. A két halmaznak pontosan akkor van ugyanannyi eleme, ha ilyen megfeleltetés létezik közöttük. Egy halmaz *végtelen*, ha belőle egy elemet elhagyva a halmaz mérete nem csökken, vagyis ugyanakkora halmazt kapunk. A végtelen halmazok nem mindig úgy viselkednek, ahogyan azt elvárnánk. Például a természetes számok és a racionális számok ugyanannyian vannak, ellentétben intuíciónkkal, ami azt sugallja, hogy racionális számból jóval több van, mint természetes számból. Cantor matematikai kongresszusokon kérdezgette kollégáit, hogy szerintünk az egységszakaszon vagy pedig az egységnyi oldalú négyzetben van-e több pont? Szinte senki sem tippelt helyesen. *Guiseppe Peano* (1858–1932) nevezetes függvényét, amely az egységszakaszt folytonosan ráképezi az egységnégyzetre úgy, hogy a négyzet minden pontja előáll képként, csak 1890 körül készítette el. Cantor jóval korábban tudta az igazságot: egy szakaszon és egy négyzetben ugyanannyi pont van.

Azt, hogy nem minden végtelen halmaz egyforma méretű, Cantor a róla elnevezett átlós módszerrel megmutatta meg. Pontosabban azt igazolta, hogy egy halmaz mindig kisebb, mint a hatványhalmaza, ami nem más mint összes részhalmazainak halmaza. Tehát nem csak egyfajta végtelen van. Mivel minden méretű halmaznál tudunk nagyobbat mondani, azért végtelen sok különböző végtelennek kell léteznie. Ami az ugyanakkora halmazokban közös, az a *számosságuk*. A *véges* számosságok a véges halmazok számossága, többi számosság végtelen.

Végtelen számosságokon is értelmezni tudjuk a véges halmazokon jól ismert összeadást és szorzást. Ha $\kappa$ és $\lambda$ két számosság (akár véges, akár végtelen), akkor vegyünk közös elem nélküli $A$ és $B$ halmazokat úgy, hogy $A$ számossága $\kappa$ és $B$ számossága $\lambda$ legyen. A $\kappa+\lambda$ számosság az $A$ és $B$ halmazok egyesítésének számossága. Más szóval vegyünk egy $\kappa$ számosságú halmazt és mellé egy $\lambda$ számosságú halmazt: a kettő együtt $\kappa+\lambda$ számosságú lesz. Ugyanúgy, mint amikor kettő almához még két almát téve négyet kapunk. Hasonlóan a $\kappa \cdot \lambda$ szorzat azon $(a, b)$ párok száma, ahol $a$ az $A$-ból, $b$ pedig a $B$-ből való. Ez utóbbi nem más, mint az $A$ sorból és $B$ oszlopból álló táblázat elemeinek száma – jól láthatóan a természetes számok szorzatának közvetlen általánosítása.

Nézzük végül azokat az $n$ hosszúságú sorozatokat, melyekben minden helyen $k$ különböző elem valamelyike állhat. Az ilyen sorozatok száma $k^n$. Ennek analógiájára a $\kappa^\lambda$ azon "sorozatok" halmazának a számossága, ahol a sorozat elemeit egy $\lambda$ számosságú halmaz elemeivel indexeljük, és minden egyes helyen egy adott $\kappa$ számosságú halmaz valamelyik eleme szerepelhet. Például, ha $B$ egy $\lambda$ számosságú halmaz, akkor $2^\lambda$ az olyan $B$ elemeivel indexelt sorozatokból áll, melyekben mindenütt 0 vagy 1 van, ezek pedig $B$ részhalmazainak karakterisztikus függvényei. Ezért $2^\lambda$ a $B$ összes részhalmazából álló halmaznak, vagyis $B$ hatványhalmazának számossága.

Már Cantor bizonyította, hogy az összeadás, szorzás és hatványozás szokásos tulajdonságai a végtelen számosságokra is érvényben maradnak, sőt még akkor is, ha az összefüggésekben az összeadandók, vagy a tényezők végtelen sokan vannak. Például $\kappa$ darab $\lambda$ összege $\kappa\cdot\lambda$, ami egyenlő $\lambda\cdot\kappa$-val. Az is ismeretes volt, hogy végtelen számosságokra az összeadás és szorzás nagyon egyszerű: ha $\kappa$ és $\lambda$ közül legalább az egyik végtelen, akkor $\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda$ és ez $\kappa$ és $\lambda$ közül a nagyobbik. A Bolyai–díj átadásakor tartott előadásán Shelah megjegyezte: az általános iskolákban biztosan szeretnék az ilyen egyszerű összeadó- és szorzótáblát! A hatványozással más a helyzet: $2^\lambda$ *mindig* nagyobb $\lambda$-nál.

A $\lambda$-nál nagyobb számosságok közül – ahogyan fentebb láttuk ilyenek vannak –, a legkisebbet $\lambda^+$ jelöli (ez mindig létezik), és ez $\lambda$ *rákövetkezője*. Egy számosság *rákövetkező*, ha $\kappa^+$ alakú (vagyis valaminek a rákövetkezője), és *limesz* egyébként. A $\lambda$ végtelen számosság *reguláris*, ha nem áll elő $\lambda$-nál kevesebb $\lambda$-nál kisebb számosságok összegeként. A végtelen rákövetkező számosságok mind regulárisak. A $\lambda$ számosság *kofinalitása* az a legkisebb számosság, amire $\lambda$ ennyi darab, nála kisebb számosság összegeként előállítható.

Mivel $\lambda$ mindig egyenlő $\lambda$ darab egyes összegével, azért a $\lambda$ számosság pontosan akkor reguláris, ha kofinalitása megegyezik saját magával.

A végtelen számosságok körében az összeadás és szorzás nagyon egyszerű, talán túlságosan is az. Azt várjuk, hogy a hatványozásnak sem lehet túlságosan bonyolult. Mivel $2^\lambda$ mindig nagyobb mint $\lambda$, az a természetes elvárásunk, hogy ennek értéke a lehető legkisebb $\lambda$-nál nagyobb számosság, vagyis $\lambda^+$ lesz. Az *általánosított kontinuum hipotézis* éppen az a feltételezés, hogy ez minden végtelen $\lambda$ számosságra így is van.

*Általánosított kontinuum hipotézis: Minden végtelen számosságra* $2^\lambda = \lambda^+$.

David Hilbert az 1901-es Matematikai Kongresszuson felsorolt 23 problémát, melyek megoldását az eljövendő századtól várta. Hilbert problémáin nagyon sokan dolgoztak, a problémák a huszadik század matematikájának legfontosabb kutatási irányait jelölték ki. Egy–egy probléma megoldásával híressé lehetett válni. Hilbert problémái közül az elsőként a harmadikat sikerül megoldania *Max Dehn*nek (1858–1952): az azonos térfogatú szabályos tetraéder és a kocka nem darabolható át egymásba. Az általánosított kontinuum hipotézis fontosságát mi sem mutatja jobban, hogy ez volt Hilbert problémái közül az első.

Hogy egy kicsit jobban megértsük miért is ilyen fontos probléma ez, kanyarodjunk vissza egy kicsit, és vizsgáljuk meg hogy mik is azok a halmazok. A halmazelmélet matematikai fogalomalkotás egyik csúcspontja. Kizárólag matematikai fogalmakkal, a matematikán belül definiál egy új diszciplínát, melynek – különösen a végtelen halmazok tulajdonságait tekintve – nincsenek olyan egyszerű, hétköznapi, kézzel fogható gyökerei, mint amilyenek a természetes vagy valós számok, folytonosság, függvények. A halmaz fogalma kizárólag matematikai absztrakcióval keletkezett, a halmazelmélet a matematika, a matematikai gondolkodás lényegét volt hivatva megfogni. Ezért is okozott a 19. század utolsó éveiben pánikot a halmazelméletben felbukkant paradoxonok sora: ha már a tiszta matematika is ellentmondásos, mit lehet várni a jóval kisebb szigorúsággal felépített alkalmazásoktól? Utólag persze nagyon jól tudjuk, hogy a paradoxonok nem jelentettek ellenmondást, csak a fogalmak tisztázatlansága, illetve a végtelen tulajdonságainak szokatlan, gyakran az intuíciónak szögesen ellentmondó természetének köszönhetőek. A halmazelmélet megbízható felépítéséhez a halmazok alaptulajdonságainak megfogalmazása, vagyis ezeket a tulajdonságokat leíró *axiómarendszer* felépítése vált szükségessé. Ezek az axiómák a halmazok egyszerű, mindenki által elfogadott tulajdonságait írják le, mindamellett elegendően gazdagok ahhoz, hogy a naív halmazelméletből jól ismert tételek, a halmazok "elvárt" tulajdonságai mind levezethetők legyenek. Az egyetlen axióma, aminek elfogadása nem volt teljesen egyöntetű a matematikusok között, a nevezetes kiválasztási axióma, amire viszont szükség van: ha az elemi analízis tételeit (mint például minden korlátos sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat) az axiómákból bizonyítani akarjuk, a kiválasztási axiómát fel kell használnink. Az intuíció, az analógia a végtelen matematikájában nagyon csalóka. Megtanultuk: *a halmazokról csak annyit tudunk, amennyi az axiómákból levezethető*, sem többet, sem kevesebbet. Ha intuíciónkra akarunk támaszkodni, könnyen csapdába esünk.

A természetes számokat mindenki jól ismeri, a róluk szóló "természetes" állítások valamilyen értelemben "el vannak döntve." Az, hogy van-e akármilyen nagy ikerprím pár, akár tudjuk bizonyítani, akár nem, mindenképpen vagy igaz, vagy hamis. (Valószínűleg igaz.) Az, hogy a $\pi = 3.1415\ldots$ tizedestört felírásában végtelen sok hetes számjegy fordul-e elő, független, eldöntött kérdés: a válasz nem függ semmitől, van, létezik és egyértelmű, még ha nem is tudjuk a választ.

A halmazelmélettel azonban nem így vagyunk. Ha egy állításról a halmazelmélet axiómái semmit sem mondanak, akkor azzal bajban vagyunk. Kérdezhetjük-e hogy "a valóságban mi a helyzet?" Egyátalán mi a valóság? Ha a matematika a való világ modellje, akkor hol találjuk a halmazelmélet megfelelőjét? Hol találunk végtelen halmazt, amiből ha elveszünk egyet, ugyanannyi marad; vagy ha megduplázzuk, nem lesz több?

Amit a halmazelmélet axiómái leírnak, az a biztos mag. Ez Bolyai János abszolút geometriájához hasonlítható: a halmazok igaz tudománya, melyet biztos alapokon, biztos módszerekkel építünk fel. Sajnos az általánosított kontinuum hipotézis nincs ebben a magban. *Kurt Gödel* (1906–1978) még 1940-ben megmutatta, hogy az általánosított kontinuum hipotézis összeegyeztethető a halmazelmélet szokásos axiómáival; *Paul Cohen* (1934–) pedig 1963-ban azt, hogy a tagadása is. A Cohen által kitalált forszolási technikát használva sok, korábban megközelíthetetlen, hagyományos matematikai (elsősorban analízibeli valamint topológiai) problémáról sikerült igazolni, hogy nem vezethető le a halmazelméleti axiómákból.

Ha egy állítás összeférhető a halmazelmélet axiómáival, akkor azt mondjuk róla, hogy *konzisztens*. Ez lehet úgy is, hogy következik az axiómákból, de az is lehet, hogy nem következik. Egy állítás *független*, ha sem ő, sem pedig a tagadása nem következik az axiómákból, más szavakkal mind ő mind a tagadása konzisztens. Gödel és Cohen eredményeit együtt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az általánosított kontinuum hipotézis független.

A forszolás megjelenése után nagyon hamar kiderült, hogy az általánosított kontinuum hipotézis "nagyon független," néhány természetes megszorítástól eltekintve majdnem tetszőlegesen előírhatjuk $2^\lambda$ értékét. A megmaradt apróság, érthetetlen jelenség, a "majdnem." Ennek kibogozása során a rendetlenségben váratlanul rend, a független állítások között pedig abszolút tételek jelentek meg. Erről a rendről, ezekről az új tételekről szól Shelah Bolyai-díjjal kitüntetett monográfiája. A cikk hátralevő részében azt próbáljuk bemutatni, mennyire megzabolázhatalan a hatványfüggvény, mi volt az apró folt, bosszantó kényelmetlenség, és végül Shelah milyen új, meglepő eredménnyel jelentkezett.

A legkisebb végtelen számosság a természetes számok halmazának számossága, ezt a Cantor által bevezetett jelölésmódnak megfelelően $\aleph_0$ jelöli. Az $\aleph$ jel a héber ábécé első betűje, és alefnek olvassuk. A legkisebb $\aleph_0$-nál nagyobb számosságot, vagyis $\aleph_0$ rákövetkezőjét $\aleph_1$ jelöli, általában egy $n$ természetes számra $\aleph_{n+1}$ az $\aleph_n$ rákövetkezője: $\aleph_{n+1} = \aleph_n^+$. A végtelen számosságokat nagyság szerint sorba rakva a sor eleje ezek szerint így néz ki: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, stb. Természetesen van olyan számosság, ami mindegyik $\aleph_n$-nél nagyobb. A számosságok felsorlásához ezért a természetes számok túl kevesen vannak. Azért, hogy ebben a felsorolásban ne akadjunk meg, a sorszámozást is általánosítani kell. Az ilyen általánosított sorszámokat a halmazelméletben *rendszámoknak* nevezzük; ezek az egyesével való továbbszámlálás általánosításai.

$\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$
*Georg Cantor a legnagyobb a világon*[2].

Erdős Pál

A legkisebb végtelen rendszám a legelső rendszám, ami a természetes számok után következik. Ezt szokás szerint $\omega$-val jelöljük. Az $\omega$ utáni rendszám $\omega + 1$, azután sorban $\omega + 2$, $\omega + 3$ következik. Ezeket az $\omega + \omega = 2 \cdot \omega$ követi, és így tovább vég nélkül. A rendszámokat a görög ábécé kezdőbetűivel jelöljük. Ugyanúgy, mint a természetes számokra, a rendszámokra is igaz az indukció tételének a következő változata: ha minden $\alpha$ rendszámra abból, hogy egy állítás minden $\alpha$-nál kisebb rendszámra igaz, be be tudjuk látni, hogy $\alpha$-ra is teljesül, akkor az állításnak az összes rendszámra teljesülnie kell. A rendszámok rendezve vannak, például bármely két rendszám közül valamelyik kisebb, mint a másik. A rendszámok azért nem mindenben viselkednek ugyanúgy, mint a természetes számok. Míg a természetes számok között a nulla kivételével mindegyiknek van közvetlen megelőzője, addig ez a rendszámokra már nem igaz. Például az $\omega$-nál kisebb rendszámok (vagyis a természetes számok) között nincs legnagyobb, ezért $\omega$ nem lehet valami meg egy.

Egy $\alpha$ rendszám *megszámlálható*, ha a nála kisebb rendszámok halmaza megszámlálható. Így $\omega$, $\omega + n$, $\omega + \omega$ mind megszámlálható rendszámok; továbbá ha $\alpha$ megszámlálható, akkor $\alpha + 1$ is az. A legkisebb nem-megszámlálható rendszám jele $\omega_1$, az ennél kisebb rendszámok halmazának számossága – talán nem meglepő módon – éppen $\aleph_1$. Az $\omega_1$-nél nagyobb rendszámok mind olyanok, hogy a megelőzőikből álló halmaz számossága legalább $\aleph_1$. A legkisebb olyan rendszámot, amire ez a számosság már kifejezetten nagyobb $\aleph_1$-nél, az előzőhöz hasonlóan $\omega_2$ jelöli. Persze az $\omega_2$-nél kisebb rendszámok halmazának számossága $\aleph_2$ lesz. Egy rendszám *rákövetkező*, ha egy másik rendszámnál éppen eggyel nagyobb, és *limesz* egyébként. Például $\omega$, $\omega + \omega$, $\omega_1$ vagy $\omega_2$ mind limesz rendszámok, az ezeket követő rendszámok pedig mint rákövetkezők.

A rendszámok segítségével a számosságokat nagyság szerinti sorba tehetjük. Láttuk, hogy az első néhány végtelen számosság $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, stb. A legkisebb számosság, ami ezek mindegyikénél nagyobb a számosságok sorában az $\omega$-dik, ezért a jele $\aleph_\omega$. Az $\aleph_\omega$ rákövetkezője $\aleph_{\omega+1}$, az $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$, $\aleph_{\omega+3}$ számosságok legkisebb felső korlátja pedig az $\aleph_{\omega+\omega} = \aleph_{2\cdot\omega}$ számosság. Ha ezt folytatjuk, akkor az $\aleph$ indexében az összes rendszám előfordul. Nincs legnagyobb rendszám, és minden számosság egyszer és csak egyszer található meg az $\aleph_\alpha$ számosságsorozatban. Az $\alpha$ rendszámot az $\aleph_\alpha$ számosság *indexének* szokás nevezni. Az $\omega_1$ és $\omega_2$ mintájára általában is definiáljuk az $\omega_\alpha$ rendszámot: ez a legkisebb olyan rendszám, amire a nála kisebb rendszámok halmazának számossága $\aleph_\alpha$.

Számosságok közül azok, melyeknek indexe rákövetkező rendszám, maguk is rákövetkező számosságok, hiszen $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$. Egy rákövetkező számosság mindig reguláris, vagyis nem áll elő nálánál kevesebb, nála kisebb számosság összegeként. Limesz számosságok indexe mindig limesz rendszám, ezek kofinalitása (vagyis hány nála kisebb számosság összegeként állítható elő) már mindenféle értéket felvehet. Például $\aleph_\omega$ kofinalitása, amit

[2] Ezt a versikét Hajnal Andrástól hallottam.

$\mathrm{cf}(\aleph_\omega)$ jelöl, éppen $\aleph_0$. Ehhez azt kell látnunk, hogy $\aleph_\omega$ előáll megszámlálható darab, $\aleph_\omega$-nál kisebb számosság összegeként, és ehhez ennél kevesebb nem elegendő. Ám $\aleph_\omega$ a nála kisebb számosságok összege:

$$\aleph_\omega = \aleph_0 + \aleph_1 + \cdots + \aleph_n + \cdots,$$

és itt a jobb oldalon megszámlálhatóan sok összeadandó szerepel. Másrészt ha az összeadandók közül csak véges sokat veszünk, az eredmény az összeadandók legnagyobbika lesz. Azt is igaz, hogy $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1$, vagy $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_2}) = \aleph_2$. Ugyanakkor $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_\omega})$ már nem $\aleph_\omega$, hanem ismét $\aleph_0$.

A kofinalitás igen fontos szerepet játszik a számosságaritmetikában. *Kőnig Gyula* (1849–1913) nevezetes halmazelméleti tétele szerint $2^\lambda$ kofinalitása mindig nagyobb, mint $\lambda$. Ez a tétel például azonnal kizárja, hogy $2^{\aleph_0}$ értéke $\aleph_\omega$ legyen, hiszen ez utóbbi kofinalitása $\aleph_0$. Paul Cohen a forszolás bevezetésével elsőként mutatta meg, hogy $2^{\aleph_0}$ akármilyen számosság lehet, aminek kofinalitását Kőnig tétele nem zárja ki. Nem sokkal később *W. Easton* a következőképpen kiterjesztette ezt az eredményt [7]. Vegyünk egy, a számosságokon értelmezett, számosságokat felvevő tetszőleges $f$ leképezést, mely rendelkezik a következő két tulajdonsággal: $f$ monoton, vagyis $\kappa < \lambda$ esetén $f(\kappa) \leq f(\lambda)$, továbbá $f$ nem mond ellent Kőnig tételének, vagyis $\mathrm{cf}(f(\kappa)) > \kappa$. Ekkor elképzelhető (vagyis konzisztens), hogy minden *reguláris* $\kappa$ számosságra $2^\kappa = f(\kappa)$.

Easton modelljében a nem reguláris – vagyis szinguláris – számosságokra a hatványfüggvény értéke a legkisebb olyan számosság, amivel $f$ még monoton marad és még teljesül a Kőnig-feltétel is. Például ha Easton konstrukciójában minden $n$ természetes számra $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$, akkor $2^{\aleph_\omega}$ értéke automatikusan $\aleph_{\omega+1}$ lesz.

A 70-es évek elején *Menachem Magidor* (bizonyos nagyon nagy számosság létezését feltéve) tudott olyan modellt konstruálni, melyben minden $n$ természetes számra $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$, míg $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}$, vagyis az általánosított kontinuum hipotézis először $\aleph_\omega$-nál sérül. Ennek fényében úgy tünt, hogy a számosság hatványozás – hasonlóan a számosságok összeadásához és szorzásához – teljesen érdektelen, csak más miatt. Míg az összeadás és szorzás triviális, addig a hatványozás akármi lehet, amit a fenti két egyszerű megszorítás, nevezetesen a monotonitás és Kőnig tétele megenged. Reguláris számosságokra ezt Easton modellje igazolta. Szinguláris számosságok esetén problémák jelentkeztek, ezeket a problémákat elsősorban technikai jellegűnek vélték, aminek leküzdésében Magidor eredménye lett volna az első lépés.

Megvolt tehát a "majdnem" eredmény, és úgy látszott, hogy a kimaradt kellemetlen eseteket is kezelni tudjuk. 1974-ben mindenki legnagyobb meglepetésére *J. Silver* bizonyította, hogy az általánosított kontinuum hipotézis *nem sérülhet először $\omega_1$-nél.* Vagyis ha minden $\alpha < \omega_1$ rendszámra $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^+$, akkor szükségképpen $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1}^+$ is igaz. Silver bizonyításában modellelméleti eszközöket is használt. Rövidesen *Hajnal András* és *Fred Galvin* kombinatorikus módszerekkel egy jóval általánosabb tételt igazolt. Ennek egyik következménye, hogy ha a hatványfüggvény $\aleph_{\omega_1}$ előtt alárhogyan is viselkedik, de $\aleph_{\omega_1}$-et nem ugorja át, akkor $2^{\aleph_{\omega_1}}$ indexének számossága legfeljebb $2^{\aleph_1}$. Ugyanez igaz marad, ha $\omega_1$ helyébe $\omega_2$-t teszünk: ha a hatványfüggvény nem ugorja át $\aleph_{\omega_2}$-t, akkor $2^{\aleph_{\omega_2}}$ indexének számossága legfeljebb $2^{\aleph_2}$ lehet. Sajnos a módszer nem mond semmit a legkisebb szinguláris számosságról, $\aleph_\omega$-ról. Saharon Shelah-nak majdnem tíz év elteltével sikerült csak igazolnia, hogy ha a hatványfüggvény nem ugorja át $\aleph_\omega$-t, akkor $2^{\aleph_\omega}$ indexe kisebb, mint $\omega_4$.

Shelah a tétel bizonyításához egy új elméletet fejlesztett ki: a *lehetséges kofinalitások elméletét*, amit az angol elnevezés rövidítéseként csak pcf elméletnek neveznek. Ahelyett, hogy a hatványhalmaz számosságát vizsgálná, számosságok szorzatán definiál egy operációt, aminek azután bizonyos algebrai tulajdonságaiból következik a fenti eredmény. Legyen tehát $A$ számosságoknak egy halmaza. Az ehhez az $A$-hoz rendelt $\mathrm{pcf}(A)$ mindazokból a számosságokból áll, amik az $A$-beli számosságú halmazok szorzatán értelmezhető redukált rendezések kofinalitásai. Innen származik az elnevezés is, ezek a szorzat *lehetséges* kofinalitásai. Ez a pcf operáció sok szép és érdekes algebrai tulajdonsággal rendelkezik. Például $\mathrm{pcf}(A)$ mindig tartalmazza $A$-t, továbbá $\mathrm{pcf}(\mathrm{pcf}(A)) = \mathrm{pcf}(A)$ (vagyis az operáció idempotens), valamint $\mathrm{pcf}(A)$ nem sokkal nagyobb számosságú, mint az $A$ halmaz. Az elmélet felépítését, a fent idézett eredményt és még sok más további tételt tartalmaz Shelah Számosságaritmetika című monográfiája. A könyvet Shelah 1991-ben befagyasztotta, ami azt jelenti, hogy csak az addig elért eredmények vannak benne. A pcf elmélet segítségével jobban megérthetjük a halmazelmélet egyik alapvető, s úgy tűnik mindmáig félreértett ágát: a számossághatványozás problematikáját. E szerint a Hilbert által is felvetett kontinuum hipotézis rossz kérdés, hiszen a halmazelmélet axiómáinak alapján nem oldható meg. A hatványfüggvény értéke két részből tevődik össze. Az egyik a "zaj," az esetlegesség, amit a függetlenségi eredmények is mutatnak. A másik rész a pcf elmélet algebrai struktúráiba van beírva, ami viszont abszolút, eldöntött. A számossághatványozást ezeken a struktúrákon keresztül kell vizsgálnunk, hiszen ezek kevésbé terheltek a statikus zajjal. Ezek vizsgálatán keresztül érthetjük meg igazán, hogy milyen törvényeknek engedelmeskedik tulajdonképpen a számosságaritmetika. Érdekes módon ez a "zaj" sokkal erőteljesebben jelentkezik, ha a hatványozásban az alap kicsi a kitevőhöz képest, míg teljesen eltűnik, ha a kitevő véges.

A pcf elmélet természetesen messze van attól, hogy lezárt egységet alkosson. Az elmélet egyik legnagyobb misztikuma a négyes index abban a fent idézett állításban, miszerint $2^{\aleph_\omega}$ indexe a kisebb $\omega_4$-nél, feltéve, hogy a hatványfüggvény nem ugorja át $\aleph_\omega$-t. Ismeretes, hogy ez az index bármilyen megszámlálható rendszám lehet (vagyis a $2^{\aleph_\omega} = \aleph_\alpha$ konzisztens minden $\omega + 1 \leq \alpha < \omega_1$ esetére úgy hogy egyúttal $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ is teljesül), így a természetes korlát $\omega_1$ volna. Az elmélet alapján elvégzett számítások mindenesetre csak $\omega_4$-et adnak. A pcf-elmélet a számosságaritmetikán kívül alkalmazható olyan állítások bizonyítására, melyekről eddig csak annyit tudtunk, hogy konzisztensek. Ilyenek találhatók a modellelméletben, univerzális algebrában, kombinatorikában, Boole-algebrák elméletében, vagy a topológiában is.

## Irodalom


[1] `http://www.cs.unb.ca/~alopez-o/math-faq/mathtext/node21.html`

[2] `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.ak/~history/Mathematicians/Poincare.html`

[3] `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.ak/~history/Quotations/Hilbert.html`

[4] S. Shelah, Cardinal Arithmetic, Oxford University Press, 1994

[5] S. Shelah, Cardinal arithmetic for skeptics, Bull. Amer.Math.Soc 26, 2, 1992 197–210

[6] `http://www.math.rutgers.edu/~shelah`
[7] W. Easton, Powers of regular cardinals, Annals of Math.Logic 1 (1970) 139–178