

## Leszálló Löwenheim-Skolem tétel

**Tétel** (Tarski–Vaught kritérium) *Legyen  $\mathfrak{B}$  részstruktúrája  $\mathfrak{A}$ -nak.  $\mathfrak{B}$  akkor és csak akkor elemi rész, ha minden  $\mathfrak{B}$  feletti  $e$  értékelésre és  $\exists x \varphi$  formulára igaz a következő implikáció: ha  $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi[e]$ , akkor van olyan  $b \in B$ , amire  $\mathfrak{A} \models \varphi[e[x/b]]$ .*

**Bizonyítás** Először tegyük fel, hogy  $\mathfrak{B}$  elemi része  $\mathfrak{A}$ -nak. Az elemi rész definíciója miatt ha egy  $\mathfrak{B}$  feletti  $e$  értékeléssel  $\mathfrak{A}$ -ban igaz egy formula, akkor ugyanazzal az értékeléssel  $\mathfrak{B}$ -ben is igaz, vagyis  $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi[e]$ . Ez pedig azt jelenti, hogy van  $b \in B$ , amire  $\mathfrak{B} \models \varphi[e[x/b]]$ . Megint az elemi rész definíciója miatt ekkor  $\mathfrak{A} \models \varphi[e[x/b]]$ , hiszen ez egy  $\mathfrak{B}$  feletti értékelés.

Fordítva tegyük fel, hogy  $\mathfrak{A}$ -ra és  $\mathfrak{B}$ -re áll a fenti implikáció. A  $\varphi$  formula felépítésére vonatkozó indukcióval mutatjuk meg, hogy az elemi rész definíciója erre a két struktúrára fennáll. Prímformulákra azért, mert feltétel szerint  $\mathfrak{B}$  részstruktúrája  $\mathfrak{A}$ -nak.  $\varphi$ -ról  $\neg\varphi$ -re; illetve  $\varphi$  és  $\psi$ -ről  $\varphi \vee \psi$ -re trivi. Tegyük most fel, hogy az elemi rész definíciója  $\varphi$ -re és tetszőleges  $\mathfrak{B}$  feletti értékelésre teljesül, és nézzük  $\exists\varphi$ -t. Ha  $\mathfrak{B} \models \exists\varphi[e]$ , akkor  $\mathfrak{B} \models \varphi[e[x/b]]$  valamilyen  $b \in B$ -vel, az indukciós hipotézis miatt  $\mathfrak{A} \models \varphi[e[x/b]]$ , tehát  $\mathfrak{A} \models \exists\varphi[e]$ . Ha most  $\mathfrak{A} \models \exists\varphi[e]$ , akkor az állításban szereplő feltétel miatt van  $b \in B$ , amivel  $\mathfrak{A} \models \varphi[e[x/b]]$ , ahonnan az indukció miatt  $\mathfrak{B} \models \varphi[e[x/b]]$ , ahonnan  $\mathfrak{B} \models \exists\varphi[e]$ , ahogyan kívántuk. QED

**Tétel** *Legyen  $\mathfrak{A}$  egy végtelen  $t$  típusú struktúra,  $X \subseteq A$ . Ekkor van  $\mathfrak{A}$ -nak olyan  $\mathfrak{B}$  elemi része, hogy  $X \subseteq B$ , és  $|B| \leq |X| \cdot |t| \cdot \omega$*

**Bizonyítás** Legyen  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$  egy formula, az ehhez tartozó  $f_\varphi$  Skolem-függvény olyan  $A$ -n értelmezett  $n$ -változós függvény, hogy tetszőleges  $a_1, \dots, a_n \in A$  elemekre, ha létezik egyáltalán olyan  $b \in A$ , amivel  $\mathfrak{A} \models \varphi(b, a_1, \dots, a_n)$ , akkor  $f_\varphi(a_1, \dots, a_n)$  ilyen.

Rögzítsünk minden formulához egy Skolem-függvényt. Ha az  $\mathfrak{A}$  struktúra alaphalmazának egy  $B \subseteq A$  része zárt az összes Skolem-függvényre, akkor  $B$  részstruktúrát indukál ( $B$  zárt a függvényekre, amit az  $x = f(y_1, \dots, y_n)$  formulához tartozó Skolem-függvény mutat); továbbá a Tarski–Vaught kritérium alapján elemi rész is.

Mivel formulából  $|t| \cdot \omega$  darab van, azért ha  $X$ -et az összes Skolem-függvényre lezárjuk, legfeljebb  $|X| \cdot |t| \cdot \omega$  számosságú halmazt kapunk. QED

**Következmény** (Leszálló Löwenheim-Skolem tétel) *Ha egy  $\Gamma$  formulahalmaznak van modellje, akkor van legfeljebb  $|\Gamma| \cdot |t| \cdot \omega$  számosságú modellje is.*

Így például a halmazelmélet axiómarendszerének (egyetlen kétváltozós relációjel) ha van egyáltalán modellje, akkor van megszámlálható modellje is.

A leszálló és felszálló Löwenheim–Skolem tételek együtt azt mondják ki, hogy ha egy  $\Gamma$  formulahalmaznak van végtelen modellje, akkor minden  $\kappa \geq |t|\omega$  számosságra van pontosan  $\kappa$  számosságú modellje is.