

Modellek konstansokból

Legyen \mathfrak{A} egy t típusú struktúra, az \mathfrak{A} teljes diagrammja, amit $\Delta_{\mathfrak{A}}$ jelöl, a következő. Válasszunk A minden $a \in A$ eleméhez egy vadonat új konstansjelet, mondjuk c_a , és legyen t' az a típus, amit t -ből ezeknek a jeleknek a hozzáadásával kapunk. Az \mathfrak{A} -t kiterjesztjük egy t' típusú struktúrává úgy, hogy c_a interpretáltja éppen $a \in A$ legyen. $\Delta_{\mathfrak{A}}$ az \mathfrak{A}' -ben igaz összes t' típusú formula.

Hasonlóképpen definiáljuk az $\Delta_{\mathfrak{A}}^o$ elemi diagrammot: ebben a változójel (és persze kvantorjel) nélküli \mathfrak{A}' -ben igaz t' típusú formulák vannak.

Tétel: $\Delta_{\mathfrak{A}}^o$ minden modelljébe \mathfrak{A} részstruktúraként beágyazható; $\Delta_{\mathfrak{A}}$ minden modelljébe \mathfrak{A} elemi részként beágyazható.

Bizonyítás A részstruktúra természetesen mindkét esetben a c_a konstansjelek interpretáltja lesz, és a beképezés pedig az, ami $a \in A$ -hoz hozzárendeli c_a -nak interpretáltját.

Ha \mathfrak{B} a $\Delta_{\mathfrak{A}}^o$ modellje, akkor egy $c \in t$ konstansjelre annak \mathfrak{A} -beli interpretáltja $a \in A$, azaz $c_{\mathfrak{A}} = a$, akkor a $c = c_a$ formula eleme $\Delta_{\mathfrak{A}}^o$ -nak és ezért igaz \mathfrak{B} -ben is, vagyis a c -nek \mathfrak{B} -beli interpretáltja megegyezik c_a interpretáltjával, és így a konstansjelek interpretáltját a beágyazás megőrzi. Hasonlóan, ha $f \in t$ egy függvényjel, és $f_{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = a$ az \mathfrak{A} -ban, akkor a

$$f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$$

formula eleme $\Delta_{\mathfrak{A}}^o$ -nak, tehát igaz \mathfrak{B} -ben, és így az $f_{\mathfrak{B}}$ ezeknek interpretáltjaira megfelelően működik, ahogyan kívántuk. A relációjelekkel hasonlóképpen lehet elbánni, vagyis a beképezés tényleg izomorfizmus.

Ha \mathfrak{B} modellje a teljes diagrammnak, akkor a c_a konstansjelek interpretáltjai elemi részt alkotnak. Ugyanis az előzőek szerint részstruktúra, továbbá ha egy \mathfrak{B} fölötti e értékelés minden változójelhez egy-egy c_a konstansjel interpretáltját rendeli, akkor helyettesítve a változójeleket a megfelelő konstansjellel, egy zárt φ' formulát kapunk, ami pontosan akkor igaz amikor $\varphi[e]$:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[e] \quad \text{akkor és csak akkor ha } \mathfrak{B} \models \varphi'$$

Mivel φ' zárt és t' típusú, azért vagy ő vagy a tagadása $\Delta_{\mathfrak{A}}$ eleme, ezért akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A}' \models \varphi'$. Az \mathfrak{A}' és a képe között izomorfizmus miatt es akkor és csak akkor, ha φ' a képből igaz, ami éppen az elemi rész definícióját adja. QED

Következmény: Ha $\Delta_{\mathfrak{A}} \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$ konzisztens (van modellje), akkor van olyan struktúra, amibe \mathfrak{A} és \mathfrak{B} egyszerre beágyazható elemien. QED

Tétel: Ha \mathfrak{A} és \mathfrak{B} elemien ekvivalensek, akkor van olyan struktúra, amibe mindkettő elemien beágyazható.

Bizonyítás Az előzőek szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy $\Delta_{\mathfrak{A}} \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$ konzisztens, amihez a kompaktsági tétel miatt elegendő megmutatni, hogy ennek minden véges része konzisztens. Ha nem, akkor van $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Delta_{\mathfrak{A}}$ valamint $\psi_1, \dots, \psi_\ell \in \Delta_{\mathfrak{B}}$ hogy ezek

együtt nem konzisztensek. Mivel ekkor $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Delta_{\mathfrak{A}}$ is igaz, azért ilyenkor van *egyetlen* $\varphi \in \Delta_{\mathfrak{A}}$ és egyetlen $\psi \in \Delta_{\mathfrak{B}}$ hogy $\varphi \wedge \psi$ nem konzisztens. Mivel mindkettő zárt, ez azt jelenti, hogy nincs olyan struktúra ahol mindkettő igaz, vagyis

$$\varphi \models \neg\psi.$$

Most írjuk ki az implicite szereplő a_i valamint b_j konstansjeleket:

$$\varphi(a_1, \dots, a_k) \models \neg\psi(b_1, \dots, b_\ell).$$

Ez a sor azt jelenti, hogy tetszőleges modellben, ha a bal oldal igaz, akkor a jobb oldal is igaz. Mivel a bal oldalon a b_j konstansjelek egyike sem szerepel, azért egy modellben akárhogyan is választjuk meg ezek interpretáltjait, a jobb oldalnak igaznak kell lennie, vagyis

$$\varphi(a_1, \dots, a_k) \models \forall x_1 \dots \forall x_\ell \neg\psi(x_1, \dots, x_\ell).$$

Speciálisan az \mathfrak{A} struktúrában a bal oldal igaz, tehát a jobb oldali formula is igaz \mathfrak{A} -ban. Ez egy t típusú formula, és az elemi ekvivalencia miatt ekkor \mathfrak{B} -ben is igaz. Ez viszont ellentmond annak, hogy $\mathfrak{B} \models \psi(b_1, \dots, b_\ell)$. QED

Legyenek t_1 és t_2 *kompatibilis* típusok, vagyis ha egy jel mindkét típusban szerepel, akkor az ugyanolyan és ugyanannyi változós. Ekkor definiálhatjuk a $t = t_1 \cap t_2$ valamint a $t_1 \cup t_2$ típusokat is.

A t_1 típusú \mathfrak{A} struktúra t típusú *reduktuma*, amit $\mathfrak{A}|t$ -vel jelölünk, az a t típusú struktúra, amit úgy kapunk \mathfrak{A} -ból, hogy a nem t -ben szereplő jeleket "elfelejtjük."

1. Lemma: *Legyen t_1 és t mint fent, \mathfrak{A} egy t típusú, \mathfrak{B} egy t_1 típusú struktúra úgy, hogy \mathfrak{A} és $\mathfrak{B}|t$ elemien ekvivalensek. Ekkor van olyan t_1 típusú \mathfrak{C} struktúra, amibe \mathfrak{B} elemien beágyazható, továbbá $\mathfrak{C}|t$ -be meg \mathfrak{A} elemien beágyazható.*

Bizonyítás Mint az előbb, most is csak azt kell megmutatnunk, hogy $\Delta_{\mathfrak{A}} \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$ konzisztens; itt persze az első esetben t , a másodikban t_1 típusú formulákat (plusz extra konstansjeleket) használunk. A bizonyítás ugyanúgy megy mint az előbb, csak most \mathfrak{B} -ben lesz igaz egy t típusú $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \neg\varphi(x_1, \dots, x_k)$ alakú formula, ami a $\mathfrak{B}|t$ és \mathfrak{A} elemi ekvivalenciája miatt \mathfrak{A} -ban is igaz, ellentmondásban az $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$ feltétellel. QED

2. Lemma: *Tegyük fel, hogy \mathfrak{A} egy t_1 típusú, \mathfrak{B} egy t_2 típusú struktúra, \mathfrak{A} alaphalmazának része \mathfrak{B} alaphalmazának, és $\mathfrak{A}|t$ elemi része $\mathfrak{B}|t$ -nek. Ekkor van olyan t_1 típusú \mathfrak{C} struktúra, hogy $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ és $\mathfrak{B}|t \prec \mathfrak{C}|t$.*

Bizonyítás Legyen Γ az \mathfrak{A} t_1 típusú teljes diagrammja, Δ a \mathfrak{B} t típusú teljes diagrammja, úgy érve, hogy miven $A \subseteq B$, Δ -ban az A -beli elemeket ugyanazok a konstansjelek jelölik, mint a Γ -ban. A lemma állításához megint csak annyit kell bizonyítanunk, hogy $\Gamma \cup \Delta$ konzisztens, hiszen ennek egy modelljébe a megfelelő beágyazások megtehetőek.

Tegyük fel tehát, hogy $\Gamma \cup \Delta$ nem konzisztens, akkor megint feltehető hogy egy-egy Γ illetve Δ -beli formulával van gond. A Γ -beli formula $\varphi(\vec{a})$ alakú, ahol φ t_1 típusú, \vec{a}

pedig A -beli elemeket jelölő konstansok. A Δ -beli formula pedig $\psi(\vec{a}, \vec{b})$, ahol ψ t típusú, \vec{a} ugyanazokat az A -beli elemeket jelölő konstansjelek, \vec{b} pedig B -beli elemeket jelölő konstansjelek. (Az \vec{a} -kat a két helyen előforduló konstansjelek közös uniójával helyettesíthetjük, ezért feltehető hogy ugyanazok a konstansjelek vannak mindkétyszer.) Mivel ez a két formula nem konzisztens, azért

$$\varphi(\vec{a}) \models \neg\psi(\vec{a}, \vec{b}),$$

vagy mivel \vec{b} nem fordul elő a bal oldalon, azért

$$\varphi(\vec{a}) \models \forall \vec{y} \neg\psi(\vec{a}, \vec{y}).$$

Namost a bal oldali formula igaz az \mathfrak{A} struktúrában, tehát a jobb oldali is. A jobb oldali formula t típusú, $\mathfrak{A}|t$ elemi része $\mathfrak{B}|t$ -nek, következésképp

$$\mathfrak{B} \models \forall \vec{y} \neg\psi(\vec{a}, \vec{y}),$$

ellentétben azzal, hogy $\mathfrak{B} \models \psi(\vec{a}, \vec{b})$. QED

Tétel: Tegyük fel, hogy \mathfrak{A} egy t_1 típusú, \mathfrak{B} egy t_2 típusú struktúra úgy, hogy $\mathfrak{A}|t$ és $\mathfrak{B}|t$ elemien ekvivalensek. Ekkor van egy $t_1 \cup t_2$ típusú \mathfrak{C} struktúra, hogy $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}|t_1$ valamint $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}|t_2$.

Bizonyítás Definiáljuk a t_1 típusú \mathfrak{A}_i és t_2 \mathfrak{B}_i struktúrák elemien növvő láncát úgy, hogy $\mathfrak{A}_i|t \prec \mathfrak{B}_i|t \prec \mathfrak{A}_{i+1}|t$ is legyen, továbbá \mathfrak{A} elemien beágyazható \mathfrak{A}_1 -be, \mathfrak{B} pedig \mathfrak{B}_1 -be. Ha ez sikerül, akkor készen vagyunk, ugyanis az \mathfrak{A}_i struktúrák uniója elemi bővítése \mathfrak{A} -nak, a \mathfrak{B}_i uniója elemi bővítése \mathfrak{B} -nek, ez a két unió alaphalmazok ugyanaz (a kölcsönös tartalmazás miatt) és a közös t típusban a két unió megegyezik, tehát az unió egyúttal egy $t_1 \cup t_2$ típusú struktúra is.

Ezek után az 1. Lemma szerint választjuk \mathfrak{A}_1 -et: \mathfrak{A} elemien beágyazható \mathfrak{A}_1 -be, $\mathfrak{B}|t$ pedig izomorf \mathfrak{A}_1 egy részstruktúrájával, ami t -elemi része \mathfrak{A}_1 -nek. Erre a részstruktúrára ráhúzzuk \mathfrak{B} maradék részét, az lesz \mathfrak{B}_1 (ami izomorf lesz \mathfrak{B} -vel). Ezek \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{B}_1 megvan, most a 2. Lemma szerint választjuk \mathfrak{A}_2 -t. \mathfrak{B}_1 és \mathfrak{A}_2 -höz ugyancsak a 2. Lemma szerint \mathfrak{B}_2 -t, stb. A feltételek teljesülnek, a tételt bizonyítottuk. QED

Robinson konzisztencia tétele: Legyen $\Gamma_1 \subset F(t_1)$ és $\Gamma_2 \subset F(t_2)$ két formulahalmaz. Tegyük fel, hogy nincs olyan zárt t típusú φ formula, hogy $\Gamma_1 \models \varphi$ valamint $\Gamma_2 \models \neg\varphi$. Ekkor $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ konzisztens (azaz van modellje).

Bizonyítás Feltehetjük, hogy minden zárt $\varphi \in F(t)$ formulára mind Γ_1 mind Γ_2 vagy φ -t vagy $\neg\varphi$ -t tartalmazza. Valóban, ez következik a Zorn lemmából és abból, hogy ha (Γ_1, Γ_2) megfelelő, akkor vagy $(\Gamma_1 \cup \{\varphi\}, \Gamma_2)$ vagy $(\Gamma_1 \cup \{\neg\varphi\}, \Gamma_2)$ megfelelő. Valóban, ha ez utóbbi egyike sem volna jó, amit a ψ_1 és ψ_2 formula mutat, akkor a

$$(\varphi \rightarrow \psi_1) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi_2)$$

formula mutatja, hogy a (Γ_1, Γ_2) sem jó.

Legyen \mathfrak{A} és \mathfrak{B} a Γ_1 illetve Γ_2 egy-egy modellje. Mivel tetszőleges zárt t típusú formula a két formulahalmazban egyszerre van benn, azért ez a két modell t típusú redukuma elemien ekvivalens. Az előző tétel szerint ekkor közös $t_1 \cup t_2$ típusú modellbe beágyazható, ami viszont $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ modellje lesz. QED

Beth interpolációs tétele: *Legyen φ egy t_1 típusú, ψ egy t_2 típusú formula, és tegyük fel, hogy $\varphi \models \psi$. Ekkor van egy olyan ϑ t típusú formula, hogy $\varphi \models \vartheta$ valamint $\vartheta \models \psi$.*

Bizonyítás Ha nincs ilyen ϑ , akkor a $\Gamma_1 = \{\bar{\varphi}\}$, valamint $\Gamma_2 = \{\neg\bar{\psi}\}$ teljesíti a Robinson tétel feltételét (mindkétszer vettük a formula lezártját). Vagyis van olyan modell, ahol $\bar{\varphi}$ és $\neg\bar{\psi}$ egyszerre teljesül, és így nem lehet $\varphi \models \psi$. QED

Rekurzív függvények

Legyen F olyan, természetes számokon értelmezett, természetes számokat felvevő függvény, amit az n helyen a korábban felvett értékeiből definiálunk. Ez a jól ismert halmazelméleti (transzfinit) rekurzívóval való definíció analogja. Azt szeretnénk megmutatni, hogy ha ez a definíció rekurzív módon történik, akkor a definiált függvény is rekurzív lesz.

A kérdés persze hogyan tudjuk megfogalmazni azt, hogy F -et a korábban felvett értékeiből definiáljuk. Erre kiválóan alkalmas a sorozatokat kódoló szám használata.

Definíció: $u = [\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle]$ az a_0, \dots, a_{n-1} sorozat kódja a legkisebb olyan u természetes szám, amire $\text{Len}(u) = n$, és $(u)_i = a_i$ minden $0 \leq i < n$ -re.

Vegyük észre, hogy a sorozat kódja szükségképpen nagyobb mint a sorozat bármelyik eleme, továbbá az üres sorozat kódja éppen 0 (hiszen $\text{Len}(0) = 0$).

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $F(x, \bar{p})$ függvény rekurzív módon lett definiálva, ha van olyan $G(u, \bar{p})$ rekurzív függvény, hogy minden i természetes számra

$$F(i, \bar{p}) = G(u, \bar{p}), \quad \text{ahol} \quad u = [\langle F(0, \bar{p}), \dots, F(i-1, \bar{p}) \rangle].$$

Tétel: Minden rekurzív módon definiált függvény rekurzív.

Bizonyítás Elegendő megmutatnunk, hogy az $U(i, \bar{p}) = [\langle F(0, \bar{p}), \dots, F(i-1, \bar{p}) \rangle]$ függvény lehet primitív rekurzióval definiálni. Világos, hogy $U(0, \bar{p}) = 0$, valamint $U(i+1, \bar{p}) = \text{App}(U(i, \bar{p}), G(U(i, \bar{p})))$, ahol az App függvény az első argumentumként megadott sorozathoz a második argumentumként megadott elemet hozzáfűzi. Ez primitív rekurziós definíció ha App rekurzív függvény. Ez utóbbi pedig az, mivel

$$\text{App}(u, z) = \mu_v \{ \text{Len}(v) = \text{Len}(u) + 1 \wedge (\forall i < \text{Len}(u)) (u)_i = (v)_i \wedge (v)_{\text{Len}(u)} = z \}$$

és a μ_v operáció után álló reláció rekurzív, és minden u -ra z -re található megfelelő v . QED

Tétel: Minden programmal kiszámítható függvény rekurzív.

Bizonyítás Előbb definiálnunk kell, mit jelent a program, és mit jelent az, hogy a program kiszámít egy függvényt. Az egyszerűség most minimális programokat tekintünk. Vannak változók, mondjuk v_1, \dots , ezek mindegyike a program indulásakor nullát tartalmaz. A v_1 -be írjuk be az argumentumot (ahol a függvény értékét ki kell számítani), és az eredményt is ugyanitt várjuk. A programban utasításokat hajtunk végre: ezek lehetnek értékadások, ahol egy változó egy kifejezés értékét kapja; elágazó utasítások, ahol egy feltételtől függően itt vagy ott folytatjuk a program végrehajtását; ugró utasítások, amik megmondják hol kell folytatni, valamint megálló utasítások, amiknél a program megáll.

Induláskor minden változó nullát tartalmaz, kivéve v_1 -et, amibe az argumentum értékét írjuk bele. Amikor a program megáll, a függvény értéke v_1 -ben található. A program *egy függvényt számít ki*, ha minden lehetséges inputra megáll, a függvény értékét pedig a megfelelő rekeszből olvassuk ki.

Ezek után a program minden egyes utasítása elé tegyünk egy *cimkét*. A cimkék különböző természetes számok, és mondjuk a programban 100 változójel szerepel. A futás *állapota* egy természetes számokból álló 101 hosszú sorozat: az első eleme megmondja azt a cimkét, ahol a futás éppen tart, a többiek pedig a változók tartalmát. Definiáljuk (a p programtól függő) $K_p(u)$ függvényt a következőképpen: Ha u egy 101 hosszúságú sorozat kódja és a sorozat első eleme a p egy utasításának a címe, a többi eleme pedig a program változóinak a tartalmát írják le, akkor $v = K_p(u)$ olyan 101 hosszú sorozat kódja, ami a program állapotát egy lépés végrehajtása után leírja (azaz a címke a következőnek végrehajtandó utasítás címkéje, a változójelek tartalma pedig a végrehajtott utasításnak megfelelően változik). Ha viszont u nem ilyen, akkor legyen $K_p(u) = u$.

Az alapvető észrevétel, hogy minden p programra a K_p függvény *rekurzív*, hiszen például véges sok esetszétválasztással definiálható. (Például ha a 13 cimkéjű utasítás a $v_1 = v_2 * v_3$ értékadás, és a következő utasítás címkéje 14, akkor a feltétel ez:

$$(u)_0 = 13 \Rightarrow \mu_v \{ (v)_1 = (u)_2 \cdot (u)_3 \wedge (v)_0 = 14 \wedge (\forall i < 101) (i \geq 2 \rightarrow (v)_i = (u)_i) \}$$

ahol az utolsó rész azt mondja, hogy az első változó kivételével a többi értéke nem változott.)

Hasonlóan az $S_p(i)$ függvény, ami előállítja a program kezdeti állapotát, vagyis annak a sorozatnak a kódját, aminek első eleme az induló utasítás címkéje, a második eleme (az input értéke) éppen i , az összes többi pedig nulla, szintén rekurzív. Az $F_p(i, t)$ függvényt definiáljuk így:

$$F_p(i, 0) = S_p(i), \quad F_p(i, t + 1) = K_p(F_p(i, t)).$$

Mivel ez primitív rekurzió, azért F_p rekurzív függvény. Jól látható, hogy $F_p(i, t)$ megadja a program állapotát a végrehajtás t -edik pillanatában. Tudjuk azt is, hogy a program minden inputra megáll, ezért

$$L_p(i) = \mu_t \{ F_p(i, t) \text{ első eleme megálló utasítás címkéje} \}$$

ugyancsak rekurzív, tehát $F_p(i) = (L_p(i))_1$ előveszi a v_1 változó értékét, vagyis kiszámítja a program futásának eredményét. Ez pedig ugyancsak rekurzív függvény. QED

Parciális rekurzív függvények

A rekurzív függvények definiálásánál megköveteltük, hogy a μ operációt csak akkor alkalmazhatjuk, ha garantálva van az értéke. Egy *parciális függvény* olyan függvény, melynek értelmezési tartománya nem feltétlenül a teljes ω illetve ω^n n változó esetén, hanem ennek egy részhalmaza. Azokat a függvényeket melyek értelmezési tartománya az üres halmaz, de más számú változójuk van, különbözőknek tekintjük.

A *parciális rekurzív függvények* (parc.rek) a parciális függvényeknek a legszűkebb osztálya, ami ugyanazokat az alapfüggvényeket tartalmazza mint a rekurzív függvényekét, zárt a kompozícióra, összeadásra, szorzásra, továbbá a tetszőleges μ operációra.

Itt a kompozíció és a μ operációt pontosabban kell definiálnunk. Például $f(g_1, \dots, g_k)$ értelmezési tartománya azon \bar{x} -ekből áll, ahol a $g_i(\bar{x})$ függvények mindegyike értelmezett, és az így kapott értékekből összeállított helyen az f értelmezett.

A $g(\bar{x}) = \mu_u \{f(\bar{x}, u) = 0\}$ függvény az \bar{x} helyen értelmezve van és értéke i , ha $f(\bar{x}, 0), f(\bar{x}, 1), \dots, f(\bar{x}, i)$ mindegyike értelmezve van, és közülük csak a legutolsó értéke nulla. Ha ilyen i nincs, akkor \bar{x} nincs g értelmezési tartományában.

Parciális függvények értékét, már ha definiálva vannak, ugyancsak ki lehet számítani, éppen ezért volt a gondos definíciónk, hogy a μ operáció ne a legkisebb olyan értéket vegye fel ahol nulla, hanem addig minden helyen értelmezve is legyen.

Például $g(x) = \mu_u \{1 \dot{-} x = 0\}$ az $x = 0$ helyen nincs értelmezve, az össze többi helyen pedig igen (és ott az értéke 0). A $h(x) = g(x + 1)$ ezért például teljes parc.rek függvény. (Persze ez most rekurzív is.)

Mivel parc.rek függvények definíciójakor nincs semmi megkötés a különböző operációk alkalmazására, *minden lehetséges leírás* definiál egy par.rek függvényt, és minden parc.rek függvényhez tartozik egy ilyen leírás. Ezek a leírások azt mondják meg, hogy az alapfüggvényre milyen műveleteket (kompozíció, összeadás, szorzás, μ -operáció) milyen sorrendben alkalmaztunk.

A kígyó saját farkába harap – I

Definiáljuk a parc.rek függvények *kódját* a következőképpen. A $K_<$ függvény kódja $[\langle 0, 2, 0 \rangle]$, az I_i^n projekciófüggvény kódja $[\langle 0, n, 1, i \rangle]$. Ha g egy n -változós és kódja a , továbbá f_1, \dots, f_n mind k -változósak és kódjaik b_1, \dots, b_n akkor a $g(f_1, \dots, f_n)$ kompozíció kódja legyen

$$[\langle 1, k, a, b_1, \dots, b_n \rangle].$$

Az a és b n -változós függvények összegének illetve szorzatának kódja $[\langle 2, n, a, b \rangle]$ illetve $[\langle 3, n, a, b \rangle]$.

Végezetül ha $f(u, \bar{x})$ $n+1$ -változós és kódja a , akkor a $\mu_u \{f(\bar{x}, u)\}$ n -változós függvény kódja $[\langle 4, n, a \rangle]$. (Figyelem, a μ operációt mindig az *utolsó* változóra alkalmazzuk! Ha nem az volna, akkor a projekciófüggvényekkel előbb az utolsó helyre kell tenni.)

Persze a kódból egyértelműen vissza lehet állítani, hogyan is épül fel a függvény. Az sorozat első eleme megmondja, hogy alapfüggvény, kompozíció, szorzás, összeadás vagy μ operációt kell alkalmazni. A második elem megmondja, hány változós az előállított függvény (erre később szükségünk lesz), végül a további elemek megmondják a részleteket.

Természetesen nem minden sorozat lesz egy parc.rek függvény kódja, sőt ami látszólag rendben van, még az sem biztos hogy jó, mert mélyre ásva már valahol hibát találhatunk.

Tétel: *A parc.rek függvények kódjai egy rekurzív relációt alkotnak.*

Bizonyítás Azt, hogy u egy parc.rek függvény kódja, könnyen el tudjuk dönteni, ha már tudjuk az összes u -nál kisebb számról hogy ő parc.rek függvény kódja-e. Ez azért van így, mert egy u elemei mindig kisebbek u -nál. Így például ha u egy sorozat, első eleme 4, hossza éppen 3 (vagyis $u = \lceil \langle 4, n, a \rceil \rceil$), akkor u egy helyes kód, ha $a = (u)_2$ helyes kód, továbbá $(a)_1 = n + 1$ (hiszen ekkor eggyel több változósnak kell lennie). Világos, hogy ez a kiszámítás a korábbi értékekből rekurzív módon történik, tehát a rek.definíciós tétel alapján ez valóban rekurzív reláció. QED

Ugyanannak a par.rek függvénynek persze különböző kódjai is lehetnek, például az $f(x)$ és $f(x) + 0$ felírás máris két különböző kódot ad, de ettől a függvény nem változik.

Definíció: $\varphi_i(x)$ az i kódú parc.rek függvény értéke az x helyen (vagy nincs definiálva, ha a parc.rek függvény nincs itt definiálva) ha i egy egyváltozós parc.rek függvényt kódol, egyébként legyen nulla. A $\varphi_i^n(\bar{x})$ az i kódú n -változós parc.rek függvény értéke az \bar{x} helyen (vagy definiálatlan) ha i egy n -változó parc.rek függvény kódja, egyébként pedig nulla.

Ha f egy (egyváltozós) parc.rek függvény és $f = \varphi_i$, akkor azt mondjuk hogy i az f *indexe*. Az egyenlőséget persze úgy értjük, hogy a két függvény értelmezési tartománya megegyezik.

Tétel: *Van olyan $U(i, x)$ kétváltozós parc.rek függvény, hogy minden i -re és x -re $U(i, x) = \varphi_i(x)$. Általában van olyan $n + 1$ -változós $U^n(i, \bar{x})$ parc.rek függvény, hogy minden i -re és x -re $U^n(i, \bar{x}) = \varphi_i^n(\bar{x})$.*

Bizonyítás Majd az órán.