

## Löwenheim-Skolem tételek

Az alábbi tétel elhangzott az előadáson:

**Felszálló Löwenheim-Skolem tétel:** *Legyen  $\mathfrak{A}$  végtelen struktúra,  $\kappa$  végtelen számosság, akkor van olyan  $U$  ultrafilter  $\kappa$ -n hogy az  ${}^\kappa\mathfrak{A}/U$  ultrahatvány számossága legalább  $\kappa$ .*

Ugyanennek a tételnek még egy bizonyítását adjuk. A bizonyításhoz egy segédtétele van szükség, aminek ugyancsak két különböző bizonyítását adjuk meg.

**Segédétel:** *Minden végtelen struktúrának van valódi elemi bővítése.*

**Bizonyítás** Legyen  $\mathfrak{A}$  egy struktúra és legyen  $\mathfrak{B}$  az  $\mathfrak{A}$ -nak egy ultrahatványa. A  $\mathfrak{B}$  elemei közül nézzük azokat, amiknek létezik olyan vektor reprezentációja, amely vektorban minden koordináta ugyanaz. Definiáljuk az  $f : A \rightarrow B$  beképezést úgy, hogy az  $a \in A$  képe az az ekvivalencia osztály, ami a csupa  $a$  koordinátájú vektort tartalmazza. Állítás: ez egy elemi beágyazás.

Ehhez két dolgot kell bizonyítani: hogy  $f$  izomorfizmus  $\mathfrak{A}$  és a képe között, másrészt hogy  $f$  képe elemi része  $\mathfrak{B}$ -nek.  $f$  izomorfizmus a Loś lemma miatt, mert az egész indexhalmaz benne van  $U$ -ban. Másrészt a kép részstruktúra, hiszen a konstansjelek interpretáltjai benne vannak, és zárt a függvényjelek interpretáltjára is (definíció szerint). Ugyanakkor elemi rész, hiszen az elemi rész definíciója ismét csak a Loś lemma miatt teljesül.

A beágyazás adja ki a teljes ultraszorzatot, ha a) a ultrafilter egy  $\omega$  feletti nem trivi ultrafilter és b) az  $\mathfrak{A}$  struktúra végtelen. Valóban, ha  $a_1, a_2, \dots$  csupa különböző elemei  $A$ -nak ( $A$  végtelen!) akkor ennek a vektornak az ekvivalencia osztálya tetszőleges csupa azonos elemből álló vektorral legfeljebb egy helyen egyezik meg, az egy elemű halmazok pedig nincsenek  $U$ -ban.

**Bizonyítás** (második) Jelöljük meg az  $\mathfrak{A}$  struktúra minden elemét egy konstansjellel, vagyis minden  $a \in A$ -ra vezessük be egy vadonat új  $c_a$  konstansjelet, ami nincs a  $t$  típusban. Adjuk ezeket a konstansjeleket  $t$ -hez és legyen  $\Gamma \subset F(t')$  az a formulahalmaz, ami az összes  $\mathfrak{A}$ -ban igaz (zárt) formulából áll. Ezt egyébként az  $\mathfrak{A}$  struktúra *diagrammjának* nevezik. Most  $\Gamma$  konzisztens, hiszen a kibővített  $\mathfrak{A}$  modellje. Legyen még  $c$  egy vadonatúj konstansjel, és nézzük a következő formulahalmazt:

$$\Delta = \Gamma \cup \{c \neq c_a : a \in A\}.$$

Ha most  $\mathfrak{A}$  végtelen, akkor  $\Delta$  bármely véges részének van modellje:  $c$  interpretáltjának olyan  $A$ -beli elemet választunk, amire nincs  $c_a$  a véges formulahalmazban. Az elsőrendű logika kompaktsági tétele miatt ekkor  $\Delta$ -nak van egy  $\mathfrak{B}$  modellje. Ebben a  $\mathfrak{B}$ -ben nézzük a  $c_a$  konstansjelek interpretáltjait. Ezek persze egy  $\mathfrak{A}$ -val izomorf struktúrát alkotnak (hiszen az, hogy mi igaz véges sok  $c_{a_i}$ -re benne van  $\Gamma$ -ban és ezért teljesül  $\mathfrak{B}$ -ben is). Az pedig, hogy ez elemi része  $\mathfrak{B}$ -nek közvetlenül ellenőrizhető az elemi rész definíciója alapján. Ha  $e$  olyan értékelés, ami minden változójelhez egy  $\mathfrak{A}$ -beli elemhez tartozó  $c_a$  konstansjel interpretáltját rendeli, akkor a helyettesítési lemma miatt  $\mathfrak{B} \models \varphi[e]$  pontosan akkor, amikor  $\mathfrak{B} \models \varphi(x/c_{a_i})$ . Ez utóbbi formula zárt, ezért vagy ő vagy a tagadása benne van  $\Gamma$ -ban, tehát ugyanúgy igaz  $\mathfrak{A}$ -ban (és ekkor az izomorfizmus miatt  $\mathfrak{A}$  képében is).

Viszont a  $\mathfrak{B}$  struktúrában a  $c$  konstansjel interpretáltja nincs az  $\mathfrak{A}$  képében, ezért  $\mathfrak{B}$  valódi elemi bővítés. QED

**Bizonyítás** (második bizonyítás a felszálló L-S tételre) Legyen  $\mathfrak{A}$  egy végtelen struktúra és legyen  $\kappa$  egy számosság. Definiáljuk az  $\mathfrak{A}_\alpha$  elemi láncot a következőképpen.  $\mathfrak{A}_{\alpha+1}$  legyen *valódi* elemi bővítése  $\mathfrak{A}_\alpha$ -nak (az előbbi segédtétel alapján). Ha  $\alpha$  limesz, akkor legyen  $\mathfrak{A}_\alpha = \bigcup\{\mathfrak{A}_\beta : \beta < \alpha\}$ . Mivel növe elemi lánc uniója elemi bővítés, azért a teljes  $\mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa$  sorozat is egy növe elemi lánc lesz. Legyen  $\mathfrak{B}$  ennek uniója. Ekkor  $\mathfrak{B}$  elemi bővítése  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$ -nak, és így elemien ekvivalens is vele. Ugyanakkor  $\mathfrak{B}$  számosságára

$$B = \bigcup\{A_\alpha\} = A_0 \cup \bigcup\{A_{\alpha+1} - A_\alpha : \alpha < \kappa\}$$

és az utóbbi nagy unió  $\kappa$  darab nem üres halmaz uniója, tehát az egész halmaz számossága is legalább  $\kappa$ . QED

**Leszálló Löwenheim-Skolem tétel:** *Legyen  $\mathfrak{A}$  egy struktúra,  $X \subseteq A$ . Ekkor van olyan  $\mathfrak{B}$  elemi része  $\mathfrak{A}$ -nak, hogy  $X \subseteq B$  és  $|B| = |X| \cdot |t| \cdot \omega$ .*

**Bizonyítás** Használjuk a Tarski-Vaught kritériumot arra, hogy mikor lesz egy részstruktúra elemi rész is: nevezetesen ha egy  $\exists x \varphi$  formula valamilyen kisebb struktúra feletti értékelésnél igaz  $\mathfrak{A}$ -ban, akkor van megfelelő  $x$  a kisebb struktúrában is.

Legyen ennek megfelelően  $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$  egy formula, ahol az egyik változójelet kitüntettünk (ez az  $x$ ), és a formula összes szabad változója szerepel. Definiáljuk az  $f_\varphi(a_1, \dots, a_n)$   $n$ -változós függvényt a következőképpen. Minden  $a_1, \dots, a_n \in A$ -ra nézzük meg, hogy a  $\mathfrak{A}$ -ban igaz-e a  $\exists x \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$  formula. (Ez utóbbi teljesen hibás jelölés azt akarja jelenteni, hogy olyan értékelést nézünk, aminél  $y_1$  értéke  $a_1$ , stb,  $y_n$  értéke  $a_n$ .) Ha igaz, vagyis van olyan eleme  $A$ -nak amivel  $\mathfrak{A} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)$  akkor legyen az  $f_\varphi(a_1, \dots, a_n)$  értéke az egyik ilyen  $a$ . Ha nincs, akkor pedig legyen a függvény értéke akármilyen.

Az  $f_\varphi$  függvényeket természetesen nem feltétlenül vannak egyértelműen meghatározva, de a lehetséges függvények közül rögzítünk egyet. Ezeket a függvényeket *Skolem-függvényeknek* szokás nevezni.

Legyen most  $X_0 = X$ , és ha  $X_i$  már megvan  $i \in \omega$ -ra, akkor legyen  $X_{i+1} = X_i \cup \{ \text{az } X_i \text{ lezártja az összes Skolem-függvényre} \}$ . Skolem függvényből annyi van, ahány formulánk van, ezek száma viszont éppen  $|t| \cdot \omega$ . Ezért  $X_i$  lezártja a Skolem függvényekre pontosan  $|X_i| \cdot |t| \cdot \omega$  lesz. Legyen  $B = \bigcup\{X_i : i \in \omega\}$ , akkor  $B$  számossága valóban  $|X| \cdot |t| \cdot \omega$ , ahogyan kívántuk.

Már csak azt kell látnunk, hogy  $\mathfrak{B}$  elemi része  $\mathfrak{A}$ -nak. Ehhez először az kell hogy  $B$  egy részstruktúra alaphalmaza. Először is a konstansjelek interpretáltjai  $B$ -ben (egészen pontosan  $X_1$ -ben) vannak, hiszen a  $\exists x (x = c)$  formulához tartozó Skolem függvény értéke pontosan a  $c$  konstansjel interpretáltja. Hasonlóan  $B$  zárt a függvényjelek interpretáltjaira, hiszen zárt a  $\exists x (x = f(y_1, \dots, y_n))$  formulához tartozó Skolem-függvényre.

Az elemi résziség pedig következik abból, hogy  $B$ -re a Tarski-Vaught kritérium teljesül – ezt éppen az biztosítja, hogy  $B$  zárt az összes Skolem függvényre. QED

**Kövekezmény:** Legyen  $\Gamma$  egy  $t$  típusú formulahalmaz. Ha  $\Gamma$ -nak van végtelen modellje, akkor minden  $\kappa \geq |t| \cdot \omega$ -ra van  $\kappa$  számosságú modellje is.

**Következmény:** (Skolem paradoxon) Ha egy legfeljebb megszámlálható nyelven felírt halmaznak van végtelen modellje, akkor van megszámlálható modellje is.

Például ha a halmazelmélet axiómarendszerének van modellje, akkor az persze végtelen kell legyen, és ekkor van megszámlálható modellje is. Viszont a halmazelméletben bizonyítottuk, hogy vannak nem megszámlálható halmazok is. Hogyan férnek el ezek a halmazok egy megszámlálható struktúrában?

### Axiomatizálható struktúraosztályok

Ebben a részben bizonyítjuk egy nagyon jól használható jellemzését az axiomatizálható struktúraosztályoknak. Ennek segítségével könnyedén tudjuk megmutatni egy sor osztályról hogy nem axiomatizálható.

**Tétel:** (Kiesler tétele) A  $\mathcal{K}$  struktúraosztály akkor és csak akkor axiomatizálható, ha

- zárt az elemi ekvivalenciára (azaz ha  $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$  és  $\mathfrak{A}$  és  $\mathfrak{B}$  elemien ekvivalensek, akkor  $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ ),
- zárt az ultraszorzatra.

**Bizonyítás** Világos, hogy az axiomatizálható struktúraosztályok rendelkeznek ezekkel a tulajdonságokkal. A b) például azonnal következik a Loś lemmából. Úgy hogy csak az állítás nehezebbik részével foglalkozunk.

Legyen tehát  $\mathcal{K}$  olyan (azonos  $t$  típusú struktúrákból álló) struktúraosztály, amire a) és b) fennáll, álljon továbbá  $\Gamma$  az össze olyan  $t$  típusú formulából, amely az összes  $\mathcal{K}$ -beli struktúrán igaz. Állítjuk, hogy  $\Gamma$  axiomatizálja  $\mathcal{K}$ -t. Először is,  $\mathcal{K}$  minden elemén  $\Gamma$  igaz. Legyen most  $\mathfrak{A}$  olyan struktúra, ahol  $\Gamma$  minden eleme igaz, meg kell mutatnunk, hogy  $\mathfrak{A}$  eleme  $\mathcal{K}$ -nak. Legyen  $\Delta$  az összes  $\mathfrak{A}$ -ban igaz  $t$  típusú formula és legyen  $i$  egy véges része  $\Delta$ -nak. Állítjuk, hogy van olyan  $A_i \in \mathcal{K}$  amire  $\mathfrak{A}_i \models i$ . Valóban, ha ez nem így volna, akkor tekintve az  $i$ -beli formulák lezártjainak a konjunkcióját (és-sel kötjük össze őket), az így kapott  $i'$  formula  $\mathcal{K}$  minden elemében hamis, tehát  $\neg i'$  mindenütt igaz, ezért benne van  $\Gamma$ -ban és ezért igaz  $\mathfrak{A}$ -ban is:  $\mathfrak{A} \models \neg i'$  ellentétben azzal, hogy  $\mathfrak{A} \models i$ .

A b) feltétel szerint az  $A_i$  struktúrák  $\prod \mathfrak{A}_i / U$  ultraszorzata is  $\mathcal{K}$ -beli; megmutatjuk hogy  $U$ -t ügyesen választva  $\mathfrak{A}$  és az ultraszorzat elemien ekvivalens. Ekkor a) szerint  $\mathfrak{A}$  is  $\mathcal{K}$ -ban van, ahogyan kívántuk. Ahhoz, hogy az ultraszorzat  $\mathfrak{A}$ -val elemien ekvivalens legyen csak az kell, hogy az ultraszorzatban  $\Delta$  minden eleme igaz legyen, hiszen minden zárt formulára vagy ő vagy a tagadása  $\Delta$ -beli. Legyen ezek után  $\varphi \in \Delta$ -ra szokás szerint

$$I_\varphi = \{i \in I : \varphi \in i\}.$$

Ezek az  $I$  indexhalmazban egy centrált rendszert alkotnak, tehát kiterjeszthető egy  $U$  ultrafilterré. Mivel  $\varphi \in i$  esetén  $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ , azért minden  $\varphi \in \Delta$ -ra azok az  $i$  indexek,

ahol  $\mathfrak{A}_i$ -ben igaz  $\varphi$  benne vannak az ultrafilterben, és így a szorzatban  $\varphi$  is igaz, ahogyan kívántuk. QED

**Tétel:** *A  $\mathcal{K}$  struktúraosztály akkor és csak akkor axiomatizálható végesen ha*

- a) *zárt az elemi ekvivalenciára,*
- b) *zárt az ultraszorzatra,*
- c) *a komplementere is zárt az ultraszorzatra.*

**Bizonyítás** Világos, hogy ha  $\mathcal{K}$  végesen axiomatizálható, akkor ő is és a komplementere is axiomatizálható (hiszen ekkor *egyetlen zárt formula* is axiomatizálja). Ezért az előző tétel alapján ilyenkor az a)–c) feltételek mindegyike teljesül.

Fordítva, tegyük fel hogy  $\mathcal{K}$ -ra a)–c) igaz. Ekkor Kiesler tétele szerint axiomatizálható, mondjuk a  $\Gamma$  formulahalmaz axiomatizálja. Ha most  $\Gamma$  egyetlen véges része sem volna megfelelő, akkor minden ilyen  $i$  véges részre van ellenpélda, vagyis  $\mathfrak{A}_i \notin \mathcal{K}$  amire  $\mathfrak{A}_i \models i$ . (Ugyanis fordítva nem lehet:  $\Gamma$  minden eleme igaz  $\mathcal{K}$  minden elemében.) Ekkor viszont ugyanazt a trükköt használva mint előbb, van olyan  $\prod \mathfrak{A}_i/U$  ultraszorzat, amiben  $\Gamma$  minden eleme igaz. Az ultraszorzat c) miatt nincs  $\mathcal{K}$ -ban, ami ellentmondás. QED

## Példák

Csak néhány példa, a többi a feladatok között található.

**Példa:** *Jólrendezett halmazok osztálya nem axiomatizálható.*

**Bizonyítás** Ez az osztály még csak nem is zárt az elemi ekvivalenciára.  $\omega$  a szokásos rendezéssel jólrendezett, legyen ez  $\mathfrak{A}$ . Nézzük az  ${}^\omega\mathfrak{A}/U$  ultrahatványt, ahol  $U$  nem trivi ultrafilter  $\omega$ -n. Az ultrahatvány persze diszkrét rendezés (Loś lemma), benne az azonosan nulla vektor ekvivalenciosztálya a legkisebb. Az ettől nagyobb elemek között az azonosan 1 ekvivalencia osztálya a legkisebb, stb. Az ultrahatványban van olyan elem, amely ezek mindegyikétől nagyobb: annak ekvivalencia osztálya, melyben az  $i$ -edik elem éppen  $i$ . Most nézzük azt az első  $\omega$  elem komplementerét: ezek között nincs legkisebb (és így a rendezés sem lehet jólrendezés). Valóban, ha  $a = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$  ekvivalencia osztálya nagyobb  $\langle i, i, \dots \rangle$  ekvivalencia osztályánál minden  $i$ -re az azt jelenti, hogy

$$\{j \in \omega : a_j > i\} \in U.$$

De ekkor  $a' = \langle a_1 \div 1, a_2 \div 1, \dots \rangle$   $U$ -beli sok helyen kisebb  $a$  megfelelő indexű eleménél, tehát  $a'$  kisebb  $a$ -nál, ugyanakkor  $a'$  is nagyobb az  $\langle i, i, \dots \rangle$  ekvivalencia osztályánál minden  $i$ -re.

**Példa:** *Összefüggő gráfok osztálya nem axiomatizálható.*

**Bizonyítás** Mint az előbb, ez az osztály sem zárt az elemi ekvivalenciára. Vegyük a mindkét irányban végtelen utat. Ennek egy nem-trivi  $\omega$ -dik ultrahatványa kontinuum számosságú, másrészt a Loś lemma miatt minden pont foka pontosan kettő, tehát (mindkét irányban végtelen) utak diszjunkt uniója. Ezért nem lehet összefüggő. QED

**Példa:** *Torziómentes Abel csoportok halmaza nem axiomatizálható végesen*

**Bizonyítás** Az osztály axiomatizálható, hiszen csak azt kell felírni, hogy ha egy elem  $n$ -szerese nulla, akkor az elem nulla minden  $n > 0$ -ra. Végesen nem axiomatizálható mivel a komplementer nem zárt az ultraszorzatra. Nézzük a prímrendű ciklikus csoportokat, és ezek egy nem trivi ultraszorzatát. Ekkor ha a szorzatban egy elem  $n$ -szerese nulla, akkor véges sok koordináta kivételével minden koordinátában nullának kell állnia (a kivételek az  $n$  osztói). Ezért a szorzat torziómentes. QED

**Példa:** *Torziócsoportok osztálya nem axiomatizálható.*

**Bizonyítás** Az előbbi konstrukcióban  $C_p$  ultraszorzata torziómentes, míg  $C_p$  torziócsoport. Lehet adni olyan torziócsoportot is, aminek egy ultrahatványa tartalmaz végtelen rendű elemet, ezért a torziócsoportok osztálya nem zárt az elemi ekvivalenciára sem. QED

**Példa:** *Nulladrendű testek osztálya nem végesen axiomatizálható*

**Bizonyítás** Az osztály axiomatizálható mivel csak azt kell felírni, hogy az 1-et  $p$ -szer összeadva sohasem kapunk nullát. Viszont végesen nem axiomatizálható, mivel az  $F_p$  testeket különböző  $p$ -kre ultraszorozva nulladrendű testet kapunk. QED

## Rekurzív függvények

Láttuk, hogy az alábbi függvények rekurzívak:  $1 \dot{-} x$ ,  $x \dot{-} y$ , valamint hogy az alábbi relációk mind rekurzívak:  $x = y$ ,  $x < y$ ,  $x \leq y$ ,  $x \neq y$ , stb. Továbbá a következő metatételt is igazoltuk.

**Tétel:** *Tegyük fel, hogy  $R(x, y_1, \dots, y, n)$  rekurzív reláció, továbbá minden  $y_1, \dots, y_n$ -re létezik  $x$ , amivel  $R(x, y_1, \dots, y, n)$  igaz. Ekkor a*

$$\mu\{x : R(x, y_1, \dots, y, n)\} = \min\{x \in \omega : R(x, y_1, \dots, y, n) \text{ igaz}\}$$

*ugyancsak rekurzív függvény.*

**Tétel:** *Tegyük fel, hogy  $R_1(\vec{x}), \dots, R_k(\vec{x})$  rekurzív relációk,  $f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x}), f_{k+1}(\vec{x})$  rekurzív függvények. Ekkor az esetszétválasztással definiált*

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}) & \text{if } R_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) & \text{if not } R_1(\vec{x}) \text{ but } R_2(\vec{x}) \\ \dots & \\ f_k(\vec{x}) & \text{if none of } R_1(\vec{x}), \dots, R_{k-1}(\vec{x}) \text{ but } R_k(\vec{x}) \\ f_{k+1}(\vec{x}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

*szintén rekurzív.*

**Bizonyítás** Tudjuk hogy az rekurzív relációk tagadása, metszete, uniója is rekurzív, továbbá  $f(\vec{x})$  így is felírható:

$$f_1(\vec{x}) \cdot \chi_{R_1}(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) \cdot \chi_{\neg R_1 \wedge R_2}(\vec{x}) + \dots + f_{k+1}(\vec{x}) \cdot \chi_{\neg R_1 \wedge \dots \wedge \neg R_k}(\vec{x}).$$

Innen az állítás már következik. QED

**Tétel:** Az alábbi függvények rekurzívok:  $[\sqrt{x}]$ ,  $\text{rem}(x, y)$ ,  $\pi(x, y) = (x + y + 1)^2 + x$ .

Szokás szerint  $\text{rem}(x, y) = x \dot{-} y \cdot [x/y]$ , és  $\text{rem}(x, 0) = x$ . A  $\pi$  függvényt *párzó függvénynek* fogjuk hívni. Erre ha  $\pi(x, y) = \pi(x', y')$  akkor  $x = x'$  és  $y = y'$ , azaz rekurzív módon beképezi  $\omega \times \omega$ -t  $\omega$ -ba.

**Bizonyítás** Például  $[x/y] = \min\{z \in \omega : y = 0 \text{ or } y(x + 1) > x\}$ . Mivel a zárójelben rekurzív reláció áll, ez rekurzív függvény.

**Tétel:** Van olyan rekurzív  $K(u)$  és  $L(u)$  függvény, amire  $u = \pi(K(u), L(u))$ .

**Bizonyítás** Ezek megfelelőek, és rekurzívok:  $K(u) = u \dot{-} [\sqrt{u}]$ ,  $L(u) = [\sqrt{u}] \dot{-} K(u) \dot{-} 1$ . QED

**Tétel:**  $f(x, y)$  akkor és csak akkor rekurzív, ha  $g(u) = f(K(u), L(u))$  rekurzív.

**Bizonyítás** Egyszerű következménye az eddigi definícióknak. QED

Az alábbi függvény a híres Gödel-féle beta függvény:

$$\beta(m, b, i) = \text{rem}(m, (i + 1)b + 1).$$

**Tétel:** Minden  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  természetes számokból álló sorozathoz léteznek olyan  $m$  és  $b$  számok, hogy  $\beta(m, b, i) = a_i$  minden  $0 \leq i < n$ -re.

**Bizonyítás** Válasszuk meg a  $b$ -t úgy, hogy  $b+1, 2b+1, \dots, nb+1$  legyenek páronként relatív prímek, továbbá mindegyik legyen nagyobb az összes  $a_i$ -nél. Ez persze megy, például ha  $b$  osztható  $n!$ -sal, akkor ezek páronként relatív prímek. Ezért a kínai maradék tétel miatt az

$$m \equiv a_i \pmod{(i + 1)b + 1}$$

kongruenciarendszer megoldható  $m$ -re. Mivel a modulus nagyobb  $a_i$ -nél, azért a maradék éppen  $a_i$  lesz. QED

Rekurzív relációkra *korlátos kvantort* alkalmazva továbbra is rekurzív relációt kapunk. Legyen  $R(u, \vec{x})$  egy rekurzív reláció,  $f(\vec{x})$  meg egy rekurzív függvény. Ekkor

$$\exists u < f(\vec{x}) R(u, \vec{x})$$

illetve

$$\forall u < f(\vec{x}) R(u, \vec{x})$$

ugyancsak rekurzív relációk. Például az első pontosan akkor igaz, ha a rekurzív

$$\mu_u\{u \geq f(\vec{x}) \vee R(u, \vec{x})\}$$

függvény értéke *kisebb*  $f(\vec{x})$ -nél.

Definiáljuk a  $\text{Len}(u)$  egyváltozós valamint  $(u)_i$  kétváltozós függvényeket a következőképpen:

$$\begin{aligned}\text{Len}(u) &= \beta(K(u), L(u), 0) \\ (u)_i &= \beta(K(u), L(u), i + 1).\end{aligned}$$

Ekkor minden  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sorozathoz található olyan  $u \in \omega$ , hogy  $\text{Len}(u) = n$  és  $(u)_i = a_i$  valahányszor  $i < \text{Len}(u)$ . Erről az  $u$ -ról azt mondjuk, hogy az  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sorozatot *kódolja*. Természetesen mindkét függvény rekurzív. E függvények definíciójuk alapján a következő fontos tulajdonsággal rendelkeznek (tessék ellenőrizni!):

**Tétel:** *Ha  $i < \text{Len}(u)$ , akkor  $(u)_i < u$ .*

Az  $u$  természetes számról azt mondjuk, hogy *sorozatszám*, ha az általa kódolt sorozatot egyetlen nála kisebb szám sem kódolja, vagyis ha rá az alábbi rekurzív feltétel teljesül:

$$\forall v < u \left( \text{Len}(v) \neq \text{Len}(u) \vee \exists i < \text{Len}(u) \left( (u)_i \neq (v)_i \right) \right).$$

**Tétel:**  *$f(n) = 2^n$  rekurzív függvény.*

**Bizonyítás** A bizonyítás módszere, amit számtalanszor fogunk alkalmazni, a következő. Vagyuk azt a függvényt, ami az  $n$ -hez az  $\langle f(0), f(1), \dots, f(n) \rangle$  sorozat kódját rendeli hozzá, és mutasuk meg, hogy ez a függvény rekurzív. Ha ez megvan, akkor a fenti  $(u)_i$  kétváltozós rekurzív függvénnyel már magát az  $f$ -et is elő tudjuk állítani.

Szóval hogyan állítsuk elő ennek a sorozatnak a kódját. Ez az  $u$  a *legkisebb* olyan sorozatszám, melynek elemei teljesítik a kettőhatványok rekurzív összefüggését, vagyis amire

$$\text{Len}(u) > n \wedge (u)_0 = 1 \wedge (\forall i < \text{Len}(u) \div 1) \left( (u)_{i+1} = 2 \cdot (u)_i \right).$$

Mivel minden  $n$ -re ilyen  $u$  létezik, az az  $F$  függvény, ami  $n$ -hez a legkisebb ilyen  $u$ -t rendeli a  $\mu$  operáció egy alkalmazása, tehát rekurzív függvény. Végül  $F(n)$  utolsó elemének értéke éppen  $2^n$ , vagyis az  $(F(n))_n = 2^n$  összetett függvény is rekurzív. QED

**Tétel:** *Legyenek  $G(x, \vec{y})$  valamint  $F(\vec{y})$  rekurzív függvények. Az  $F$ -ből és  $G$ -ből primitív rekurzióval kapható  $f$  függvény a következő:*

$$\begin{aligned}f(0, \vec{y}) &= F(\vec{y}) \\ f(n + 1, \vec{y}) &= G(f(n, \vec{y}), \vec{y}).\end{aligned}$$

*Természetesen  $f$  egyértelműen meg van határozva; ez az  $f$  rekurzív.*

**Bizonyítás** A bizonyítás az előbbinek mása. Tekintsük azt a függvényt, ami  $n$ -hez hozzárendeli az  $f(0), \dots, f(n)$  ( $n + 1$  hosszú) sorozat kódját. Ez az  $u$  kód a minimális olyan természetes szám, ami teljesíti az alábbi rekurzív definíciót:

$$\text{Len}(u) > n \wedge (u)_0 = F(\vec{y}) \wedge (\forall i < \text{Len}(u) \div 1) \left( (u)_{i+1} = G((u)_i, \vec{y}), \vec{y} \right)$$

tehát az a  $H$  függvény, ami az  $(n, \vec{y})$ -hoz hozzárendeli a minimális ilyen  $u$ -t, rekurzív. Ekkor viszont  $f(n, \vec{y}) = (H(n, \vec{y}))_n$  szintén rekurzív. QED