Gödel II. nemteljességi tétele

1. Fixpont tétel: Legyen Γ olyan, hogy abban minden rekurzív függvény reprezentálható. Ekkor minden $\chi(x)$ egyváltozós formulához van olyan Ψ (szabad váltózó nélküli formula) fixpont, amivel

$$\Gamma \mid\!- \Psi \leftrightarrow \chi(\lceil \Psi \rceil).$$

(Lásd a logika jegyzetben.)

2. Legyen Γ olyan, hogy abban minden rekurzív függény reprezentálható. Legyen még Δ egy rekurzív elmélet; Az, hogy "u egy Δ-beli levezetése i-nek" egy rekurzív reláció, legyen ennek egy Γ-beli reprezentánsa $\mathrm{Prov}_\Delta(u,i)$, továbbá legyen Pr_Δ az alábbi módon definiált egyváltozós formulája Γ-nak:

$$\mathrm{Pr}_\Delta(i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exists u\, \mathrm{Prov}_\Delta(u,i). \tag{1}$$

Az, hogy a Δ konzisztens azt jelenti, hogy nem vezethető le belőle a hamis, legyen tehát

$$\mathrm{Con}_\Delta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \neg \mathrm{Pr}_\Delta(\lceil \mathbf{hamis} \rceil). \tag{2}$$

Itt "**hamis**" az azonosan hamis formulát jelöli, ennek a Gödel számát kell vennünk a Γ-beli reprezentációnál választott kódolásnál.

Tétel (Rosser) *Tegyük fel, hogy* Γ *rekurzív és* Γ*-ban minden rekurzív függvény reprezentálható. Ekkor van a* Γ*-ból való levezethetőségnek olyan* Prov^*_Γ *reprezentáló formulája, hogy az ebből* (1) *és* (2) *alapján definiált* Con^*_Δ *formulára*

$$\Gamma \mid\!- \mathrm{Con}^*_\Delta.$$

Bizonyítás Ha Γ ellentmondásos, akkor ez persze így van, és semmit nem kell bizonyítanunk. Feltehetjük tehát, hogy Γ ellentmondástalan, vagyis belőle nem vezethető le egyszerre egy formula és a tagadása is. Legyen $n(x)$ az x kódú formula lezártjának majd negáltjának a Gödel-száma, mivel ez rekurzív függvény azért reprezentálható, úgy képzeljük hogy az n relációjel éppen őt reprezentálja (ezt az adódó formula egyszerűbb felírhatósága miatt tesszük, egyébként nyugodtan be lehetne írni a megfelelő definíciót a formulába). Legyen Prov_Γ a levezethetőség egy reprezentáló formlája, és legyen

$$\Psi(u,i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Prov}_\Gamma(u,i) \wedge \forall v (v \le u \to \neg \mathrm{Prov}_\Gamma(v, n(i)))$$

Állítjuk, hogy Ψ és Prov_Γ ugyanazt a relációt reprezentálája, ami világos abból, hogy Γ-ból nem lehet egyszerre levezetni egy formulát és a tagadását. Ez lesz a megfelelő Prov^*_Γ. Ugyanis $n(\lceil \mathbf{hamis} \rceil) = \lceil \mathbf{igaz} \rceil$ és $\Gamma \mid\!- \mathbf{igaz}$ miatt van ennek a levezetésnek Gödel-száma, vagyis olyan N sztenderd természetes szám, hogy az N-nek megfelelő $k(N)$ kifejezéssel

$$\Gamma \mid\!- \Psi(k(N), \lceil \mathbf{igaz} \rceil),$$

és persze ugyanerre az N-re

$$\Gamma \mid\!\!- \mathrm{Prov}_\Gamma(k(N), \ulcorner \mathbf{igaz} \urcorner)$$

is fennáll. Ha most Γ egy tetszőleges $\mathfrak{A}$ modelljében volna olyan u elem, amire a tétel állításával ellentétben $\mathfrak{A} \models \Psi(u, \ulcorner \mathbf{hamis} \urcorner)$ akkor Ψ definíciója szerint

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{Prov}_\Gamma(u, \ulcorner \mathbf{hamis} \urcorner) \wedge \forall v (v \leq u \rightarrow \neg \mathrm{Prov}_\Gamma(v, \ulcorner \mathbf{igaz} \urcorner)$$

és így erre az u-ra speciálisan $\mathfrak{A} \models \neg(k(N) \leq u)$ is fennáll. Viszont a reprezentálhatóság miatt ez csak akkor fordulhat elő, ha u egy N-nél kisebb N' természetes számhoz rendelt kifejezés értéke, vagyis valamilyen $N' < N$ természetes számra

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{Prov}_\Gamma(k(N'), \ulcorner \mathbf{hamis} \urcorner).$$

A Prov_Γ a levezethetőség egy Γ-beli reprezentációja volt, ezért az N' szükségképpen egy valódi levezethetés kódja, és így Γ-ból levezethető a hamis, ellentétben feltételezésünkkel. QED

Gödel II nem-teljességi tétele az mondja ki, hogy a levezethetőséget reprezentáló formulára tett bizonyos "természetességi" feltételezések mellett ennek éppen az ellenkezője igaz, vagyis Γ-ból Con_Γ nem vezethető le. A Γ indexet az alábbiakban lehagyjuk a könnyebb olvashatóság kedvéért.

Tétel (Gödel II nem-teljességi tétele) *Tegyük fel hogy a Γ formulahalmazban a $\mathrm{Pr}(x)$ formula a levezethetőség definíciójából állott elő mint fent, és teljesíti a következő feltételeket:*
F1 Minden φ zárt formulára $\Gamma \mid\!\!- \varphi$ esetén $\Gamma \mid\!\!- \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
F2 $\Gamma \mid\!\!- \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.
F3 $\Gamma \mid\!\!- \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow \mathrm{Pr}(\ulcorner \psi \urcorner)$.
Ilyen feltételek mellett $\Gamma \not\mid\!\!- \mathrm{Con}_\Gamma$.

A bizonyítás előtt néhány megjegyzés. Az F1 csak annak megismétlése, hogy Pr_Γ jól reprezentálja a levezethetőséget, ennek külön kikötésére nem volna szükség. Az F2 helyett általában csak annyit tudunk, hogy ha $\Gamma \mid\!\!- \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$, akkor $\Gamma \mid\!\!- \mathrm{Pr}(\ulcorner \mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$, vagyis ha Γ összes modelljén igaz a $\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ formula, akkor ugyancsak az összes modellen is igaz lesz a másik is. F2 viszont azt köti ki, hogy amennyiben Γ-nak egy tetszőleges modelljében a $\mathrm{Pr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ igaz, akkor ugyanebben a modellben a hosszabb formula is igaz legyen függetlenül Γ többi modelljeitől. Meg lehet mutatni (bonyolult formulaindukcióval), hogy amennyiben Γ-nak a Peano-t, ZFC-t, vagy egy ezek valamelyikét tartalmazó rekurzív axiómarendszert választjuk, a levezethetőség reprezentációjaként pedig egy megfelelő formulát (a reprezentációs tétel sztenderd bizonyítása egyébként – kisebb átalakításokkal – ilyen formulát ad), akkor F1–F3 teljesül.

Lemma (Gödel) *Legyen ν az a (fixpont tétel szerint létező) formula, amire $\Gamma \mid\!\!- \nu \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_\Gamma(\ulcorner \nu \urcorner)$. Ha Γ ellentmondástalan, akkor $\Gamma \not\mid\!\!- \nu$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\Gamma \models \nu$, megmutatjuk, hogy Γ ellentmondásos. Van tehát ν-nek levezetése Γ-ból, tehát valamilyen N természetes számra $\Gamma \models \mathrm{Prov}_\Gamma(k(N), \ulcorner\nu\urcorner)$, ahonnan $\Gamma \models \exists u \mathrm{Prov}_\Gamma(u, \ulcorner\nu\urcorner)$. A Pr_Γ és ν definíciója miatt ez az jelenti, hogy $\Gamma \models \neg\nu$. A feltevésünkkel összevetve kapjuk, hogy Γ ellentmondásos. QED

A fenti F1–F3 feltételek még egy nagyon hasznos következményét is igazoljuk:

F4 Ha $\Gamma \models \varphi \to \psi$ akkor $\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Ilyenkor ugyanis F1 szerint $\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner)$. Ha most ezt és F3-at egy modus ponenssel összekötjük, éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Gödel-tétel **Bizonyítása** Az előző lemma miatt elegendő belátnunk, hogy a Γ-ra tett feltevések mellett $\Gamma \models \nu \leftrightarrow \mathrm{Con}_\Gamma$.

$\Gamma \models \mathbf{hamis} \to \nu$	tautológia
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\mathbf{hamis}\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\nu\urcorner)$	F4
$\Gamma \models \neg\mathrm{Con}_\Gamma \to \neg\nu$	előző átírása más jelöléssel

Ez adja az ekvivalencia felét. A másikhoz legyen a rövidség kevéért $\varphi \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pr}(\ulcorner\nu\urcorner)$.

$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\nu\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$	F2 másképp
$\Gamma \models \nu \to \neg\varphi$	ν definíciója átírva
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\nu\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$	F4
$\Gamma \models \varphi \to (\neg\varphi \to \mathbf{hamis})$	tautológia
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to (\mathrm{Pr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\mathbf{hamis}\urcorner))$	F4 kétszeri alkalmazásával
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\nu\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\mathbf{hamis}\urcorner)$	az első és harmadik sorból az előző segítségével, egyszerű átalakítással.

Ezzel megkaptuk az ekvivalencia másik felét. QED

Tétel (Löb) *Teljesítse Γ a fenti feltételeket, és tegyük fel, hogy valamilyen φ zárt formulára $\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$. Ekkor $\Gamma \models \varphi$.*

Az állítást az azonosan hamis formulára alkalmazva speciális esetként kiadódik az előző tétel.

Bioznyítás A fixpont tétel szerint van olyan μ zárt formula, amire $\Gamma \models \mu \leftrightarrow (\mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner) \to \varphi)$. Most

$\Gamma \models \mu \to (\mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner) \to \varphi)$	μ definíciója
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner) \to (\mathrm{Pr}(\ulcorner\mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner)\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner))$	F4 kétszeri alkalmazásával
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner)\urcorner)$	F2
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner) \to \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$	előző kettő, logika
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$	feltétel
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner) \to \varphi$	előző kettő, logika
$\Gamma \models \mu$	mert a μ éppen ez
$\Gamma \models \mathrm{Pr}(\ulcorner\mu\urcorner)$	F1
$\Gamma \models \varphi$	hiszen előző $\to \varphi$ már volt

QED