Logika előadás
2000, Október 25

1. Leszálló Löwenheim-Skolem tétel

Tétel (Tarski–Vaught krtérium) *Legyen $\mathfrak{B}$ részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak. $\mathfrak{B}$ akkor és csak akkor elemi rész, ha minden $\mathfrak{B}$ feletti e értékelésre és $\exists x\, \varphi$ formulára igaz a következő implikáció: ha $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi[e]$, akkor van olyan $b \in B$, amire $\mathfrak{A} \models \varphi[e[x/b]]$.*

Bizonyítás Először tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}$ elemi része $\mathfrak{A}$-nak. Az elemi rész definíciója miatt ha egy $\mathfrak{B}$ feletti e értékeléssel $\mathfrak{A}$-ban igaz egy formula, akkor ugyanazzal az értékeléssel $\mathfrak{B}$-ben is igaz, vagyis $\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi[e]$. Ez pedig azt jelenti, hogy van $b \in B$, amire $\mathfrak{B} \models \varphi[e[x/b]]$. Megint az elemi rész definíciója miatt ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi[[e[x/b]]$, hiszen ez egy $\mathfrak{B}$ feletti értékelés.

Fordítva tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$-ra és $\mathfrak{B}$-re áll a fenti implikáció. A φ formula felépítésére vonatkozó indukcióval mutatjuk meg, hogy az elemi rész definíciója erre a két struktúrára fennáll. Prímformulákra azért, mert feltétel szerint $\mathfrak{B}$ részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak. φ-ről $\neg\varphi$-re; illetve φ és ψ-ről $\varphi \vee \psi$-re trivi. Tegyük most fel, hogy az elemi rész definíciója φ-re és tetszőleges $\mathfrak{B}$ feletti értékelésre teljesül, és nézzük $\exists\varphi$-t. Ha $\mathfrak{B} \models \exists\varphi[e]$, akkor $\mathfrak{B} \models \varphi[e[x/b]]$ valamilyen $b \in B$-vel, az indukciós hipotézis miatt $\mathfrak{A} \models \varphi[e[x/b]]$, tehát $\mathfrak{A} \models \exists\varphi[e]$. Ha most $\mathfrak{A} \models \exists\varphi[e]$, akkor az állításban szereplő feltétel miatt van $b \in B$, amivel $\mathfrak{A} \models \varphi[e[x/b]]$, ahonnan az indukció miatt $\mathfrak{B} \models \varphi[e[x/b]]$, ahonnan $\mathfrak{B} \models \exists\varphi[e]$, ahogyan kívántuk. QED

Tétel *Legyen $\mathfrak{A}$ egy végtelen t típusú struktúra, $X \subseteq A$. Ekkor van $\mathfrak{A}$-nak olyan $\mathfrak{B}$ elemi része, hogy $X \subseteq B$, és $|B| \leq |X| \cdot |t| \cdot \omega$*

Bizonyítás Legyen $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ egy formula, az ehhez tartozó f_φ *Skolem-függvény* olyan A-n értelmezett n-változós függvény, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in A$ elemekre, ha létezik egyátalán olyan $b \in A$, amivel $\mathfrak{A} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$, akkor $f_\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ ilyen.

Rögzítsünk minden formulához egy Skolem-függvényt. Ha az $\mathfrak{A}$ struktúra alaphalmazának egy $B \subseteq A$ része zárt az összes Skolem-függvényre, akkor B részstruktúrát indukál (B zárt a függvényekre, amit az $x = f(y_1, \ldots, y_n)$ formulához tartozó Skolem-függvény mutat); továbbá a Tarski–Vaught kritérium alapján elemi rész is.

Mivel formulából $|t| \cdot \omega$ darab van, azért ha X-et az összes Skolem-függvényre lezárjuk, legfeljebb $|X| \cdot |t| \cdot \omega$ számosságú halmazt kapunk. QED

Következmény (Leszálló Löwenheim-Skolem tétel) Ha egy Γ formulahalmaznak van modellje, akkor van legfeljebb $|\Gamma| \cdot |t| \cdot \omega$ számosságú modellje is.

Így például a halmazelmélet axiómarendszerének (egyetlen kétváltozós relációjel) ha van egyátalán modellje, akkor van megszámlálható modellje is.

A leszálló és felszálló Löwenheim–Skolem tételek együtt azt mondják ki, hogy ha egy Γ formulahalmaznak van végtelen modellje, akkor minden $\kappa \geq |t|\dot{\omega}$ számosságra van pontosan κszámosságú modellje is.

2. Elsőfokú rezolóciós módszer

Legyen Γ egy t típusú formulákból álló formulahalmaz. Olyan eljárást keresünk, ami megmondja, hogy Γ-nak van-e modellje. Ehhez Γ elemeit átalakítjuk más típusú formulákká, de azt nem változtatjuk meg, hogy Γ kielégíthető-e.

Elsőként Γ elemeiből elhagyjuk az $=$ jelet, és helyette egy új kétváltozós $E(x, y)$ relációjelet vezetünk be: a $k_1 = k_2$ alakú részformulákat $E(k_1, k_2)$-vel helyettesítjük. Ezen kívül Γ-hoz hozzávesszük az alábbi *egyenlőség axiómákat*:

E1 $E(x, x)$
E2 $E(x, y) \to E(y, x)$
E3 $E(x, y) \wedge E(y, z) \to E(x, z)$
E4 minden r relációjelre

$$\big(E(x_1, y_1) \wedge \ldots \wedge E(x_n, y_n)\big) \to \big(r(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow r(y_1, \ldots, y_n)\big)$$

E5 minden f függvényjelre

$$\big(E(x_1,y_1)\wedge\ldots\wedge E(x_n,y_n)\big)\to E(f(x_1,\ldots,x_n),f(y_1,\ldots,y_n))$$

Legyen az így kapott t' típusú formulahalmaz Γ'. Ha Γ-nak van modellje, akkor persze Γ'-nek is van, egyszerűen E interpretáltja az igazi egyenlőség. Fordítva, ha Γ'-nek van modellje, akkor abban E interpretáltja az egyenlőség-axiómák miatt ekvivalencia reláció és kompatibilis a függvényjelek illetve relációjelek interpretáltjával, ezért a modellt e szerint le lehet faktorizálni. A faktormodell könnyen láthatóan modellje lesz Γ-nak.

Másodikként Γ' elemeit *prenex* alakra hozzuk. Egy formula prenex alakú, ha benne a kvantorok elöl vannak, a kvantorok után egy kvnatormentes formula következik. Ezt az alábbi szabályok alkalmazásával tesszük:

$\neg\exists x\varphi \quad\Rightarrow\quad \forall x\neg\varphi$

$\neg\forall x\varphi \quad\Rightarrow\quad \exists x\neg\varphi$

$(\exists x\varphi)\vee\psi \quad\Rightarrow\quad \exists y(\varphi[x/y]\vee\psi)$, ahol y olyan változójel, ami nem fordul máshol elő; hasonlóan a $\forall$ kvantorra.

Ezek az átalakítások nem változtatják meg a formula értelmét, vagyis tetszőleges struktúrában tetszőleges értékelés mellett a bal oldali formula pontosan akkor igaz, ha a jobb oldali. Ezért Γ' minden elemét prenex alakra hozhatjuk, ez nem változtat azon, hogy Γ' kielégíthető-e vagy sem.

Utoljára minden egyes prenex alakú formulával a következőket csináljuk. Ha a formula nem volna zárt, akkor lezárjuk; ha ezek után nem $\forall$ kvantorral kezdődne, akkor elé teszünk egy univerzális kvantort olyan változóval, ami egyátalán nem fordul elő a formulában; végül további kvantorokat szúrunk be, hogy az univerzális és egzisztenciális kvantorok felváltva álljanak, és az utolsó kvantor egzisztenciális legyen. Ezek megintcsak nem változtatják meg a formula értelmét. Formulánk így néz ki:

$$\forall x_1\exists y_1\forall x_2\exists y_2\ldots\forall x_n\exists y_n\psi(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n),$$

ahol ψ már kvantormentes. Ehhez a formulához választunk n darab *vadonatúj* függvényjelet: $f_1(x_1)$, $f_2(x_1,x_2)$, …, $f_n(x_1,\ldots,x_n)$, és ezeket a ψ formulában rendre az y_1, y_2, stb változójelek helyébe írjuk, az y-okat pedig kitöröljük:

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\psi(x_1,f(x_1),\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n)).$$

Ha az eredeti formulánk igaz volt valamilyen struktúrán, akkor az f_1, …, f_n függvényjeleket tudjuk úgy interpretáltni, hogy a végső formulánk is igaz legyen; fordítva pedig ha ez utóbbi formula igaz egy struktúrában, akkor ott az előbbi is, hiszen az f_i függvény értéke megadja a megfelelő y_i változójel értékét.

Végezetül az ezzel kapott formulahalmazban minden formula elejéről az ott álló univerzális kvantorokat lehagyjuk, így kapjuk Γ''-t. Az előbbiek alapján világos, hogy Γ-nak pontosan akkor van modellje, ha Γ''-nek.

A Γ'' elemei tehát kvantormentes formulák, es nem szerepel bennük $=$ jel. Tegyük fel, hogy Γ'' típusában, amit t'' fog jelölni, szerepel legalább egy konstansjel, ha nem így volna, vegyünk fel egy tetszőlegeset. Nézzük a t''-beli függvényjelek segítségével a t''-beli konstansjelek által generált szabadalgebrát (vagyis a változójel nélküli kifejezések halmazát). Ezt *Herbrandt-univerzumnak* nevezik. Ha most Γ''-nek van egyátalán modellje, akkor van olyan modellje is, aminek alaphalmaza a Herbrandt-univerzum, és benne a függvényjelek interpretáltja a természetesen adódó függvény.

Ennek az állításnak egyik fele nyílvánvaló: ha van ilyen modellje, akkor van modellje is. Fordítva: ha van Γ''-nek egy tetszőleges $\mathfrak{A}$ modellje, akkor a Herbrandt-univerzum beképezhető A-ba: a konstansjelek az interpretáltjukba mennek, a kifejezésekhez rendelt értéket pedig a függvényjelek interpretáltjai mentén számíthatjuk ki (a szabadalgebrát homomorf módon beképezzük egy algebrába). Ennek a leképezésnek a mentén visszahúzzuk a relációk interpretáltjait. Mivel Γ'' elemeiben sem egyenlőség sem kvantor nem fordul elő, azért ha egy ilyen formula az eredeti modellben minden lehetséges értékelés mellett igaz, akkor az a visszahúzott modellben is minden lehetséges értékelés mellett igaz lesz. Vagyis Γ''-nek a Herbrandt univerzumon is tudunk modelljét definiálni.

Ezek szerint Γ'' pontosan akkor kielégíthető, ha tudjuk a relációjeleket úgy interpretálni a H Herbrandt-univerzumon, hogy Γ'' minden formulája igaz legyen. Legyen r egy n-változós relációjel, k_1, …, k_n pedig

H-nak elemei. Az, hogy r ezeken az elemeken igaz-e vagy sem, lényegében egy *ítéletváltozó.* Legyenek tehát ítéletváltozóink éppen ezek: $r(k_1, \dots, k_n)$, Γ'' egy φ elemébe pedig a változójelek helyébe minden lehetséges módon helyettesítsük be H elemeit. Ezzel sok–sok ítéletkalkulusbeli formulát kaptunk, és ezek mindegyikének igaznak kell lennie. Tehát az így kapott (most már ítéletkalkulusbeli) formulahalmaz pontosan akkor kielégíthető, ha Γ''-nek, vagyis ha Γ-nak van modellje.

Arra pedig, hogy egy ítéletkalkulusbeli formulahalmaz kielégíthető-e, van a rezolúciós módszer. Így ebből a formulahalmazból pontosan akkor vezethető le az üres klóz, ha Γ-nak nincs modellje.

A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy az utóbbi lépést, nevezetesen hogy Γ'' elemeibe a Herbrandt-univerzum összes elemét be kell helyettesíteni, hogyan kerülhetjük el.

A formulák átalakítását (diszjunktív normál forma, illetve azok szétdarabolása) természetesen helyettesítés nélkül is megtehető. Egy *literál* alakja ebben az esetben $r(k_1, \dots, k_n)$ (vagy ennek negáltja), ahol r egy n-változós relációjel, k_i pedig tetszőleges (esetleg változójeleket is tartalmazó) kifejezés. Egy *klóz* pedig literálok halmaza.

Egy *helyettesítés* egy $x_1 \leftarrow k_1$, ..., $x_s \leftarrow k_s$ sorozat, ami azt jelenti, hogy az x_i változójelek helyébe a k_i kifejezéseket kell *szimultán* behelyettesíteni (nem egyesével, hanem egyszerre). Ha σ és τ is egy helyettesítés, akkor $\sigma \circ \tau$ is egy helyettesítés: először σ-t, azután τ-t hajtjuk végre. A $\sigma \circ \tau$-t ki is számíthatjuk.

Legyen c egy klóz (literálhalmaz), a $c\sigma$ az a klóz, amit c-ből a σ helyettesítés elvégzése után kapunk. A $k = \langle k_1, \dots, k_n \rangle$ és a $k^* = \langle k_1^*, \dots, k_n^* \rangle$ kifejezés sorozatok *egyesíthetők*, ha van olyan σ helyettesítés, amivel $k_1\sigma = k_1^*\sigma$, ..., $k_n\sigma = k_n^*\sigma$. Ez a σ a *legáltalánosabb egyesítésük*, ha tetszőleges τ egyesítésre (vagyis $k\tau = k^*\tau$ esetén) van olyan τ', hogy $\tau = \sigma\tau'$.

Tétel *Tetszőleges két kifejezéssorozatra, ha egyesíthető, létezik legáltalánosabb egyesítés, ami ráadásul gyorsan ki is számítható.*

Bizonyítás Nézzük a sorozatok első elemét: k_1 illetve k_1^*. Következő lehetőségek vannak: egyik sem változójel, az egyik változójel, illetve mindkettő változójel.

Az első esetben k_1 és k_1^* alakja $f(k_{11}, \dots, k_{1m})$ illetve $f^*(k_{11}^*, \dots, k_{1m}^*)$. Ha f és f^* különböző függvényjelek, akkor a két sorozat nem egyesíthető. Ha f és f^* ugyanaz a függvényjel, akkor a sorozatok elejéről a k_1-et illetve k_1^*-et kitöröljük, és a végére odaillesztjük a k_{11}, ..., k_{1m} illetve k_{11}^*, ..., k_{1m}^* kifejezéseket.

Másik esetünk ha a k_1 és k_1^* közül az egyik, mondjuk k_1 változójel. Ha most k_1^* is változójel, akkor az egyiket megtartjuk, és a másikat a saját sorozatában helyettesítjük az egyikkel. Ezzel k_1 és k_1^* azonos, őket a sorozatból ki is törölhetjük.

Ha k_1^* nem változójel, akkor benne k_1 nem fordulhat elő. Ha mégis, akkor a két sorozat nem egyesíthető (k_1 és k_1^* semmilyen helyettesítés után sem lehet egyforma). Ha k_1 nem fordul elő k_1^*-ben, akkor a legáltalánosabb helyettesítés $k_1 \leftarrow k_1^*$ lesz, ezt a k sorozatban végigvezetjük, ami által a sorozatok első elemei egyformák lesznek, tehát őket el lehet hagyni. QED

Definíció Legyen c_1 és c_2 két (nem feltétlenül különböző) klóz, ℓ_1 egy c_1-beli literál, és $\neg\ell_2 \in c_2$. Az *általános rezolúciós lépés* a következő. Először is változtassuk meg c_2-ben (és ezzel együtt ℓ_2-ben is) az összes változójelet úgy, hogy azok diszjunktak legyenek a c_1-ben használt változójelektől. Ha ezek után ℓ_1 és ℓ_2 nem egyesíthető, a rezolúciós lépés nem alkalmazható. Ha igen, legyen σ a legáltalánosabb egyesítésük, ekkor a rezolvensük:

$$R(c_1, c_2, \ell_1, \ell_2) = \big(c_1\sigma - \{\ell_1\sigma\}\big) \cup \big(c_2\sigma - \{\neg\ell_2\sigma\}\big).$$

Szükségünk lesz még egy átalakításra, az úgynevezett *faktorizáció*ra. Legyen c egy klóz, és ℓ_1 valamint ℓ_2 két egyesíthető literál c-ben. A c-nek ℓ_1 és ℓ_2 szerinti *faktora*

$$F(c, \ell_1, \ell_2) = c\sigma - \{\ell_1\sigma\},$$

ahol σ az ℓ_1 és ℓ_2 legáltalánosabb egyesítése.

Tétel *Egy klózhalmaz akkor és csak akkor nem elégíthető ki a Herbrandt-univerzumon, ha belőlük az üres klóz rezolúcióval és faktorizációval levezethető.*

Bizonyítás Egy klóz kielégíthető, ha a változójelek tetszőleges értékelés mellett benne valamelyik literál igaz lesz. Jól látszik, hogy ha c_1 és c_2 is kielégíthető, akkor rezolvensük és faktorjaik is. Ezért ha a klózhalmaz kielégíthető, akkor nem vezethető le belőle az üres klóz.

Fordítva, ha a klózhalmaz nem kielégíthető, akkor az összes klózból az összes helyettesítéssel kapott "ítéletváltozós" klózokból az üres klóz levezethető. A helyettesített klózokon való levezetés *imitálható* a következőképpen: ha a rezolúciós lépésben részt vevő egyik klóz $c_1\sigma_1$, a másik $c_2\sigma_2$, akkor van olyan $\ell_1 \in c_1$, $\neg\ell_2 \in c_2$, és σ helyettesítés, hogy a lépés eredménye éppen $R(c_1, c_2, \ell_1, \ell_2)\sigma$ egy faktora.

Ha ezt megmutattuk, készen vagyunk, ugyanis helyettesítés és faktorizáció után üres klózt csak az üres klózból kaphatunk.

A fenti, úgynevezett "emelési lemma" bizonyítása egyszerű: $\ell_1 \in c_1$ és $\neg\ell_2 \in c_2$ azok, amikre $\ell_1\sigma_1 = \ell_2\sigma_2$ az a literál, amivel a $c_1\sigma_1$ és $c_2\sigma_2$ klózokra a rezolúciós lépést alkalmaztuk. Ha c_2-ben az összes változót átnevezzük, akkor a σ_1 és σ_2 helyettesítéseket kicserélhetjük a σ' uniójukra; ez a σ' egyesíti ℓ_1-et és ℓ_2-t. Ezért ez a két literál egyesíthető, következésképp van legáltalánosabb egyesítésük is, ami legyen τ, és $\sigma' = \tau \circ \sigma$. Ezek után $R(c_1, c_2, \ell_1, \ell_2)$-re alkalmazva a σ helyettesítést, éppen $R(c_1\sigma_1, c_2\sigma_2, \ell_1\sigma_1)$-et kapjuk.

Persze nem egészen. Előfordulhat ugyanis, hogy ez utóbbiban ugyanaz az ítéletváltozós literál mind $c_1\sigma_1$-ben, mind $c_2\sigma_2$-ben szerepel, ezért a rezolvensben (mind halmazelméleti unióban) ez csak egyszer lesz. Ugyanakkor $R(c_1, c_2, \ell_1, \ell_2)\sigma$-ban ugyanaz a literál *kétszer* fog szerepelni. A két literált éppen egy faktorizációval ejthetjük össze. QED