9. fejezet

Alkalmazások

Elérkeztünk ahhoz, hogy eddigi fáradozásaink gyümölcsét learassuk. A korábbi fejezetekben kialakított fogalmak és bizonyított tételek segítségével sok fontos kérdést meg tudunk válaszolni: például adott struktúraosztály axiomatizálható-e, vagy egy elmélet teljes-e? Ezenkívül a modellelmélet néhány alapvető tételét is igazoljuk. Elsőként két olyan lemmát mondunk ki, melyeket lépten nyomon használni fogunk, gyakran külön említés nélkül is.

9.1. Lemma *Legyen t egy hasonlósági típus, és c olyan konstansjel, ami nincs t-ben. Legyen még $\varphi(x) \in F(t)$, $\Gamma \subset F(t)$ és tegyük fel, hogy $\Gamma \models \varphi(c)$. Ekkor $\Gamma \models \forall x\, \varphi(x)$.*

Bizonyítás Legyen $\mathfrak{A}$ Γ-nak t típusú modellje. Akárhogyan is választjuk meg c-nek $\mathfrak{A}$-beli interpretációját, az adódó $t \cup \{c\}$ típusú $\mathfrak{A}'$ struktúra továbbra is modellje Γ-nak. Ezért $\mathfrak{A}' \models \varphi(c)$, vagyis a 3.14. helyettesítési lemma szerint minden $a \in A$-ra $\mathfrak{A} \models \varphi(x)[a]$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x)$, ahogyan állítottuk. ■

Következő lemmánkban azt mutatjuk meg, hogyan lehet egy formulát a $\models$ jel egyik oldaláról a másikra átvinni.

9.2. Lemma (Dedukció tétel) *Legyenek $\varphi, \psi \in F(t)$ és $\Gamma \subset F(t)$.*

(i) *Ha $\Gamma \models \varphi \to \psi$, akkor $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.*

(ii) *Ha φ zárt és $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$, akkor $\Gamma \models \varphi \to \psi$.*

Bizonyítás (i) Azt kell megmutatnunk, hogy ha $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, akkor $\mathfrak{A} \models \psi$. Mivel $\mathfrak{A} \models \Gamma$, azért $\Gamma \models \varphi \to \psi$ alapján $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$. Innen $\mathfrak{A} \models \varphi$ miatt $\mathfrak{A} \models \psi$ is teljesül, ahogyan kívántuk.

(ii) Legyen $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[e]$. Ha most $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$, akkor persze készen vagyunk. Ha viszont $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$, akkor lévén φ zárt, $\mathfrak{A} \models \varphi$ is áll (3.9. lemma), tehát $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ miatt $\mathfrak{A} \models \psi[e]$, és így valóban $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[e]$. ■

A lemma (ii) részéből az a feltétel, hogy φ zárt legyen, nem hagyható el. Példa erre a $\Gamma = \emptyset$, $\varphi \equiv x = 0$ és $\psi \equiv y = 0$ formula. Ezekkel $x = 0 \models y = 0$, hiszen φ és ψ is azt mondja ki, hogy a struktúra egy elemű, míg $\models (x = 0) \to (y = 0)$ nyilván nem teljesül.

A dedukciós tétel számos következménye közül hármat említünk meg. A $\Gamma \subset F(t)$ formulahalmaz *konzisztens*, ha van modellje, és *inkonzisztens* ha nincs.

9.3. Következmény (i) *Ha φ zárt és $\Gamma \cup \{\varphi\}$ inkonzisztens, akkor $\Gamma \models \neg\varphi$.*

(ii) *Legyenek $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ zártak. $\Gamma \cup \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\} \models \psi$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \to \psi$.*

(iii) *Álljon Δ csupa zárt formulából, és tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \Delta$ inkonzisztens. Ekkor van véges sok $\delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \in \Delta$, hogy $\Gamma \models \neg(\delta_0 \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1})$.*

Bizonyítás (i) Egy inkonzisztens elméletnek tetszőleges formula következménye, így $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \neg\varphi$. A dedukció tétel szerint ekkor $\Gamma \models \varphi \to \neg\varphi$, és ez a $\to$ rövidítés nélkül $\neg\varphi \cup \neg\varphi$, ami logikailag ekvivalens $\neg\varphi$-vel.

(ii) A dedukció tételből n-re vonatkozó indukcióval könnyen adódik.

(iii) A 8.14. kompaktsági tétel miatt van $\Gamma \cup \Delta$-nak véges inkonzisztens része is, legyen egy ilyen része $\Gamma \cup \{\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\}$-nek, ahol $\delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \in \Delta$. Ez is inkonzisztens, ebből (i) és (ii) alapján adódik az állítás. ■

1. Axiomatizálhatóság

Korábban említett struktúraosztályok axiomatizálhatósági viszonyait vizsgáljuk.

9.4. Tétel *A következő struktúraosztályok nem zártak az elemi ekvivalenciára, és így nem is axiomatizálhatók:*

(i) *jólrendezett, valamint a lineárisan rendezett, de nem jólrendezett struktúrák;*
(ii) *torziócsoportok, szabad csoportok;*
(iii) *a racionális számtest feletti polinomgyűrűkkel izomorf gyűrűk;*
(iv) *összefüggő gráfok.*

Bizonyítás Az állítások bizonyítása minden esetben úgy történik, hogy veszünk ω fölött egy nem triviális U ultraszűrőt, egy $\mathfrak{A}$ struktúrát az adott osztályból, és megmutatjuk, hogy ${}^{\omega}\mathfrak{A}/U$ nem tartozik az osztályba – noha a 8.8. tétel szerint $\mathfrak{A}$ és ${}^{\omega}\mathfrak{A}/U$ elemien ekvivalensek.

(i) Legyen a $\langle\leq\rangle$ típusú $\mathfrak{A}$ struktúra a természetes számok halmaza a szokásos nagyság szerinti rendezéssel. $\mathfrak{A}$ nyilván jólrendezett, megmutatjuk, hogy ${}^{\omega}\mathfrak{A}/U$ nem az. Először is a Łoś lemma alapján az ultrahatvány egy kezdőponttal rendelkező, végpont nélküli diszkrét rendezés. Tekintsük minden $n \in \omega$-ra a következő ω-ból A-ba képező függvényeket:

$$a_n(i) = \begin{cases} 0 & \text{ha } i < n, \\ i - n & \text{ha } i \geq n. \end{cases}$$

Az a_n és a_{n+1} értékei csak véges sok (egész pontosan az első n+1) helyen egyeznek meg. U nem főszűrő, azért a_n és a_{n+1} ultraszűrőbeli sok koordinátában tér el egymástól, ezért $\overline{a}_n \neq \overline{a}_{n+1}$. Ugyanakkor minden $i \in \omega$-ra $a_{n+1}(i) \leq a_n(i)$, tehát a Łoś lemma szerint $\overline{a}_{n+1} \leq \overline{a}_n$. Az ultrahatvány $\{\overline{a}_n : n \in \omega\}$ részhalmazában tehát nincs legkisebb elem, ${}^{\omega}\mathfrak{A}/U$ nem jólrendezett. Az (i) alatti két struktúraosztály közül $\mathfrak{A}$ az elsőbe, ${}^{\omega}\mathfrak{A}/U$ a másodikba tartozik, és ez a két struktúra elemien ekvivalens.

(ii) Torziócsoportok azok, melyekben minden elem rendje véges. Jelölje C_n az n-edrendű ciklikus csoportot, ez izomorf a modulo n összeadás által generált csoporttal. Álljon $\mathcal{G}$ alaphalmaza a $\prod\limits_{n\in\omega} C_n$ direkt szorzatnak azokból az elemeiből, melyek koordinátái véges sok kivételével a csoportok nullelemeivel egyeznek meg; a $\mathcal{G}$-beli műveleteket koordinátánként kell elvégezni. Ezzel a $\prod C_n$ direkt szorzat egy részcsoportját adtuk meg.

$\mathcal{G}$ torziócsoport: ha $g \in G$-nek legfeljebb az $n_0, \ldots, n_{k-1}$ koordinátában állnak nem nulla elemek, akkor g-t $(n_0 \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})$-szer önmagához adva a nullelemet kapjuk, tehát g rendje véges. Állítjuk, hogy ${}^\omega\mathcal{G}/U$ nem torziócsoport. Valóban, legyen $a : \omega \to G$ olyan, hogy $a(i)$ legalább i-edrendű. Ilyen $a(i)$ van, például az, aminek i-edik koordinátája C_i-nek i-edrendű eleme. Nézzük most az ultraszorzatban az $\overline{a}$ elemet. Tetszőleges n természetes számra véges sok $i \in \omega$ index kivételével $\mathcal{G} \models n \cdot a(i) \neq 0$, ezért a Łoś lemma miatt ${}^\omega\mathcal{G}/U \models n \cdot \overline{a} \neq 0$, tehát a nem véges rendű, ${}^\omega\mathcal{G}/U$ nem torziócsoport.

A szabad csoportok egyik tulajdonsága, hogy nincs bennük korlátlanul osztható elem, vagyis egy $\mathcal{G}$ szabad csoport minden $g \in G$ nullától különböző eleméhez van olyan maximális $n \in \omega$, amire $\mathcal{G}$-ben megoldható az $n \cdot x = g$ egyenlet. Legyen ezek után $\mathcal{G}$ egy szabad csoport, $g \in G$ egy nullától különböző eleme, és az $a : \omega \to G$ függvényt definiáljuk úgy, hogy

$$a(i) = \big(i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1\big) \cdot g = i! \cdot g.$$

Minden $n \in \omega$-ra véges sok i index kivételével (nevezetesen $n \geq i$-re) tejesül az, hogy $\mathcal{G} \models \exists x \ \big(n \cdot x = a(i)\big)$. Következésképp a Łoś lemma alapján minden $n \in \omega$-ra ${}^\omega\mathcal{G}/U \models \exists x\,(n \cdot x = \overline{a})$. Így az ultrahatvány $\overline{a}$ eleme korlátlanul osztható, az ultrahatvány nem lehet szabad.

(iii) Ugyanazt az ötletet aknázhatjuk ki, mint a szabad csoportok esetén. Az $\mathfrak{A}$ polinomgyűrű tetszőleges $a \in A$ elemére az $x^m = a$ egyenlet csak véges sok n-re oldható meg, az ${}^\omega\mathfrak{A}/U$ ultrahatványban az $a(i) = p^{i!}$ függvénnyel kijelölt $\overline{a}$ elemre viszont minden n-re található megoldás.

(iv) Véges struktúra bármely ultrahatványa természetesen izomorf a kiindulási struktúrával, így végtelen összefüggő gráfból kell kiindulnunk. Vegyük mindjárt a legegyszerűbbet: az alaphalmaz a természetes számok halmaza, és minden szám a közvetlen rákövetkezőjével (és ekkor a megelőzőjével is) van összekötve. Ez a $\mathcal{G}$ gráf persze összefüggő. Most legyen $a, b \in {}^\omega G$ a következő: $a(i) = 0$ és $b(i) = i$ minden $i \in \omega$-ra. Legyen továbbá $\varphi_n(x, y)$ a gráfelmélet nyelvének az a formulája, ami azt fejezi ki, hogy x és y nem köthető össze legfeljebb n hosszúságú úttal. Persze $i > n$ esetén $\mathcal{G} \models \varphi_n[a(i), b(i)]$, ezért a Łoś lemma miatt ${}^\omega\mathcal{G}/U \models \varphi_n[\overline{a}, \overline{b}]$. Következésképp $\overline{a}$ és $\overline{b}$ semmilyen n-re nem köthető össze n hosszúságú úttal: ${}^\omega\mathcal{G}/U$ nem összefüggő. ■

9.5. Tétel *A következő struktúraosztályok zártak az elemi ekvivalenciára, de mégsem axiomatizálhatók:*

(i) *véges csoportok;*

(ii) *pozitív karakterisztikájú testek;*

(iii) *körgráfok.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy ezek zártak az elemi ekvivalenciára. Ahhoz, hogy nem axiomatizálhatók, elegendő találnunk minden osztályban néhány struktúrát, melyek ultraszorzata nincs az osztályban.

(i) Ha vesszük az n-edrendű ciklusok csoportokat, azok mindannyian végesek, ultraszorzatuk azonban nem az, mivel az a formula, mely szerint a struktúrának legalább n eleme van, véges sok kivétellel mindegyikben igaz, ezért az ultraszorzat végtelen.

(ii) Tekintsük a $\mathcal{GF}(p)$ Galois testek ultraszorzatát különböző p prímekre. Mivel legfeljebb egy kivételével az összes $\mathcal{GF}(p)$ nem p karakterisztikájú, azért az ultraszorzat sem lehet p karakterisztikájú, ezért az 0 karakterisztikájú.

(iii) Ha vesszük a 3, 4, 5, stb hosszúságú körök ultraszorzatát, az nem lesz véges, és így körgráf sem lehet. ■

9.6. Tétel *A következő struktúraosztályok axiomatizálhatók, de végesen nem axiomatizálhatók:*

(i) *nem véges csoportok, torziómentes Abel csoportok, osztható torziómentes Abel csoportok;*

(ii) 0 *karakterisztikájú testek, algebrailag zárt testek, valósan zárt testek;*

(iii) *körmentes gráfok.*

Bizonyítás A 8.17. tétel szerint azt kell megmutatnunk, hogy az itt felsorolt osztályok komplementuma nem zárt az ultraszorzatra.

(i) Az előbb láttunk példát véges csoportokra, melyek ultraszorzata nem véges. A véges ciklikus csoportok torziócsoportok is, ezek ultraszorzatában van végtelen rendű elem, de mégsem lesz torziómentes, mert maradnak véges rendű elemek is. Torziómentes csoportot kapunk azonban, ha csak prímrendű ciklikus csoportokat ultraszorzunk. Legyen p_i az i-edik prím ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, stb) és legyen C_{p_i} a p_i-rendű ciklikus csoport. Legyen $\overline{a}$ a $\prod C_{p_i}/U$ ultraszorzat egy nullától különböző eleme és egy n egy természetes szám. Azt akarjuk megmutatni, hogy $n \cdot \overline{a} \neq 0$. Mivel $\overline{a} \neq 0$, azért az $\{i \in \omega : a(i) = 0\}$ halmaz nincs benne U-ban. Ezeken a helyeken $a(i)$ értékét tehát tetszőlegesen megváltoztathatjuk, továbbra is a ekvivalencia osztályába eső elemet kapunk. Feltehetjük tehát, hogy $a(i) \neq 0$ minden $i \in \omega$-ra, ekkor viszont $p_i > n$-re $C_{p_i} \models n \cdot a(i) \neq 0$. Véges sok index kivételével $n \cdot a(i) \neq 0$, ezért az ultraszorzatban $n \cdot \overline{a} \neq 0$, amit állítottunk.

Annak megmutatására, hogy az osztható torziómentes Abel csoportok osztálya nem végesen axiomatizálható, álljon $\mathcal{G}_i$ alaphalmaza mindazokból a racionális számokból, melyek nevezője csak az első i prímszámmal osztható, és a csoportművelet a racionális számok szokásos összeadása. Nem nehéz látni, hogy $\mathcal{G}_i$ nem osztható, de $\prod \mathcal{G}_i/U$ már igen.

(ii) Az előbb láttuk, hogy a p karakterisztikájú $\mathcal{GF}(p)$ testek ultraszorzata 0 karakterisztikájú. A másik két osztályra lásd a feladatokat.

(iii) A 3, 4, 5, ..., stb hosszúságú körök ultraszorzata körmentes, mert adott $n \in \omega$-ra az n-nél hoszabb körök nem tartalmaznak n hosszúságú kört. ■

2. Teljesség

Egy $\Gamma \subset F(t)$ elmélet teljességének vizsgálata általában egyszerűsödik, ha sikerül megmutatnunk, hogy Γ kvantoreliminálható, azaz minden $\varphi \in F(t)$-hez található olyan nyílt (kvantormentes) $\psi \in F(t)$, hogy φ és ψ szabad változói megegyeznek, és $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Ekkor ugyanis a zárt formulák helyett elegendő csak a változójelet nem tartalmazó ϑ formulákra vizsgálni, hogy $\Gamma \models \vartheta$ és $\Gamma \models \neg\vartheta$ közül legalább az egyik fennáll-e. Gyakran Γ közvetlenül nem kvantoreliminálható, de valamilyen könnyen áttekinthető konzervatív bővítése már igen. Erre számtalan példát fogunk látni.

Elsőként egy általános lemmát bizonyítunk, melyet a későbbiekben többször fel fogunk használni. Majd egy szükséges feltételt adunk arra, hogy Γ kvantoreliminálható legyen. Végül ezek segítségével egy sor elméletről igazoljuk, hogy teljesek.

9.7. Lemma *Legyen $\Delta \subset F(t)$ zárt formuláknak olyan halmaza, mely tartalmaz azonosan hamis formulát, továbbá bármely két $\delta_0, \delta_1 \in \Delta$-hoz van olyan $\delta \in \Delta$, melyre $\models (\delta_0 \vee \delta_1) \leftrightarrow \delta$, azaz Δ a logikai ekvivalencia erejéig zárt a diszjunkcióra. Legyen $T \subset F(t)$ rögzített elmélet. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset F(t)$ rendelkezik a következő tulajdonsággal:*

(∗) *ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ a T-nek modelljei, $\mathfrak{A} \models \Gamma$, továbbá minden $\mathfrak{A}$-ban igaz $\delta \in \Delta$ egyúttal igaz $\mathfrak{B}$-ben is, akkor $\mathfrak{B} \models \Gamma$.*

Ekkor van olyan $\Delta' \subset \Delta$, hogy $T \cup \Delta' \models \Gamma$ és $T \cup \Gamma \models \Delta'$.

Bizonyítás Legyen $\Delta' = \{\delta \in \Delta : T \cup \Gamma \models \delta\}$, erre $T \cup \Gamma \models \Delta'$, állítjuk, hogy ez jó. Legyen ehhez $\mathfrak{B} \models T \cup \Delta'$, azt akarjuk megmutatni, hogy $\mathfrak{B} \models \Gamma$. Legyen

$$\Delta'' = \{\neg\delta : \delta \in \Delta \text{ és } \mathfrak{B} \models \neg\delta\},$$

ekkor $T \cup \Gamma \cup \Delta''$ konzisztens. Tegyük fel, hogy ez nem így volna. A 9.3. következmény (iii) pontja szerint van Δ''-nek véges sok $\neg\delta_0, \ldots, \neg\delta_{n-1}$ eleme, hogy $T \cup \Gamma \models \neg(\neg\delta_0 \wedge \ldots \wedge \neg\delta_{n-1})$, vagyis $T \cup \Gamma \models \delta_0 \vee \ldots \vee \delta_{n-1}$. A Δ-ról tett feltevésünk szerint van $\delta \in \Delta$, amire $\models \delta \leftrightarrow (\delta_0 \vee \ldots \vee \delta_{n-1})$, és ekkor $T \cup \Gamma \models \delta$, azaz $\delta \in \Delta'$ és így $\mathfrak{B} \models \delta$, ami viszont ellentmond annak, hogy $\mathfrak{B} \models \neg\delta_0, \ldots, \mathfrak{B} \models \neg\delta_{n-1}$.

Így $T \cup \Gamma \cup \Delta''$ valóban konzisztens, legyen $\mathfrak{A}$ egy modellje. Alkalmazzuk most a lemma (∗) feltételét $\mathfrak{A}$-ra, $\mathfrak{B}$-re. Ha valamely $\delta \in \Delta$-ra $\mathfrak{B} \not\models \delta$, akkor lévén δ zárt, $\mathfrak{B} \models \neg\delta$, és ekkor $\neg\delta \in \Delta''$, azaz $\mathfrak{A} \models \Delta''$ miatt $\mathfrak{A} \not\models \delta$. S mivel $\mathfrak{A} \models \Gamma$, azért $\mathfrak{B} \models \Gamma$, amit bizonyítani akartunk. ∎

9.8. Tétel *Ha a $T \subset F(t)$ elmélet rendelkezik a következő két tulajdonsággal, akkor kvantoreliminálható:*

(i) *Ha T-nek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ modelljeire $\mathfrak{B}$ részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak, továbbá valamely $\varphi \in F(t)$* nyílt *formulára és $\mathfrak{B}$ fölötti e értékelésre $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi[e]$, akkor van olyan $b \in B$ is, amivel $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/b)]$.*

(ii) *Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ modellje T-nek. $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}'$ részstruktúrái $\mathfrak{A}$-nak, $\mathfrak{B}$-nek, és $g : A' \to B'$ egy izomorfizmus $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}'$ között. Ekkor vannak T-nek olyan $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$ modelljei, hogy $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}'' \subset \mathfrak{B}$ és g kiterjeszthető $\mathfrak{A}''$ és $\mathfrak{B}''$ közötti izomorfizmussá.*

Bizonyítás Elegendő belátni, hogy minden nyílt $\varphi \in F(t)$ formulához található olyan $\psi \in F(t)$ nyílt formula, melyre $(\exists x\, \varphi)$-nek és ψ-nek ugyanazok a szabad változói, továbbá $T \models (\exists x\, \varphi) \leftrightarrow \psi$. Ebből egyszerű formulaindukcióval T kvantoreliminálhatósága közvetlenül adódik (lásd a 7.8. tétel bizonyítását).

Legyen tehát $\varphi(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in F(t)$ nyílt, és szabad változói éppen azok, amiket feltüntettünk. Bővítsük ki a t típust az új $c_0, \ldots, c_{n-1}$ konstansjelekkel, legyen a bővebb típus t'. A továbbiakban a rövidség kedvéért a $c_0, \ldots, c_{n-1}$ jelsorozat helyett csak $\vec{c}$-t írunk, hasonlóan $x_0, \ldots, x_{n-1}$ helyett $\vec{x}$-et és $y_0, \ldots, y_{n-1}$ helyett $\vec{y}$-t. Világos, hogy

$\exists x\, \varphi(x, \vec{c}) \in F(t')$, és a 9.1. lemma alapján olyan változójel nélküli $\psi \in F(t')$ formulát keresünk, amire $T \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c}) \leftrightarrow \psi$.

Elsőként a következő állítást bizonyítjuk. Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ T-nek két t' típusú modellje, $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c})$ és tegyük fel, hogy minden változójel nélküli $\psi \in F(t')$ formulára $\mathfrak{A} \models \psi$ esetén $\mathfrak{B} \models \psi$. Ekkor $\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c})$ is teljesül. Legyenek ugyanis $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ a t'-beli kostansjelek által generált részstruktúrák. Legyen a $c \in t'$ konstansjel $\mathfrak{A}$-beli interpretáltja $c_{\mathfrak{A}}$, és definiáljuk a g függvényt ezeken az elemeken azzal, hogy $g(c_{\mathfrak{A}}) = c_{\mathfrak{B}}$. Ez a szokásos módon kiterjeszthető az egész $\mathfrak{A}'$-re: ha $f \in t$ n-változós függvényjel és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A'$ értékeit már tudjuk, akkor

$$g\big(f_{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})\big) = f_{\mathfrak{B}}\big(g(a_0), \ldots, g(a_{n-1})\big)\,.$$

Mivel minden $\mathfrak{A}$-ban igaz változójel nélküli formula igaz $\mathfrak{B}$-ben is, a kiterjesztés során nem fordulhat elő, hogy ugyanahhoz az $\mathfrak{A}'$-beli elemhez különböző $\mathfrak{B}'$-beli elemeket kellene rendelnünk. Sőt ugyanezért képként $\mathfrak{B}'$ minden elemét megkapjuk, és g izomorfizmus lesz $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}'$ között. Most az (ii) feltételt alkalmazva g továbbterjeszthető $\mathfrak{A}''$ és $\mathfrak{B}''$ közti izomorfizmussá, ahol $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}'' \subset \mathfrak{B}$, továbbá $\mathfrak{A}''$ és $\mathfrak{B}''$ modelljei T-nek. A $c_0, \ldots, c_{n-1}$ konstansjelek $\mathfrak{A}$-beli illetve $\mathfrak{B}$-beli interpretáltjai elemei $\mathfrak{A}'$-nek, $\mathfrak{B}'$-nek, ezért az (i) feltétel szerint az alábbiak ekvivalensek:

$$\mathfrak{A}'' \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c}) \quad \text{és} \quad \mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c})$$

valamint

$$\mathfrak{B}'' \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c}) \quad \text{és} \quad \mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c})$$

Itt $\mathfrak{A}''$ és $\mathfrak{B}''$ izomorfak, tehát valóban $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c})$ esetén $\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c})$ is fönnáll, ahogyan állítottuk.

Ezek után alkalmazzuk a 9.7. lemmát a következő szereposztással. $\Delta \subset F(t')$ a változójelek nélküli formulák halmaza, és Γ az egyetlen $\exists x\, \varphi(x, \vec{c})$ formulából áll. A lemma $(*)$ feltételét éppen az előbb bizonyítottuk. Következésképp van olyan $\Delta' \subset \Delta$, hogy

(1) $$T \cup \Delta' \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c})$$

és

(2) $$T \cup \{\exists x\, \varphi(x, \vec{c})\} \models \Delta'.$$

A kompaktsági tétel miatt van véges sok $\delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \in \Delta'$ is, hogy $T \cup \{\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}\} \models \exists c\, \varphi(x, \vec{c})$, vagyis a 9.3. következmény (iii) pontja alapján

$$T \models (\delta_0 \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1}) \to \exists x\, \varphi(x, \vec{c}).$$

A fordított irányú implikáció, azaz

$$T \models \exists x\, \varphi(x, \vec{c}) \to (\delta_0 \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1})$$

(2)-ből azonnal adódik, így a $\psi \equiv \delta_0 \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1} \in F(t')$ változójel nélküli formula olyan, amilyent kerestünk. ■

9.9. Tétel *Az alábbi elméletek teljesek:*

(i) *végpontok nélküli sűrű rendezés;*

(ii) *kezőponttal rendekező, végpont nélküli diszkrét rendezés;*

(iii) *osztható torziómentes Abel csoportok;*

(iv) *végtelen Abel csoportok, melyekben minden elem rendje egy p prímszám;*

(v) *0 valamint p karakterisztikájú algebrailag zárt testek;*

(vi) *valósan zárt testek;*

(vii) *atommentes Boole algebrák.*

Bizonyítás Minden esetben azt mutatjuk meg, hogy vagy maga az elmélet, vagy annak valamely konzervatív bővítése kielégíti a 9.8. tétel feltételeit, és így kvantoreliminálható. Innen az elmélet teljessége általában triviálisan adódik.

(i) *Végpontok nélküli sűrű rendezés*

A 9.8. tétel (i) feltétele azért teljesül, mert egy nyílt formula igazságát a szabad változójelek nagyság szerinti sorrendje dönti el; (ii) pedig a következők miatt. Az $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}'$ közötti izomorfizmust arra a struktúrára terjesztjük ki, amit úgy kapunk, hogy $\mathfrak{A}'$ azon elempárjai közé, ahová $\mathfrak{A}'$-nek további eleme nem esik, egy $\mathfrak{A}$-ból kivett sűrű rendezést iktatunk be.

Ugyancsak kvantoreliminálhatók, és így teljesek is ennek az elméletnek a következő bővítései:

(a) bevezetjük a $<$ kétváltozós relációjelet az $x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ definícióval;

(b) az előző, és hozzáveszünk a típushoz megszámlálható sok új konstansjelet, $c_0, \dots, c_i, \dots$ és további axiómaként minden $i \in \omega$-ra azt, hogy $c_i < c_{i+1}$;

$(c)_n$ $n \geq 2$-re az előző kettő, és további n darab egyváltozós relációjelet, $R_0, \dots, R_{n-1}$-et veszünk a típushoz, és axiómaként azt, hogy minden elem ezek közül pontosan egyet elégít ki, minden $i \in \omega$-ra $R_0(c_i)$, és két tetszőleges elem között minden $i < n$-hez található olyan x, amire $R_i(x)$ igaz.

(ii) *Kezdőponttal rendelkező, végpont nélküli diszkrét rendezés*

Az elmélet $\langle \leq \rangle$ típusú formulákkal felírt axiómarendszere nem kvantoreliminálható. Bővítsük ki a típust a 0 konstansjellel és az S, R egyváltozós függvényjelekkel. A 0 a minimális elemet jelzi, S és R pedig a rendezésben a közvetlen rákövetkező illetve közvetlen megelőző elemre mutat, vagyis az elmélethez a következő definiáló formulákat vesszük hozzá:

$$\begin{array}{lll}
x = 0 & \leftrightarrow & \forall z\,(x \leq z) \\
y = S(x) & \leftrightarrow & x \leq y \wedge x \neq y \wedge \forall z\,(x \leq z \wedge z \leq y \rightarrow x = z \vee z = y) \\
y = R(x) & \leftrightarrow & (x = 0 \wedge y = 0) \vee \\
 & & \qquad \big(y \leq x \wedge y \neq x \wedge \forall z\,(y \leq z \wedge z \leq x \rightarrow y = z \vee z = x)\big).
\end{array}$$

Ez természetesen konzervatív bővítés, a 0, R, S jeleket egy-egy $\forall_1$ formulával definiáltuk. A bővített elmélet modelljei a következőképpen néznek ki. Minimális elemük a 0, ezt követi az $S0$, azután sorban $SS0$, $SSS0$, stb. Az összes többi elem egy-egy mindkét irányban végtelen, rendezés szempontjából az egészekkel izomorf $\omega^* + \omega$ rendtípusú „szálon” van, és ezek a szálak valamilyen lineáris rendezés szerint vannak elhelyezve.

Világos, hogy ha $\mathfrak{A}$ ilyen modell és $\mathfrak{B}$ egy $\langle 0, R, S, \leq \rangle$ típusú részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak, akkor $\mathfrak{B}$ tartalmazza a kezdő ω rendtípusú „félszálat," továbbá valahány teljes $\omega^* + \omega$ rendtípusú szálat. Ebből a 9.8. tétel feltételei azonnal adódnak.

Az azonban még nem következik, hogy az elmélet teljes is, csak annyi, hogy tetszőleges zárt formula ekvivalens valamely, a bővebb nyelven felírt változómentes formulával. Ám ezek igazságát az elmélet egyértelműen eldönti, hiszen ezek a kezdő félszál elemei közül bizonyosak egyenlőségét vagy rendezését mondják ki – ez pedig az elmélet minden modelljében ugyanaz. Tehát minden zárt formula ekvivalens az azonosan igaz vagy az azonosan hamis formulával: az elmélet teljes.

(iii) *Osztható torziómentes Abel csoportok*

Most végtelen sok egyváltozós függvényjellel bővítünk. Egy $r = p/q$ racionális számra és a csoport x elemére egyetlen olyan y van, amivel $q \cdot y = p \cdot x$, ezt az y-t jelöljük $f_r(x)$-szel. Ezzel egy részstruktúra szintén osztható torziómentes Abel csoport lesz, amiből (ii) következik. (i)-hez eleve föltehetjük, hogy a nyílt φ konjunktív normál formájú, és persze azt is, hogy csak egyetlen konjunkciós tagból áll. A nyelvben relációjelként csak az $=$ szerepel, így a 9.8. tétel (i) feltétele ekvivalens azzal, hogy ha $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathfrak{B}$ és az

$$f_{r_0}(x) \underset{=}{\neq} b_0, \quad f_{r_1}(x) \underset{=}{\neq} b_1, \quad \ldots, \quad f_{r_{n-1}}(x) \underset{=}{\neq} b_{n-1}$$

rendszernek van $\mathfrak{A}$-beli megoldása, akkor az megoldható $\mathfrak{B}$-ben is. Ha a fenti feltételek közül valamelyikben $=$ áll, akkor persze $x \in B$. Így feltehetjük, hogy mindenütt $\neq$ áll, mikor is a $\mathfrak{B}$-beli megoldhatóság következik abból, hogy $\mathfrak{B}$ végtelen. Az elmélet tehát kvantoreliminálható, s mivel változójel nélküli formula csak a $0 = 0$, $0 \neq 0$ és ezek kombinációi, az elmélet teljes is.

(iv) *Végtelen Abel csoportok, melyekben minden elem rendje* p

Erre az elméletre a 9.8. tétel közvetlenül alkalmazható, mivel modelljei izomorfak a $\mathcal{GF}(p)$ feletti végtelen dimenziós vektorterekkel.

(v) *Algebrailag zárt testek*

A 9.8. tétel (i) feltételének ellenőrzéséhez megintcsak feltehetjük, hogy a nyílt φ formula konjunktív normál formájú, és hogy abban is csak egyetlen konjunkciós tag van. S minthogy megint az $=$ az egyetlen relációjel, a következőt kell igazolnunk. Legyen $\mathfrak{B}$ algebrailag zárt résztestje $\mathfrak{A}$-nak, és legyenek p_0, q_0, $\ldots$, p_{n-1}, q_{n-1} $\mathfrak{B}$-beli együtthatós polinomok. Ha a

$$\frac{p_0(x)}{q_0(x)} \underset{=}{\neq} 0, \quad \frac{p_1(x)}{q_1(x)} \underset{=}{\neq} 0, \quad \ldots, \quad \frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)} \underset{=}{\neq} 0$$

rendszer megoldható $\mathfrak{A}$-ban, akkor megoldható $\mathfrak{B}$-ben is. Ha most itt valahol $=$ áll, akkor persze az azt kielégítő $\mathfrak{A}$-beli x benne van $\mathfrak{B}$-ben is. Ha pedig mindenütt $\neq$ áll, akkor $\mathfrak{B}$-ben van gyöke a

$$p_0(x) \cdot q_0(x) \cdot \ldots \cdot p_{n-1}(x) \cdot q_{n-1}(x) + 1 = 0$$

polinomnak, és erre az x-re egyik tört értéke sem lehet 0.

Az (ii) feltétel a következő. Egy test részstruktúrája test, tehát ha adott két algebrailag zárt test, $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ és azok $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ résztestjei között egy izomorfizmus, akkor az kiterjeszthető $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ algebrailag zárt résztestjei közötti izomorfizmussá. Ez pedig az algebrából jól ismert állítás.

Következésképp az algebrailag zárt testek elmélete kvantoreliminálható, de a változójel nélküli formulák igazságát ez az elmélet önmagában még nem dönti el. Ezzel szemben a 0 karakterisztikájú vagy valamilyen p prímszámra a p karakterisztikájú algebrailag zárt testek elmélete már teljes. Ezek modelljeiben ugyanis a 0 és 1 konstansok által generált részstruktúra – amiről a változójelek nélküli formulák szólnak – izomorfak, első esetben a racionális számtesttel, a másodikban $\mathcal{GF}(p)$-vel, és így a változójel nélküli formulák igazságát is egyértelműen megadják.

(vi) *Valósan zárt testek*

Könnyen adódik, hogy valósan zárt testben a -1 nem áll elő véges sok négyzetszám összegeként, így a test karakterisztikája csak 0 lehet. Az, hogy a 9.8. tétel feltételei teljesülnek, ugyanúgy adódik, mint az előbb, mindössze az kell tudnunk hogy ha $\mathfrak{B}$ valósan zárt résztestje $\mathfrak{A}$-nak és egy $\mathfrak{B}$-beli együtthatós polinomnak van gyöke $\mathfrak{A}$-ban, akkor a gyök eleme lesz $\mathfrak{B}$-nek is.

(vii) *Atommentes Boole algebrák*

Annak ellenőrzését, hogy a 9.8. tétel most is alkalmazható, az olvasóra hagyjuk. A konstansjelek által generált Boole-algebra izomorf a két elemű {igaz, hamis} algebrával, ezért az elmélet valóban teljes. ■

3. Kategoricitás

A vizsgált elméletek mindegyikének típusa legfeljebb megszámlálható. Ezek a 8.13. Łoś–Vaught próba szerint csak úgy lehetnek kategorikusak valamilyen végtelen κ-ra, ha teljesek is. Így eleve csak azokkal az elméletekkel kell foglalkoznunk, melyek teljesek. A 9.9. tételben felsoroltak abból a szempontból, hogy mely végtelen számosságokra kategorikusak, négy csoportra bomlanak.

9.10. Tétel (i) *Minden $\kappa \geq \omega$-ra κ-kategorikus: végtelen Abel csoportok, melyekben minden elem rendje p;*

(ii) *ω-kategorikus, de $\kappa > \omega$-ra nem κ-kategorikus: végpontok nélküli sűrű rendezés, atommentes Boole algebrák;*

(iii) *nem ω-kategorikus, de $\kappa > \omega$-ra κ-kategorikus: osztható torziómentes Abel csoportok,* 0 *valamint p karakterisztikájú algebrailag zárt testek, valósan zárt testek;*

(iv) *semmilyen $\kappa \geq \omega$-ra nem κ-kategorikus: kezdőponttal rendelkező, végpont nélküli diszkrét rendezés.*

Bizonyítás (i) Az elmélet modelljei izomorfak a $\mathcal{GF}(p)$ feletti végtelen dimenziós vektorterekkel. Két vektortér pedig izomorf, ha izomorf az alaptestjük és ugyanannyi dimenziósak.

(ii) A végpontok nélküli sűrű rendezésre vonatkozó állításokat a 7.3. és 7.4. tételekben bizonyítottuk. Az atommentes Boole algebrára vonatkozókat pedig feladatoknak hagyjuk.

(iii) Az osztható torziómentes Abel csoportok izomorfak a racionálisak feletti vektorterekkel, és a különböző dimenziójú terek még csak a vektorok összeadását tekintve sem izomorfak. Innen adódik az első állítás. A továbbiak pedig abból, hogy két algebrailag illetve valósan zárt test pontosan akkor izomorf, ha transzcendencia fokuk megegyezik.

(iv) Az elmélet modelljeit korábban leírtuk, abból az állítás kiolvasható. ■

Azt hogy megszámlálható típusokra ez a négy eset kimeríti az összes lehetőséget, *M. D. Morley* bizonyította 1965-ben. A tételt nem bizonyítjuk, az messze meghaladja könyvünk kereteit.

9.11. Tétel (Morley tétele) *Legyen a t típus véges vagy megszámlálható és $\Gamma \subset F(t)$ tetszőleges elmélet. Ha Γ κ-kategorikus valamilyen $\kappa > \omega$-ra, akkor κ-kategorikus az összes megszámlálhatónál nagyobb κ számosságra.* ■

Egy megszámlálható és teljes T elméletre jelölje $f_T(\kappa)$ azt, hogy T-nek hány páronként nem izomorf κ számosságú modellje van. Morley tétele úgy is fogalmazható, hogy ha $f_T(\kappa) = 1$ valamilyen $\kappa > \omega$-ra, akkor $f_T(\kappa) = 1$ minden ilyen κ-ra. Felvetődik a kérdés: milyen f számosságoperációhoz található olyan T megszámlálható és teljes elmélet, hogy $f = f_T$? Nyilván $f(\kappa) \leq 2^\kappa$ kell hogy álljon, és Morley tétele egy további megszorítást jelent. Nemrégiben *S. Shelah*nak lényegében sikerült jellemeznie az ilyen operációkat. A jellemzés segítségével azután bizonyította az ún. *Morley sejtést*: f_T monoton, azaz $\kappa \geq \lambda > \omega$ esetén $f_T(\kappa) \geq f_T(\lambda)$.

A végpontok nélküli sűrű rendezésnek lényegében egyetlen megszámlálható modellje van, hiszen ω-kategorikus; az osztható torziómentes Abel csoportoknak megszámlálható sok (attól függően, hány dimenziós a racionálisok feletti vektortér), a kezdőponttal rendelkező, végpont nélküli diszkrét rendezésnek pedig kontinuum sok (lásd a feladatokat). A 9.9. tétel bizonyításában definiáltuk a sűrű rendezésnek három teljes bővítését, ezek közül (b) úgy állt elő, hogy az új $\{c_i : i \in \omega\}$ konstansjelekre felírtuk a $c_i < c_{i+1}$ axiómákat. Az így kapott elmélet egy megszámlálható modelljében az alaphalmazt azonosíthatjuk a racionális számokkal, a rendezést pedig azok szokásos nagyság szerinti rendezésével. A c_i konstansjelek interpretáltjai egy monoton növekvő sorozatot alkotnak. Három lehetőségünk van:

(i) $\lim c_i = \infty$,
(ii) $\lim c_i$ létezik és irracionális,
(iii) $\lim c_i$ létezik és racionális.

Könnyű látni, hogy az azonos csoportba eső struktúrák egymással izomorfak, a különbözőkbe esők pedig nem, így ennek az elméletnek pontosan három egymással nem izomorf megszámlálható modellje van.

A (c)$_n$ bővítésben még a racionális számok mindegyikét n szín valamelyikével megszíneztük úgy, hogy minden $k < n$-re a k színű pontok sűrűn helyezkedjenek el, továbbá a c_i konstansok interpretáltjai 0 színűek legyenek. Az elmélet modelljeiben a fenti (iii) eset n további alesetre bomlik:

(iii)$_k$ $\lim c_i$ létezik, racionális, és k színű.

Nem nehéz látni, hogy ezek páronként nem izomorfak, tehát (c)$_n$-nek pontosan $n + 2$ páronként nem izomorf megszámlálható modellje van. Így vannak teljes elméletek 1, 3, 4, 5, ..., megszámlálható, valamint kontinuum sok páronként nem izomorf megszámlálható modellel. A hiányzó esetről szól *R. Vaught* alábbi meglepő tétele.

9.12. Tétel (Vaught tétele) *Egy megszámlálható teljes elméletnek nem lehet pontosan két nem izomorf megszámlálható modellje.* ∎

4. Megőrzési tételek

Legyen $\Delta \subset F(t)$ valamilyen formulahalmaz. Azt mondjuk, hogy a $\Gamma \subset F(t)$ elmélet Δ-beli formulákkal *axiomatizálható* ha van olyan $\Delta' \subset \Delta$, hogy Γ modelljeinek osztályát Δ' is axiomatizálja, vagyis hogy $\Gamma \models \Delta'$ és $\Delta' \models \Gamma$. A Γ *megőrződik* egy struktúrákon végzett operációra nézve, ha Γ modelljeinek osztálya zárt az adott operációra. Más szavakkal, ha Γ egy modelljén végrehajtjuk az operációt, a kapott struktúra ismét modellje lesz Γ-nak. A megőrzési tételek olyan jellegű állítások, melyek ezt a két fogalmat kapcsolják össze: Γ akkor és csak akkor örződik meg valamilyen operációra, ha ilyen vagy olyan formulákkal axiomatizálható. Ezek közül mutatunk be néhányat. Emlékeztetünk rá, hogy $\exists_n$ és $\forall_n$ formulahalmazok a prenex formulákat osztályozták, a $\exists_1$ (egzisztenciális) formulákban egy nyílt formulát csak $\exists$ kvantorok, a $\forall_1$ (univerzális) formulákban csak $\forall$ kvantorok előzik meg.

9.13. Tétel $\Gamma \subset F(t)$ *akkor és csak akkor axiomatizálható zárt univerzális formulákkal, ha* Γ *részstruktúrákra megőrződik.*

Bizonyítás Elsőként tegyük fel, hogy Γ axiomatizálható $\forall_1$ formulákkal. Ekkor persze ha $\mathfrak{A}$ modellje Γ-nak és minden $\mathfrak{A}$-ban igaz zárt $\forall_1$ formula igaz $\mathfrak{B}$-ben is, akkor $\mathfrak{B}$ is modellje lesz Γ-nak. Legyen tehát $\mathfrak{A} \models \Gamma$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\varphi \in F(t)$ egy zárt $\forall_1$ formula, és tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi$. Ekkor $\varphi \equiv \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}\, \psi$ ahol $\psi \in F(t)$ nyílt. Nyílt formulák igazsága részstruktúrákra öröklődik, tehát $\mathfrak{B} \models \varphi$, és így $\mathfrak{B} \models \Gamma$. Tehát Γ valóban megőrződik a részstruktúrákra.

A fordított irányú implikáció bizonyítására a 9.7. lemmát fogjuk használni. Benne Δ a zárt $\forall_1$ formulák halmaza lesz, T üres, Γ pedig az adott elmélet. A Δ-ra szabott feltétel nyilván teljesül, így csak $(*)$-ot kell ellenőriznünk, vagyis azt, hogy ha az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrákra $\mathfrak{A} \models \Gamma$, továbbá minden zárt $\varphi \in \forall_1$-re $\mathfrak{A} \models \varphi$ esetén $\mathfrak{B} \models \varphi$, akkor $\mathfrak{B} \models \Gamma$. A lemma következménye éppen az, hogy Γ axiomatizálható univerzális formulákkal, ahogyan kívántuk.

A feltétel ellenőrzéséhez vegyük $\mathfrak{B}$-nek a $\Delta^0_{\mathfrak{B}}$ diagramját. Ha most $\Delta^0_{\mathfrak{B}} \cup \Gamma$ konzisztens, akkor készen vagyunk: ennek tetszőleges $\mathfrak{C}$ modelljébe a 7.19. lemma szerint $\mathfrak{B}$ részstruktúraként beágyazható, Γ öröklődik részstruktúrákra, $\mathfrak{C} \models \Gamma$ és így $\mathfrak{B} \models \Gamma$. Tegyük fel tehát, hogy $\Delta^0_{\mathfrak{B}} \cup \Gamma$ nem konzisztens. Ekkor a 9.3. következmény szerint véges sok $\delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \in F(t)$ nyílt formulára és $\vec{c} = \langle c_0, \ldots, c_{k-1}\rangle$ $\mathfrak{B}$ elemeit jelentő konstansjelekre $\delta_i(\vec{c}) \in \Delta^0_{\mathfrak{B}}$, míg $\Gamma \models \neg\big(\delta_0(\vec{c}) \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1}(\vec{c})\big)$, ahonnan a 9.1. lemma miatt $\Gamma \models \forall\vec{x}\, \neg\big(\delta_0(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1}(\vec{x})\big)$. Az $\mathfrak{A}$-t úgy választottuk, hogy Γ-nak modellje legyen, tehát ez a zárt $\forall_1$ formula igaz $\mathfrak{A}$-ban következésképp igaz $\mathfrak{B}$-ben. Ugyanakkor a $\vec{c}$ konstansjelek interpretáltjai azt mutatják, hogy

$$\mathfrak{B} \models \exists\vec{x}\ \big(\delta_0(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1}(\vec{x})\big)\,,$$

ami lehetetlen. A tételt bizonyítottuk. ∎

9.14. Tétel Γ *akkor és csak akkor axiomatizálható zárt* $\exists_1$ *formulákkal, ha* Γ *megőrződik a bővítésre.*

Bizonyítás Az előző tétel bizonyításának hű mása, így csak a nehezebb részt bizonyítjuk. Ehhez szintén a 9.7. lemmát használjuk, Δ a zárt $\exists_1$ formulák halmaza, T üres, Γ pedig az adott elmélet. A $(*)$ feltétel ellenőrzéséhez legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ t típusú struktúra, $\mathfrak{A} \models \Gamma$, és $\mathfrak{B}$-ben igaz az összes olyan zárt $\exists_1$ formula, ami igaz $\mathfrak{A}$-ban. Azt szeretnénk látni, hogy $\mathfrak{B} \models \Gamma$, ehhez pedig elég megmutatnunk, hogy létezik $\mathfrak{B}$-nek olyan $\mathfrak{B}'$ elemi bővítése, amibe $\mathfrak{A}$ részstruktúraként beágyazható. Γ ugyanis megőrződik a bővítésre, tehát $\mathfrak{A} \models \Gamma$ miatt $\mathfrak{B}' \models \Gamma$, és mivel $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}'$, azért $\mathfrak{B} \models \Gamma$ is teljesül.

Az, hogy $\mathfrak{B}$-nek van ilyen elemi bővítése pontosan azt jelenti, hogy $\Delta^0_{\mathfrak{A}} \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$ konzisztens – ennek modelljeibe ugyanis $\mathfrak{B}$ elemien, $\mathfrak{A}$ pedig részstruktúraként beágyazható. Mivel $\Delta^0_{\mathfrak{A}}$ zárt az $\wedge$-re, azért ha a konzisztencia nem állna, volna olyan $\delta(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F(t)$ nyílt formula, és volnának $\mathfrak{A}$-beli elemeket jelölő $\vec{c} = \langle c_0, \ldots, c_{n-1}\rangle$ konstansjelek, amikre $\delta(\vec{c}) \in \Delta^0_{\mathfrak{A}}$ és $\Delta_{\mathfrak{B}} \models \neg\delta(\vec{c})$, azaz a 9.1. lemma szerint $\Delta_{\mathfrak{B}} \models \forall\vec{x}\,\neg\delta(\vec{x})$, ahonnan $\Delta_{\mathfrak{B}} \not\models \exists\vec{x}\,\delta(\vec{x})$. Feltételünk szerint $\mathfrak{B}$-ben teljesül az összes $\mathfrak{A}$-ban igaz zárt $\exists_1$ formula, ezért $\mathfrak{A} \not\models \exists\vec{x}\,\delta(\vec{x})$, ami ellentmond $\Delta^0_{\mathfrak{A}} \models \delta(\vec{c})$-nek. ■

9.15. Tétel Γ *akkor és csak akkor axiomatizálható* $\forall_2$ *formulákkal, ha megőrződik megszámlálható növekvő láncok uniójára.*

Bizonyítás A könnyebb irány: álljon Γ zárt $\forall_2$ formulákból, és legyen $i \in \omega$-ra $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_{i+1}$, és $\mathfrak{A}_i \models \Gamma$. Azt akarjuk látni, hogy ekkor $\mathfrak{A} = \bigcup\{\mathfrak{A}_i : i \in \omega\}$ is modellje Γ-nak. A Γ elemei

$$\varphi \equiv \forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\psi(\vec{x}, \vec{y})$$

alakúak, ahol $\psi \in F(t)$ kvantormentes, és összes szabad változóját feltüntettük. Legyen $\vec{c} = \langle c_0, \ldots, c_{n-1}\rangle \in A^n$ tetszőleges. Ezekhez található olyan $i \in \omega$, hogy mindegyik c_j eleme A_i-nek. $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ miatt vannak A_i-nek olyan $\vec{d} = \langle d_0, \ldots, d_{m-1}\rangle$ elemei, amikkel $\mathfrak{A}_i \models \psi[\vec{c}, \vec{d}]$. Itt ψ kvantormentes és $\mathfrak{A}_i$ részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak, ezért ebből $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{c}, \vec{d}]$, tehát $\mathfrak{A} \models \varphi$. Így $\mathfrak{A}$ valóban modellje Γ-nak.

Most tegyük fel, hogy Γ megszámlálható unióra megörződik. Ismét a 9.7. lemmát használjuk Δ-nak a zárt $\forall_2$ formulákat választva. A lemma Δ-ra vonatkozó feltétele nyilván teljesül, így azt kell igazolnunk, hogy ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$, továbbá minden $\mathfrak{A}$-ban igaz zárt $\forall_2$ formula igaz $\mathfrak{B}$-ben is, akkor $\mathfrak{B} \models \Gamma$. Ehhez elsőként a következőt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$-ra, $\mathfrak{B}$-re állnak ezek a feltételek. Ekkor

$(*)$ vannak olyan $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}'$ struktúrák, hogy $\mathfrak{A}$ elemien beágyazható $\mathfrak{A}'$-be, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}'$ és $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{B}'$.

Ennek bizonyításához legyen $\Delta_{\mathfrak{A}}$ az $\mathfrak{A}$-nak és $\Delta_{\mathfrak{B}}$ a $\mathfrak{B}$-nek teljes diagramja, álljon továbbá $T \subset \Delta_{\mathfrak{B}}$ az összes $\Delta_{\mathfrak{B}}$-beli zárt $\forall_1$ formulából. Állítjuk, hogy $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ konzisztens. Valóban, ha nem így volna, akkor a 9.3. következmény szerint volna véges sok δ_0, $\ldots$, $\delta_{n-1} \in T$ hogy $\Delta_{\mathfrak{A}} \models \neg(\delta_0 \wedge \ldots \wedge \delta_{n-1})$. A $\forall_1$ formulák logikai ekvivalencia erejéig zártak az $\wedge$-re, tehát volna egyetlen $\delta \in T$ is, amire $\Delta_{\mathfrak{A}} \models \neg\delta$. Ám $\neg\delta \equiv \exists\vec{y}\,\psi(\vec{c}, \vec{y})$, ahol $\psi \in F(t)$ nyílt, és $\vec{c} = \langle c_0, \ldots, c_{n-1}\rangle$ a $\mathfrak{B}$ elemeit jelölő konstansjelek. Így tehát $\Delta_{\mathfrak{A}} \models \forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\psi(\vec{x}, \vec{y})$, hiszen $\mathfrak{B}$ elemeit jelölő konstansjelek nem fordulnak elő $\Delta_{\mathfrak{A}}$-ban.

Az itt látható $\forall_2$ formula tehát igaz $\mathfrak{A}$-ban, ugyanakkor $\delta \in T$ miatt nem igaz $\mathfrak{B}$-ben, ami ellentmond feltételünknek. $T \cup \Delta_{\mathfrak{A}}$ valóban konzisztens, legyen $\mathfrak{A}'$ olyan modellje, amiben a $b \in B$-t jelölő konstansjel $\mathfrak{A}'$-beli interpretáltját azonosítjuk b-vel. Ezzel elértük, hogy $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}'$ teljesüljön, és persze $\mathfrak{A}$ elemien beágyazható $\mathfrak{A}'$-be.

Következőként azt állapítjuk meg, hogy $\Delta_B \cup \Delta^0_{\mathfrak{A}'}$ konzisztens, ennek tetszőleges modellje megfelelő $\mathfrak{B}'$-t ad. A konzisztencia lényegében ugyanaz, mint amit a 9.13. tételben bizonyítottunk: $\mathfrak{B}$ modellje $\Delta_{\mathfrak{B}}$-nek, és $\mathfrak{A}'$ konstrukciója miatt minden $t_{\mathfrak{B}}$ típusú zárt $\forall_1$ formula, ami igaz $\mathfrak{B}$-ben, igaz lesz $\mathfrak{A}'$-ben is. Ezzel $(*)$-ot igazoltuk.

Most $(*)$ ismételt alkalmazásával növő struktúrák olyan

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \ldots$$

sorozatát kapjuk, amire $\mathfrak{A}_i$ elemien beágyazható $\mathfrak{A}_{i+1}$-be, tehát speciálisan elemien ekvivalens is vele, továbbá $\mathfrak{B}_i \prec \mathfrak{B}_{i+1}$. Mindegyik $\mathfrak{A}_i$ elemien ekvivalens $\mathfrak{A}$-val, és így modellje Γ-nak. A Γ-ra tett feltevésünk szerint az $\mathfrak{A}_i$ struktúrák $\mathfrak{A}_\omega$ uniója is modellje Γ-nak. Ugyanakkor a növő

$$\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2 \prec \ldots$$

elemi lánc uniója is ugyanaz az $\mathfrak{A}_\omega$ struktúra, $\mathfrak{A}_\omega \models \Gamma$ és $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{A}_\omega$ miatt $\mathfrak{B}$ is modellje Γ-nak, amit bizonyítani akartunk. ■

A zárt $\forall_2$ formulákkal axiomatizálható elméleteket lényegében már a $(*)$ alatt felírt állítás is jellemzi. Ezt megfogalmazandó, bevezetünk egy elnevezést. Az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ struktúrák *szendvicset alkotnak*, ha $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$ és $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$. A $\mathfrak{B}$ struktúrát az $\mathfrak{A}$ *szendvicseli,* ha vannak olyan $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ struktúrák, hogy $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ szendvicset alkotnak, és $\mathfrak{A}$ elemien beágyazható $\mathfrak{A}'$-be. Az előző tétel bizonyításából kiolvasható a következő

9.15a. Tétel Γ *akkor és csak akkor axiomatizálható zárt $\forall_2$ formulákkal, ha Γ megőrződik a szendvicselésre, azaz ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$ és $\mathfrak{A}$ szendvicseli $\mathfrak{B}$-t, akkor $\mathfrak{B} \models \Gamma$.* ■

Hasonló módon adható jellemzés a zárt $\forall_n$ illetve $\exists_n$ formulákkal axiomatizálható elméletekre. Példaképpen bemutatjuk a $\forall_{2n}$-ről szóló tételt. A $2n+1$ struktúrából álló

$$\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{B}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{B}_{n-1} \subset \mathfrak{A}_{n-1} \subset \mathfrak{B}_n$$

lánc *n-szendvics*, ha $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{B}_n$ és $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \ldots \prec \mathfrak{A}_{n-1}$. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ *n-szendvicseli* $\mathfrak{B}$*-t*, ha vannak olyan $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ és $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ struktúrák, hogy $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_{n-1} \subset \mathfrak{B}_n$ egy n szendvics, és $\mathfrak{A}$ elemien beágyazható $\mathfrak{A}_0$-ba,

9.16. Tétel (Keisler szendvics tétele) Γ *akkor és csak akkor axiomatizálható zárt $\forall_{2n}$ formulákkal, ha Γ megőrződik az n-szendivcselésre, azaz ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$ és $\mathfrak{A}$ n-szendvicseli $\mathfrak{B}$-t, akkor $\mathfrak{B} \models \Gamma$.* ■

5. Formula interpoláció

A következő ártalmatlannak látszó tétellel kezdjük.

9.17. Tétel *Tegyük fel, hogy a közös t típusú $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrák elemien ekvivalensek. Ekkor van olyan t típusú $\mathfrak{C}$, amibe $\mathfrak{A}$ és és $\mathfrak{B}$ is elemien beágyazható.*

Bizonyítás A 7.21. lemma szerint elegendő igazolnunk, hogy $\Delta_{\mathfrak{A}} \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$ konzisztens. Mind $\Delta_{\mathfrak{A}}$ mind $\Delta_{\mathfrak{B}}$ zárt az $\wedge$-re, tehát ha uniójuk mégis inkonzisztens, lenne $\delta(\vec{x}) \in F(t)$ formula és $\mathfrak{B}$ elemeit jelentő $\vec{c} = \langle c_0, \ldots, c_{n-1}\rangle$ konstansjelek, hogy $\delta(\vec{c}) \in \Delta_{\mathfrak{B}}$ és $\Delta_{\mathfrak{A}} \models \neg\delta(\vec{c})$. A 9.1. lemma szerint ekkor $\Delta_{\mathfrak{A}} \models \forall\vec{x}\,\neg\delta(\vec{x})$. Ugyanakkor $\delta(\vec{c}) \in \Delta_{\mathfrak{B}}$ miatt $\mathfrak{B} \models \exists\vec{x}\,\delta(\vec{x})$, ellentmondásban azzal, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ elemien ekvivalensek. ■

Ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ nem azonos típusúak, akkor milyen feltételt kell szabnunk, hogy a tétel állítása érvényben maradjon? Ezzel foglalkozunk a következőkben. Először magát a kérdést kell pontosabban megfogalmaznunk. Legyen tehát t' és t'' két összeférhető hasonlósági típus, azaz ha valamilyen jel szerepel t'-ben és t''-ben is, akkor az vagy mindkettőben függvényjel vagy mindkettőben relációjel, és persze ugyanannyi változós. Ilyen feltétel mellett beszélhetünk t' és t'' egyesítéséről és metszetéről is, az előbbit $t' \cup t''$, az utóbbit $t' \cap t''$ jelöli.

Legyen $\mathfrak{C}$ egy $t' \cup t''$ típusú struktúra. $\mathfrak{C}$-nek t' típusú *reduktuma* az a t' típusú struktúra, ami mindenben megegyezik $\mathfrak{C}$-vel csak a nem t'-beli jelekről egyszerűen „elfeledkezünk.” Ezt a struktúrát $\mathfrak{C}\restriction t'$ fogja jelölni.

Most rögzítsük az összeférhető t' és t'' típusokat. A rövidség kevéért $(t' \cap t'')$-t mindenütt t-vel jelöljük.

9.18. Tétel *Legyen $\mathfrak{A}$ és t' típusú, $\mathfrak{B}$ egy t'' típusú struktúra. Tegyük fel hogy mindent $\varphi \in F(t)$-re $\mathfrak{A} \models \varphi$ és $\mathfrak{B} \models \varphi$ ekvivalensek, vagyis $\mathfrak{A}\restriction t$ és $\mathfrak{B}\restriction t$ elemien ekvivalens. Ekkor van olyan $t' \cup t''$típusú $\mathfrak{C}$ struktúra, hogy $\mathfrak{A}$ elemien beágyazható $\mathfrak{C}\restriction t'$-be és $\mathfrak{B}$ elemien beágyazható $\mathfrak{C}\restriction t''$-be.*

A bizonyítást egy lemmával kezdjük.

9.19. Lemma *Legyen $\mathfrak{A}$ egy t' típusú, $\mathfrak{B}$ egy t'' típusú struktúra úgy, hogy $\mathfrak{A}\restriction t \prec \mathfrak{B}\restriction t$. Ekkor van olyan t' típusú $\mathfrak{A}'$, amire $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{B}\restriction t \prec \mathfrak{A}'\restriction t$.*

Bizonyítás Tekintsük a $\Delta_{\mathfrak{A}} \cup \Delta_{\mathfrak{B}\restriction t}$ elméletet, melyben $\mathfrak{A}$ elemeit $\Delta_{\mathfrak{A}}$-ban és $\Delta_{\mathfrak{B}\restriction t}$-ben is ugyanazokkal a konstansjelekkel jelöltük. Ennek tetszőleges modellje megfelel a feltételeknek, így csak azt kell megmutatnunk, hogy konzisztens. Ha nem, akkor A-beli elemeket jelölő $\vec{c}$ és $(B \setminus A)$-beli elemeket jelölő $\vec{d}$ konstansjelekre valamint $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in F(t)$ formulára $\varphi(\vec{c}, \vec{d}) \in \Delta_{\mathfrak{B}\restriction t}$ és $\Delta_{\mathfrak{A}} \models \neg\varphi(\vec{c}, \vec{d})$. A $\vec{d}$ konstansjelek nem fordulnak elő $\Delta_{\mathfrak{A}}$-ban, ezért $\Delta_{\mathfrak{A}} \models \forall\vec{y}\,\neg\varphi(\vec{c}, \vec{y})$, azaz

$$\mathfrak{A} \models \forall\vec{y}\,\neg\varphi(\vec{x}, \vec{y})[\vec{c}_{\mathfrak{A}}].$$

Feltételünk szerint $\mathfrak{A}\restriction t \prec \mathfrak{B}\restriction t$ és $\forall\vec{y}\,\neg\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ egy t típusú formula, tehát $\mathfrak{B} \models \forall\vec{y}\,\neg\varphi(\vec{x}, \vec{y})[\vec{c}_{\mathfrak{B}}]$. Ez viszont lehetetlen, mivel $\varphi(\vec{c}, \vec{d}) \in \Delta_{\mathfrak{B}\restriction t}$ miatt $\mathfrak{B} \models \exists\vec{y}\,\varphi(\vec{x}, \vec{u})[\vec{c}_{\mathfrak{B}}]$.
■

Ezek után rátérünk a 9.18. tétel bizonyítására. Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ olyanok, amilyenek a tétel kimondásában szerepeltek, és vegyük $\mathfrak{A} \restriction t$ valamint $\mathfrak{B}$ teljes diagramját. Az, hogy ezek uniója, $\Delta_{\mathfrak{A} \restriction t} \cup \Delta_{\mathfrak{B}}$ konzisztens, ugyanúgy látható be, mint a 9.17. tétel bizonyításában. Legyen ennek egy modellje $\mathfrak{B}_0$. Az $\mathfrak{A}$-beli elemekhez tartozó konstansjelek $\mathfrak{B}_0$-beli interpretáltjait azonosítsuk $\mathfrak{A}$ megfelelő elemeivel. Ezzel elértük hogy $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ választással $\mathfrak{A}_0$-ra és $\mathfrak{B}_0$-ra teljesüljenek a 9.19. lemma feltételei. Tehát van olyan t' típusú $\mathfrak{A}_1$, amire $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_0 \restriction t \prec \mathfrak{A}_1 \restriction t$, és most $\mathfrak{B}_0$-ra és $\mathfrak{A}_1$-re teljesül (ebben a sorrendben) a feltétel. Innen egy t'' típusú $\mathfrak{B}_1$ elemi bővítését kapjuk $\mathfrak{B}_0$-nak. A lemmát most $\mathfrak{A}_1$-re és $\mathfrak{B}_1$-re alkalmazva adódik $\mathfrak{A}_2$, stb. Végül is a t' típusú

$$\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_2 \prec \dots$$

valamint a t'' típusú

$$\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2 \prec \dots$$

bővülő elemi láncokat kapjuk, amikre még az is teljesül, hogy

$$\mathfrak{A}_0 \restriction t \prec \mathfrak{B}_0 \restriction t \prec \mathfrak{A}_1 \restriction t \prec \mathfrak{B}_1 \restriction t \prec \dots$$

Vegyük az $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \dots$ valamint a $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \dots$ láncok unióját. Ezek alaphalmaza $A_0 \subset B_0 \subset A_1 \subset B_1 \dots$ miatt megegyezik, és a konstrukció alapján tetszőleges t-beli jel interpetáltja mindkét unióban ugyanaz. Így vehetjük a két struktúra $t' \cup t''$ típusú $\mathfrak{C}$ egyesítését: $\mathfrak{C} \restriction t'$ az $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_1 \prec \dots$ lánc uniója, $\mathfrak{C} \restriction t''$ pedig a $\mathfrak{B}_0 \prec \mathfrak{B}_1 \prec \dots$ lánc uniója. De ekkor $\mathfrak{C} \restriction t'$ elemi bővítése $\mathfrak{A}_0$-nak, tehát $\mathfrak{C} \restriction t'$-be $\mathfrak{A}$ elemi részként beágyazható. Ugyanezért $\mathfrak{C} \restriction t''$ elemi bővítése $\mathfrak{B}_0$-nak, amibe viszont $\mathfrak{B}$ ágyazható be elemi részként. Így $\mathfrak{C} \restriction t''$-be $\mathfrak{B}$ is beágyazható, a tételt bizonyítottuk. ■

A tétel közvetlen következménye *A. Robinson* nevezetes tétele.

9.20. Tétel (Robinson konzisztencia tétele) *Legyenek* $\Gamma' \subset F(t')$ *és* $\Gamma'' \subset F(t'')$ *konzisztens elméletek. Tegyük fel, hogy nincs olyan zárt* $\varphi \in F(t' \cap t'')$, *amire* $\Gamma' \models \varphi$ *és* $\Gamma'' \models \neg\varphi$ *is állna. Ekkor* $\Gamma' \cup \Gamma''$ *is konzisztens.*

Bizonyítás Nevezzük a $\langle \Gamma', \Gamma'' \rangle$ párt *jónak*, ha teljesítik a tételben szereplő feltételt. Megmutatjuk hogy Γ' és Γ'' is kiterjeszthető maximális konzisztens elméletté úgy, hogy továbbra is jó párt alkossanak. Először is, ha $\langle \Gamma', \Gamma'' \rangle$ jó, akkor tetszőleges zárt $\psi \in F(t')$-re vagy ψ-t vagy $\neg\psi$-t hozzávehetjük Γ'-höz. Ha ugyanis lennének olyan φ_1, $\varphi_2 \in F(t' \cap t'')$ formulák, amikre

$$\begin{array}{lcl} \Gamma' \cup \{\psi\} \models \varphi_1 & \text{és} & \Gamma'' \models \neg\varphi_1, \\ \Gamma' \cup \{\neg\psi\} \models \varphi_2 & \text{és} & \Gamma'' \models \neg\varphi_2, \end{array}$$

akkor $\Gamma' \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ és $\Gamma'' \models \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ is állna, tehát $\langle \Gamma', \Gamma'' \rangle$ sem lenne jó. Másodjára ha $\{\Gamma'_\xi : \xi < \sigma\}$ bővülő elméletsorozat mindegyik tagjára a $\langle \Gamma'_\xi, \Gamma'' \rangle$ pár jó, akkor a kompaktsági tétel miatt az $\langle \bigcup\{\Gamma'_\xi : \xi < \sigma\}, \Gamma'' \rangle$ pár is jó. Így $F(t')$ zárt formuláit egyesével sorra véve elérhetjük, hogy Γ' maximális ellentmondástalan elmélet legyen, és hasonlóan járhatunk el Γ'' esetén is. Nyilván elegendő megmutatnunk, hogy az így kibővített elméletek uniója konzisztens.

Megállapíthatjuk, hogy ekkor $\Gamma' \cap \Gamma''$ maximális konzisztens $t' \cap t''$ típusú elmélet lesz. Valóban, $F(t' \cap t'') \subset F(t') \cap F(t'')$ miatt minden zárt $\varphi \in F(t' \cap t'')$-re vagy φ vagy

$\neg\varphi$ eleme Γ'-nek és Γ''-nek is, de az nem lehet, hogy az egyik Γ'-ben, a másik Γ''-ben legyen.

Legyen $\mathfrak{A}$ a Γ'-nek és $\mathfrak{B}$ a Γ''-nek modellje. Ekkor persze $\mathfrak{A}\upharpoonright t$ és $\mathfrak{B}\upharpoonright t$ egyaránt modellje $\Gamma'\cap\Gamma''$-nek, és így elemien ekvivalensek. Az előző tétel szerint ekkor van olyan $t'\cup t''$ típusú $\mathfrak{C}$ struktúra, amibe $\mathfrak{A}$ is és $\mathfrak{B}$ is elemien beágyazható. Tehát $\mathfrak{C}\models\Gamma'\cup\Gamma''$, az elméletek uniója konzisztens. ■

Az alábbi tétel *W. Craig*tól származik.

9.21. Tétel (Craig interpolációs tétele) *Tegyük fel, hogy a $\varphi\in F(t')$ és $\psi\in F(t'')$ formulákra $\varphi\models\psi$. Ekkor van olyan $\vartheta\in F(t'\cap t'')$, hogy $\varphi\models\vartheta$ és $\vartheta\models\psi$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy nincs ilyen ϑ, és legyen φ-nek illetve ψ-nek a lezártja $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$. Robinson konzisztencia tétele a $\Gamma'=\{\overline{\varphi}\}$ és a $\Gamma''=\{\neg\overline{\psi}\}$ elméletekre alkalmazható, hiszen ha valamely zárt $\vartheta\in F(t'\cap t'')$-ra $\Gamma'\models\vartheta$ és $\Gamma''\models\neg\vartheta$ volna, akkor $\varphi\models\vartheta$ és $\neg\overline{\psi}\models\neg\vartheta$, azaz $\vartheta\models\psi$ is állna. De ekkor $\Gamma'\cup\Gamma''=\{\overline{\varphi},\neg\overline{\psi}\}$ konzisztens, ami ellentmond a $\varphi\models\psi$ feltételünknek. ■

Craig tételéből hasonlóan egyszerűen adódik Robinson konzisztencia tétele (lásd a feladatokat). A 9.20. és 9.21. tételeket tekintik az elsőrendű logika alapvető tételeinek.

Craig tételét most egy olyan állítás igazolására használjuk, ami szigorúan véve már a magasabbrendű logikába tartaozik. Néhány definícióval kezdjük. Legyen t egy hasonlósági típus, és P egy t-ben nem szereplő n-változós relációjel. A $\Sigma(P)\subset F(t\cup\{P\})$ elméletről azt mondjuk, hogy *implicite definiálja* P-t, ha akárhogyan is rögzítjük egy $t\cup\{P\}$ típusú struktúra alaphalmazát és az összes t-beli jel interpretációját, legfeljebb egyféleképpen lehet a P interpretációját definiálni ahhoz, hogy a $\Sigma(P)$ formulahalmaz modelljét kapjuk. Másképpen mondva, ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ is modellje $\Sigma(P)$-nek, $A=B$ és minden $\varrho\in t$-re $\varrho_{\mathfrak{A}}=\varrho_{\mathfrak{B}}$, akkor $P_{\mathfrak{A}}=P_{\mathfrak{B}}$ is igaz. Még másképpen mondva, ha $\mathfrak{A}$ egy $t\cup\{P,P'\}$ típusú struktúra, és $\mathfrak{A}$-ban igaz a $\Sigma(P)\cup\Sigma(P')$ formulahalmaz, akkor

$$\mathfrak{A}\models\forall\vec{x}\,\left(P(\vec{x})\leftrightarrow P'(\vec{x})\right).$$

Természetesen ez a helyzet, ha valamilyen $\vartheta(\vec{x})\in F(t)$ formulára

$$\Sigma(P)\models\vartheta(\vec{x})\leftrightarrow P(\vec{x}),$$

azaz P mindössze egy t típusú formula rövidítése. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy a $\Sigma(P)$ *explicite definiálja* P-t. *E. W. Beth* bizonyította 1953-ban, hogy ez másképpen nem is lehet.

9.22. Tétel (Beth tétele) *A $\Sigma(P)\subset T(t\cup\{P\})$ elmélet akkor és csak akkor definiálja implicite P-t, ha explicite definiálja.*

Bizonyítás Csak a nehezebb irányt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy

$$\Sigma(P)\cup\Sigma(P')\models P(\vec{x})\leftrightarrow P'(\vec{x}).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\Sigma(P)$ elemei zárt formulák. A kompaktsági tétel miatt van $\Sigma(P)$-nek olyan véges $\Delta(P)$ része, hogy már

$$\Delta(P)\cup\Delta(P')\models P(\vec{x})\leftrightarrow P'(\vec{x}).$$

Jelöljön $\vec{c}$ új konstansjelekből álló n-est, ekkor persze $\Delta(P)\cup\Delta(P')\models P(\vec{c})\leftrightarrow P'(\vec{c})$, és a dedukció tétel értelmében például $\Delta(P)\cup\{P(\vec{c})\}\models\Delta(P')\to P'(\vec{c})$. Alkalmazzuk most Craig interpolációs tételét a bal oldali $t \cup \{\vec{c}, P\}$ és a jobb oldal $t \cup \{\vec{c}, P'\}$ típusú formulákra. Kapjuk, hogy van olyan $\vartheta(\vec{x}) \in F(t)$, melyre

$$\Delta(P) \cup \{P(\vec{c})\} \models \vartheta(\vec{c}),$$

és

$$\vartheta(\vec{c}) \qquad\qquad \models \Delta(P') \to P'(\vec{c}).$$

Az elsőből szintén a dedukciótétel alapján $\Delta(P) \models P(\vec{c}) \to \vartheta(\vec{c})$, míg a másodikból $\Delta(P') \models \vartheta(\vec{c}) \to P'(\vec{c})$. Ám ekkor $\Delta(P) \models \vartheta(\vec{c}) \to P(\vec{c})$ is fennáll, hiszen formulák igazsága nem változik attól hogy egy relációjelet másképpen jelölünk. Ezért $\Delta(P) \models P(\vec{c}) \leftrightarrow \vartheta(\vec{c})$, vagyis $\Delta(P) \subset \Sigma(P)$ alapján

$$\Sigma(P) \models P(\vec{x}) \leftrightarrow \vartheta(\vec{x})$$

mivel a $\vec{c}$ konstansjelek nem fordulnak elő $\Sigma(P)$-ben. ∎

6. Típuselkerülési tételek

Legyen t egy hasonlósági típus. Egy pozitív egész n-re n-*típusnak* nevezzük n-változós $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F(t)$ formulák tetszőleges Σ halmazát. Egy $\mathfrak{A}$ struktúra a_0, $\ldots$, a_{n-1} elemei *realizálják* a $\Sigma \subset F(t)$ típust, ha minden $\varphi \in \Sigma$-ra $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$, és $\mathfrak{A}$ *elkerüli* a Σ típust, ha $\mathfrak{A}$-nak nincs olyan n-ese, ami Σ-t realizálná. Így például egy $\mathcal{G}$ csoport pontosan akkor torziócsoport, ha $\mathcal{G}$ elkerüli az

$$\{x \neq 0 \to n \cdot x \neq 0 : \ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}$$

típust, vagy egy rendezett test akkor archimedeszi, ha elkerüli az

$$\{x > n \cdot 1 : \ n \in \omega\}$$

típust. A racionális számok legszűkebb algebrai bővítését egyértelműen jellemzi, hogy ez az algebrailag zárt test elkerüli a

$$\{p(x) \neq 0 : \ p \quad \text{racionális együtthatós polinom}\}$$

típust. A Peano axiómák egy $\mathfrak{A}$ modellje pedig akkor és csak akkor sztenterd, ha elkerüli az $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 1+1$, $x \neq 1+1+1$, $\ldots$ formulákból álló típust.

A kompaktsági tétel segítségével pontosan megmondhatjuk, hogy egy $\Gamma \subset F(t)$ elméletnek mikor van olyan modellje, ami a Σ n-típust realizálja.

9.23. Tétel *A következő két állítás ekvivalens:*

(i) *Γ valamely modellje realizálja Σ-t;*

(ii) *Σ-nak minden véges $\{\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}\}$ részére $\Gamma \cup \{\exists \vec{x}\ \big(\sigma_0(\vec{x}) \wedge \ldots \wedge \sigma_{k-1}(\vec{x})\big)\}$ konzisztens.*

Bizonyítás (i) $\to$ (ii) nyilvánvaló. (ii) $\to$ (i)-hez jelöljön $\vec{c}$ n darab új konstansjelet, a feltétel szerint a $\Gamma \cup \{\sigma(\vec{c}) : \ \sigma \in \Sigma\}$ elmélet minden véges része konzisztens, tehát az egész elmélet is. Így van modellje, abban pedig a $\vec{c}$ konstansjelek interpretáltjai realizálják Σ-t. ∎

Sokkal nehezebb kérdés, hogy mikor van Γ-nak olyan modellje, ami egy adott Σ n-típust elkerül. Erre nem is ismeretes a fentihez hasonló egyszerűen megfogalmazható szükséges és elégséges feltétel. Az alábbi elégséges feltételt a jelölések egyszerűsítése érdekében csak 1-típusra mondjuk ki, de ugyanúgy tetszőleges n-típusra is bizonyítható.

A $\Gamma \subset F(t)$ elméletről azt mondjuk, hogy *lokálisan elkerüli* a $\Sigma \subset F(t)$ 1-típust, ha nincs olyan $\psi(x) \in F(t)$ egyváltozós formula, melyre $\Gamma \cup \{\exists x\, \psi(x)\}$ konzisztens, és minden $\sigma \in \Sigma$-ra

$$\Gamma \models \psi(x) \to \sigma(x).$$

Kicsit másképp fogalmazva, nincs olyan formula, hogy Γ modelljeiben a formulát kielégítő elemek automatikusan Σ típusúak volnának, és valamely modellben ilyen elem létezik is.

9.24. Tétel (Típuselkerülési tétel) *Legyen t véges vagy megszámlálható hasonlósági típus. Ha a $\Gamma \subset F(t)$ elmélet lokálisan elkerüli a $\Sigma \subset F(t)$ típust, akkor van Γ-nak olyan modellje, ami elkerüli Σ-t.*

Bizonyítás Vegyünk minden $i \in \omega$-ra egy új c_i konstansjelet, és legyen $t' = t \cup \{c_i : i \in \omega\}$. $F(t')$ továbbra is megszámlálható, így felsorolhatjuk a zárt $\varphi \in F(t')$ formulákat ω típusban, legyenek ezek $\{\varphi_i : i \in \omega\}$. Egy c_i konstansjelre a $\{\sigma(c_i) : \sigma \in \Sigma\}$ formulahalmazt röviden csak $\Sigma(c_i)$-vel jelöljük.

Definiálni fogjuk a t' típusú konzisztens elméletek egy növekvő sorozatát. Legyen $\Gamma_0 = \Gamma$ és tegyük fel, hogy $\Gamma_i = \Gamma \cup \{\Theta_0, \ldots, \Theta_{i-1}\}$ már definiálva van. Legyen

$$\Theta = \Theta_0 \wedge \ldots \wedge \Theta_{i-1},$$

és legyen $\vec{c} = \langle c_{j_0}, \ldots, c_{j_{s-1}} \rangle$ az összes Θ-ban előforduló konstansjel az esetleges c_i-t kivéve. Ekkor persze van olyan $\vartheta(x, \vec{y}) \in F(t)$, hogy $\Theta \equiv \vartheta(c_i, \vec{c})$. Állítjuk, hogy

$$\Gamma \cup \{\vartheta(c_i, \vec{c})\} \not\models \Sigma(c_i).$$

Tegyük fel, hogy nem így volna. Γ_i konzisztens, tehát $\Gamma \cup \{\exists x\, \exists \vec{y}\, \vartheta(x, \vec{y})\}$ is az, továbbá minden $\sigma \in \Sigma$-ra $\Gamma \models \vartheta(c_i, \vec{c}) \to \sigma(c_i)$, vagyis mivel sem $\vec{c}$ sem c_i nem fordul elő Γ-ban, $\Gamma \models \exists \vec{y}\, \vartheta(x, \vec{y}) \to \sigma(x)$, ami ellentmond annak, hogy Γ lokálisan elkerüli Σ-t. Így van olyan $\sigma_i \in \Sigma$, hogy $\Gamma \cup \{\vartheta(c_i, \vec{c})\} \not\models \sigma_i(c_i)$, azaz $\Gamma \cup \{\Theta, \neg\sigma_i(c_i)\}$ konzisztens.

Legyen most az $F(t')$-beli zárt formulák felsorolásából az i-edik φ_i. A konzisztens $\Gamma \cup \{\Theta, \neg\sigma_i(c_i)\}$ elmélethez vagy φ_i-t vagy $\neg\varphi_i$-t hozzá lehet venni úgy, hogy továbbra is konzisztens maradjon. Ha $\neg\varphi_i$-t vehetjük hozzá, akkor legyen $\Theta_i \equiv \neg\sigma_i(c_i) \wedge \neg\varphi_i$. Ha φ_i-t vehetjük hozzá és φ_i nem $\exists x\, \psi_i(x)$ alakú, akkor legyen $\Theta_i \equiv \neg\sigma_i(c_i) \wedge \varphi_i$. Végül ha $\varphi_i \equiv \exists x\, \psi_i(x)$ alakú, akkor legyen p az a legkisebb index, amire c_p nem fordul elő a $\vartheta(c_i, \vec{c})$, $\sigma(c_i)$ és φ_i formulák egyikében sem, és legyen $\Theta_i \equiv \neg\sigma_i(c_i) \wedge \varphi_i \wedge \psi_i(c_p)$. Világos, hogy $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\Theta_i\}$ továbbra is konzisztens marad.

Legyen $\Gamma_\omega = \bigcup\{\Gamma_i : i \in \omega\} \subset F(t')$. Mivel mindegyik Γ_i konzisztens volt, azért a kompaktsági tétel miatt Γ_ω is konzisztens lesz. Legyen $\varphi \in F(t')$ tetszőleges zárt formula. Ez a fenti felsorolásban valamilyen indexszel előfordul, például $\varphi \equiv \varphi_i$. De ekkor vagy $\Theta_i \models \varphi_i$ vagy $\Theta_i \models \neg\varphi_i$, tehát vagy $\Gamma_\omega \models \varphi$ vagy $\Gamma_\omega \models \neg\varphi$, következésképp

Γ_ω teljes is. Legyen $\mathfrak{A}$ a Γ_ω egy modellje. Megállapíthatjuk, hogy a c_i konstansjelek interpretáltjai közül egyik sem realizálja Σ-t, hiszen $\Gamma_\omega \models \neg\sigma_i(c_i)$. Most $\mathfrak{A}$-ra és a $C = \{c_i : i \in \omega\}$ konstansjelekre teljesül a 7.20. lemma feltétele, azaz ha a $\psi(x) \in F(t')$ egyváltozós formulára $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi(x)$, akkor valamilyen $c_p \in C$ konstansjelre $\mathfrak{A} \models \psi(c_p)$. Valóban, Γ_ω teljes és $\exists x\, \psi(x)$ zárt, ezért $\Gamma_\omega \models \exists x\, \psi(x)$ is teljesül. Ez a zárt formula a $\{\varphi_i : i \in \omega\}$ felsorolásban is szerepel, mondjuk i indexszel. Γ_ω konzisztens és $\Gamma_\omega \models \varphi_i$, ezért csak $\Theta_i \equiv \neg\sigma_i(c_i) \wedge \varphi_i \wedge \psi_i(c_p)$ lehetett, tehát $\Gamma_\omega \models \psi_i(c_p)$, ahonnan $\mathfrak{A} \models \psi(c_p)$, ahogyan állítottuk.

A 7.20. lemma szerint ekkor a $\{c_i : i \in \omega\}$ konstansjelek interpretációi $\mathfrak{A}$-nak egy $\mathfrak{B}$ elemi részét alkotják. Ez a $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ továbbra is modellje Γ_ω-nak, tehát Γ-nak is, és mindegyik eleme elkerüli Σ-t. A keresett modellt tehát megkaptuk. ■

A bizonyításban lényegesen kihasználtuk, hogy a t típus véges vagy megszámlálható. E nélkül a tétel nem is marad érvényben. Példaként álljon t a $\{c_i : i \in \omega\}$ és a $\{d_\xi : \xi < \omega_1\}$ konstansjelekből. Állítsa a $\Gamma \subset F(t)$ elmélet azt, hogy az összes d_ξ interpretáltja különböző, vagyis $\Gamma = \{d_\xi \neq d_\eta : \xi < \eta < \omega_1\}$. Nyilvánvalóan Γ modelljei legalább ω_1 számosságúak. Ha most a Σ 1-típus az $\{x \neq c_i : i \in \omega\}$ formulákból áll, akkor a Σ-t elkerülő struktúra minden eleme a c_i konstansjelek valamelyikének interpretáltja, tehát a struktúra legfeljebb megszámlálható. Ezért nincs Γ-nak olyan modellje, ami elkerülné Σ-t, míg könnyen látható módon Γ lokálisan elkerüli Σ-t.

A típuselkerülési tétel bizonyítása könnyen módosítható, hogy az alábbi általánosabb tétel is kiadja.

9.25. Tétel (Kiterjesztett típuselkerülési tétel) *Legyen t véges vagy megszámlálható típus és $i \in \omega$-ra $\Sigma_i \subset F(t)$ valamely 1-típus. Tegyük fel, hogy a $\Gamma \subset F(t)$ elmélet minden $i \in \omega$-ra lokálisan elkerüli Σ_i-t. Ekkor van Γ-nak olyan modellje, ami az összes Σ_i-t elkerüli.* ■

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az egyszerű csoportok osztálya nem axiomatizálható.
2. Mutassuk meg, hogy az archimédeszi testek osztálya nem axiomatizálható.
3. Igazoljuk, hogy az algebrailag zárt testek valamint a valósan zárt testek osztálya nem végesen axiomatizálható.
4. Mutassuk meg, hogy a síkbarajzolható gráfok osztálya nem axiomatizálható végesen.
5. Egy gráf *3-kromatikus*, ha csúcsit három színnel lehet színezni úgy, hogy éllel összekötött csúcsok különböző színűek legyenek, de ezt két színnel már nem lehet megtenni. Mutassuk meg, hogy a 3-kromatikus gráfok osztálya nem axiomatizálható.
6. Mutassuk meg, hogy ha egy formula minden 0 karakterisztikájú testben igaz, akkor van olyan $n \in \omega$, hogy minden $p > n$-re az a p karakterisztikájú testekben is igaz.
7.* Mutassuk meg, hogy az atommentes Boole algebrák elmélete ω-kategorikus, de $\kappa > \omega$-ra nem κ-kategorikus.
8. Adjunk meg egy megszámlálható halmazon kontinuum sok páronként nem izomorf diszkrét lineáris rendezést.
9. Bizonyítsuk be, hogy minden elméletnek van olyan konzervatív bővítése, ami kvantoreliminálható.
10.* Egy nyílt $\varphi \in F(t)$ formuláról azt mondjuk, hogy *elemi Horn formula*, ha prímformulák és prímformulák negáltjainak diszjunkciója, de φ-ben legfeljebb egy prímformula szerepelhet negációjel nélkül. Bizonyítsuk be, hogy egy elmélet akkor és csak akkor axiomatizálható elemi Horn formulákkal, ha megőrződik részstruktúrákra és direkt szorzatra.

11. Legyen $T \subset F(t)$ tetszőleges elmélet. Azt mondjuk, hogy Γ *megőrződik részstruktúrákra T mellett*, ha T-nek két $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ modelljére $\mathfrak{A} \models \Gamma$ és $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{B} \models \Gamma$. Mutassuk meg, hogy Γ akkor és csak akkor ilyen, ha axiomatizálható $T \cup \forall_1$-beli formulákkal.
12. Bizonyítsuk be Craig interpolációs tételéből Robinson konzisztencia tételét.
13.* Mutassuk meg, hogy van olyan (megszámlálható) diszkrét lineáris rendezés, amin kétféleképpen is meg tudunk olyan kétváltozós f függvényt definiálni, amire
    - $f(0, x) = f(x, 0) = x$,
    - $f(Sx, y) = f(x, Sy) = Sf(x, y)$,
    - $x \leq y \leftrightarrow \exists z\, f(x, z) = y$.

    Útmutatás: használjuk fel Beth tételét és azt, hogy a rendezés elmélete kvantoreliminálható.
14. Bizonyítsuk be a kiterjesztett típuselkerülési tételt.
15.* Legyen $\mathfrak{A}$ egy megszámlálható végpont nélküli lineárisan rendezett struktúra. Igazoljuk, hogy van $\mathfrak{A}$-nak olyan valódi elemi $\mathfrak{B}$ bővítése, hogy minden $b \in B \setminus A$ és $a \in A$ esetén $a \leq_{\mathfrak{B}} b$. (Az ilyen bővítéseket *végkiterjesztésnek* nevezzük.) Mi a helyezet, ha $\mathfrak{A}$-ról csak azt tesszük fel, hogy parciálisan rendezett? Útmutatás: használjuk a kibővített típuselkerülési tételt a következő elméletre: $\Delta_{\mathfrak{A}} \cup \{c \neq c_a : a \in A\}$ és a következő típusokra: $\Sigma_a = \{x \leq c_a \wedge x \neq c_b : b \leq a\}$ minden $a \in A$-ra.
16.* Legyen $\Gamma \subset F(t)$ maximális ellentmondástalan elmélet. Bővítsük ki a t típust $|t| \cdot \omega$ sok új konstansjellel. Konstruáljunk olyan $\Gamma \subset \Gamma' \subset F(t')$ ellentmondástalan elméletet, hogy
    - tetszőleges zárt $\varphi \in F(t')$ formulára $\varphi \in \Gamma'$ vagy $\neg\varphi \in \Gamma'$,
    - ha a $\exists x\, \varphi(x) \in \Gamma'$ és a $\varphi(x)$ formulának csak x szabad változója, akkor valamely új c konstansjelre $\varphi(c) \in \Gamma'$.

    Útmutatás: másoljuk le a típuselkerülési tétel bizonyítását.
17. Bizonyítsuk be Gödel teljességi tételét. Útmutatás: használjuk fel az előző valamint a 6.9. feladatot.