8. fejezet

A kompaktsági tétel

Elsőként olyan eljárást mutatunk be, mely struktúrák egy halmazából egyetlen struktúrát állít elő, mégpedig úgy, hogy az eredmény valamilyen értelemben tükrözi a kiindulási struktúrák leggyakrabban előforduló tulajdonságait. Az eljárás az *ultraszorzat* képzés. Csírái már *T. Skolem* 30-as években megjelent munkáiban megtalálhatók, de a módszer általánosan ismertté csak *J. Łoś* 1955-ben megjelent dolgozata nyomán vált. A modern halmazelméletben, és elsősorban a nagy számosságokkal kapcsolatos vizsgálatokban az ultraszorzat képzés alapvető fontosságú.

A továbbiakban előkészítjük az ultraszorzat cseppet sem egyszerű definícióját. Emlékeztetünk rá, hogy egy X halmazra $\mathcal{P}(X)$ jelöli X részhalmazainak halmazát.

8.1. Definíció Egy nem üres X halmaz részhalmazainak $U \subset \mathcal{P}(X)$ rendszere *szűrő* (filter), ha

(i) U nem üres, és az üres halmaz nem eleme;
(ii) felszálló, azaz $A \in U$ és $A \subset B \subset X$ esetén $B \in U$; végül
(iii) metszetre zárt, azaz $A, B \in U$ esetén $A \cap B \in U$.

$U \subset \mathcal{P}(X)$ *ultraszűrő*, ha szűrő, és még a következő feltételt is teljesíti:

(iv) minden $A \subset X$-re vagy $A \in U$ vagy $X \setminus A \in U$.

Az X részhalmazainak egy $F \subset \mathcal{P}(X)$ rendszere *véges metszet tulajdonságú* vagy másképpen *centrált*, ha véges sok F-beli halmaz metszete nem üres.

Szűrőre példa a [0, 1] zárt intervallum egységnyi Lebesque mértékű részeinek halmaza, vagy a számegyenesnek mindazok a részhalmazai, melyek tartalmaznak olyan nyílt intervallumot, aminek 0 eleme. Tetszőleges X halmazra szűrő az egyetlen elemű $\{X\}$ rendszer is, általában $\emptyset \neq A \subset X$ mellett a

$$\{B \subset X : A \subset B\}$$

halmazrendszer. Az ilyen alakú szűrőket *főszűrőknek* vagy *triviális szűrőknek* nevezzük. Egy főszűrő nyilván akkor ultraszűrő, ha A egy elemű. Nem ilyen alakú ultraszűrőket csak az alábbi lemma alapján kaphatunk.

8.2. Lemma *Legyen X nem üres halmaz, és $F \subset \mathcal{P}(X)$ véges metszet tulajdonságú. Ekkor F kiterjeszthető ultraszűrővé.*

Bizonyítás $\mathcal{P}(X)$ véges metszet tulajdonságú részeinek növekvő láncát véve, annak uniója is véges metszet tulajdonságú lesz. Ezért a Zorn lemma szerint van maximális F-et tartalmazó véges metszet tulajdonságú része $\mathcal{P}(X)$-nek, állítjuk, hogy ez az $U \subset \mathcal{P}(X)$ ultraszűrő.

Először is $U \neq \emptyset$ és $\emptyset \notin U$ nyilvánvalóan teljesül. Az (ii) pont ellenőrzéséhez tegyük fel, hogy $A \in U$ és $A \subset B \subset X$. Állítjuk, hogy ekkor B-t is hozzávehetjük az U-hoz, továbbra is véges metszet tulajdonságú rendszert kapunk. Valóban, ha $A_0, \ldots, A_{n-1} \in U$, akkor

$$\emptyset \neq A \cap A_0 \cap \ldots \cap A_{n-1} \subset B \cap A_0 \cap \ldots \cap A_{n-1},$$

tehát $U \cup \{B\}$ is véges metszet tulajdonságú. U maximalitása miatt ez csak úgy lehet, ha $B \in U$, ezért U felszálló.

Most tegyük fel, hogy A és B is eleme U-nak. Ugyanúgy, mint az előbb most is láthatjuk, hogy $U \cup \{A \cap B\}$ is véges metszet tulajdonságú, és megint U maximalitása miatt $A \cap B \in U$, vagyis U metszetre zárt.

Végül legyen $A \subset X$, és tegyük fel, hogy $X \setminus A \notin U$. Azt szeretnénk megmutatni, hogy $A \in U$, ehhez elég belátni, hogy $U \cup \{A\}$ is véges metszet tulajdonságú. Vegyünk véges sok U-beli elemet, $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$-et. Az előbbiek szerint U metszetre zárt, tehát

$$B = A_0 \cap \ldots \cap A_{n-1} \in U;$$

továbbá U felszálló, ezért $X \setminus A \notin U$ miatt nem lehet, hogy $B \subset X \setminus A$ legyen. Tehát $B \not\subset X \setminus A$, vagyis

$$\emptyset \neq A \cap B = A \cap A_0 \cap \ldots \cap A_{n-1}.$$

$U \cup \{A\}$ ezek szerint valóban véges metszet tulajdonságú, amivel az állítást bizonyítottuk. ■

Minden szűrő speciálisan véges metszet tulajdonságú is, így a szűrők is kiterjeszthetők ultraszűrővé. Ha az $U \subset \mathcal{P}(X)$ ultraszűrő nem főszűrő, akkor persze nem tartalmazhat egy elemű halmazt, így minden $a \in X$-re $X \setminus \{a\} \in U$. De U metszetre zárt, azért U-nak tartalmaznia kell az összes véges komplementerű halmazt is. $\emptyset \notin U$, ami azt jelenti, hogy véges halmazon minden ultraszűrő főszűrő. Egészen más a helyzet végtelen alaphalmaz esetén.

8.3. Következmény *Minden végtelen X halmazon létezik olyan $U \subset \mathcal{P}(X)$ ultraszűrő, ami nem főszűrő.*

Bizonyítás Álljon F az X-nek azokból a részhalmazaiból, melyek komplementuma véges. F-nek az üres halmaz nem eleme, metszetre zárt, és így véges metszet tulajdonságú. Az előző tétel szerint kiterjeszthető egy U ultraszűrővé. Ha most U főszűrő lenne, akkor valamely $a \in X$-re $\{a\} \in U$. De ez nem lehet, mivel $X \setminus \{a\} \in F$. ■

A véges komplementerű halmazok rendszere mellett van egy másik fontos véges metszet tulajdonságú halmazrendszer, amit használni fogunk. Legyen X egy végtelen halmaz, $[X]^{<\omega}$ jelöli X véges részhalmazainak rendszerét:

$$[X]^{<\omega} = \{A \subset X : |A| < \omega\}.$$

Az alaphalmaz, aminek részhalmazai alkotják a rendszert, $[X]^{<\omega}$. Minden egyes $a \in X$-re legyen $\hat{a}$ az $[X]^{<\omega}$-nak a következő része:

$$\hat{a} = \{A \in [X]^{<\omega} : a \in A\}.$$

Az $F = \{\hat{a} : a \in X\} \subset \mathcal{P}([X]^{<\omega})$ véges metszet tulajdonságú, hiszen minden a_0, …, $a_{n-1} \in X$-re

$$\{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \in \hat{a}_0 \cap \hat{a}_1 \cap \ldots \cap \hat{a}_{n-1},$$

tehát a megfelelő F-beli elemek metszete nem üres.

Legyen I egy indexhalmaz, és minden $\xi \in I$-re legyen A_ξ tetszőleges nem üres halmaz. Az A_ξ-k $\prod\limits_{\xi \in I} A_\xi$-vel jelölt *direkt szorzatán* mindazoknak az a függvényeknek a halmazát értjük, melyek értelmezési tartománya I, és minden $\xi \in I$-re $a(\xi) \in A_\xi$.

Megállapodunk abban, hogy ha félreértést nem okoz, a $\prod$ jel alól a $\xi \in I$ jelzést elhagyjuk, továbbá az $a \in \prod A_\xi$ függvény ξ helyen felvett értékét, $a(\xi)$-t az a függvény ξ-edik *koordinátájának* mondjuk és a_ξ-vel is jelöljük.

8.4. Definíció Legyenek $\xi \in I$-re $\mathfrak{A}_\xi$-k közös t típusú struktúrák. Az $\mathfrak{A}_\xi$-k *direkt szorzatán* azt a $\prod\limits_{\xi \in I} \mathfrak{A}_\xi$-vel jelölt t típusú $\mathfrak{B}$ struktúrát értjük, amiben

(i) az alaphalmaz $B = \prod A_\xi$;

(ii) az n-változós $f \in t$ függvényjel interpretáltja az a függvény, melynek ξ-edik koordinátája éppen f-nek $\mathfrak{A}_\xi$-beli interpretáltja, azaz minden a_0, …, a_{n-1}-re

$$\big(f_{\mathfrak{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1})\big)_\xi = f_{\mathfrak{A}_\xi}\big(a_0(\xi), \ldots, a_{n-1}(\xi)\big)\,;$$

(iii) az n-változós $r \in t$ relációjel interpretáltja B^n-nek azokból az elemeiből áll, melyek ξ-edik koordinátáiból alkotott n-es eleme $r_{\mathfrak{A}_\xi}$-nek: $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in r_{\mathfrak{B}}$ pontosan akkor, ha minden $\xi \in I$-re $\langle a_0(\xi), \ldots, a_{n-1}(\xi)\rangle \in r_{\mathfrak{A}_\xi}$.

Legyen a változójeleknek egy $\mathfrak{B}$ feletti értékelése e és $\xi \in I$-re álljon e_ξ ennek ξ-edik koordinátáiból, azaz minden x változójelre $e_\xi(x) = \big(e(x)\big)_\xi$. Világos, hogy e_ξ egy $\mathfrak{A}_\xi$ feletti értékelés. A direkt szorzat definíciója alapján a kifejezések felépítésére vonatkozó indukcióval könnyen adódik, hogy minden $k \in K(t)$ kifejezésre és $\mathfrak{B}$ feletti e értékelésre a k kifejezése $\mathfrak{B}$-beli értékének, $k_{\mathfrak{B}}[e]$-nek ξ-edik koordinátája éppen $k_{\mathfrak{A}_\xi}[e_\xi]$. Ezért egy $\varphi \in F(t)$ prímformulára $\mathfrak{B} \models \varphi[e]$ akkor és csak akkor, ha minden $\xi \in I$-re $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi[e_\xi]$. Sajnos ez nem marad érvényben tetszőleges formulára, még abban a gyenge értelemben sem, hogy ha minden $\xi \in I$-re $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi[e_\xi]$, akkor ebből következne, hogy $\prod \mathfrak{A}_\xi \models \varphi[e]$ (lásd a feladatokat). Így a direkt szorzat, bármilyen természetesen adódik is, nem felel meg céljainknak.

A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogyan lehet a direkt szorzatot módosítani úgy, hogy kellemesebb tulajdonságai legyenek. Legyen ehhez U egy ultraszűrő az I indexhalmazon, és jelölje $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{A}_\xi$ struktúrák $\prod \mathfrak{A}_\xi$ direkt szorzatát. Definiáljuk B-n a $\approx$ kétváltozós relációt a következőképpen: a, $b \in B$-re $a \approx b$, ha

$$\{\xi \in I : a_\xi = b_\xi\} \in U.$$

Világos, hogy ez a reláció szimmetrikus és $I \in U$ miatt reflexív is. A tranzitivitás abból adódik, hogy U szűrő, s így két elemével együtt azok metszeténél bővebb halmazokat is tartalmazza. Így $\approx$ ekvivalencia reláció, jelölje $a \in B$ ekvivalencia osztályát $\overline{a} = \{b \in B : a \approx b\}$.

8.5. Definíció Legyenek $\xi \in I$-re $\mathfrak{A}_\xi$-k közös t típusú struktúrák, U pedig egy ultraszűrő I-n. Jelölje $\mathfrak{B}$ a $\prod \mathfrak{A}_\xi$ direkt szorzatot. Az $\mathfrak{A}_\xi$ struktúrák U szerinti *ultraszorzatán* azt a $\prod \mathfrak{A}_\xi / U$-val jelölt $\mathfrak{A}$ struktúrát értjük, amiben

(i) az A alaphalmaz B-nek a fenti $\approx$ szerinti ekvivalencia osztályaiból áll: $A = \{\overline{a} : a \in B\}$;

(ii) egy n-változós $f \in t$ függvényjelre és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in B$-re
$$f_{\mathfrak{A}}(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}) = \overline{f_{\mathfrak{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1})};$$

(iii) egy n-változós $r \in t$ relációjelre és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in B$-re $\langle \overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}} \rangle \in r_{\mathfrak{A}}$ pontosan akkor, ha
$$\{\xi \in I : \langle a_0(\xi), \ldots, a_{n-1}(\xi) \rangle \in r_{\mathfrak{A}_\xi}\} \in U.$$

Ahhoz, hogy ez a definíció értelmes legyen, szükséges, hogy az (ii) alatt definiált érték valamint az (iii)-ben mondott feltétel független legyen az ekivalencia osztályok reprezentánsainak választásától. Annak bizonyításához, hogy ez valóban így is van, legyen $f \in t$ és $r \in t$ egy–egy n-változós függvény- illetve relációjel, továbbá $i < n$-re a_i, b_i olyan elemei B-nek, melyekre $a_i \approx b_i$. Azt kell látnunk, hogy ekkor
$$f_{\mathfrak{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \approx f_{\mathfrak{B}}(b_0, \ldots, b_{n-1}),$$
valamint hogy az $r_a = \{\xi \in I : \langle a_0(\xi), \ldots, a_{n-1}(\xi) \rangle \in r_{\mathfrak{A}_\xi}\}$ és $r_b = \{\xi \in I : \langle b_0(\xi), \ldots, b_{n-1}(\xi) \rangle \in r_{\mathfrak{A}_\xi}\}$ indexhalmazok egyszerre elemei U-nak. Ám $a_i \approx b_i$ szerint $X_i = \{\xi \in I : a_i(\xi) = b_i(\xi)\} \in U$, így ezek metszete, $X = X_0 \cap \ldots \cap X_{n-1}$ ugyancsak U-beli. Tetszőleges $\xi \in X$-re $f_{\mathfrak{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ ξ-edik koordintája, azaz $f_{\mathfrak{A}_\xi}(a_0(\xi), \ldots, a_{n-1}(\xi))$ megegyezik $f_{\mathfrak{B}}(b_0, \ldots, b_{n-1})$ ξ-edik koordinátájával hiszen ilyenkor $f_{\mathfrak{A}_\xi}$ argumentumai megegyeznek. Ezért azoknak a $\xi \in I$ indexeknek a halmaza, ahol $f_{\mathfrak{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ és $f_{\mathfrak{B}}(b_0, \ldots, b_{n-1})$ ξ-edik koordinátája megegyezik, bővebb X-nél, ezért U-beli. Ez volt az első belátandó állítás.

A másikhoz vegyük észre, hogy $r_a \cap X = r_b \cap X$, tehát akár r_a eleme U-nak, akár r_b, U-beli az $r_a \cap X = r_b \cap X$ indexhalmaz is. Ez része r_a-nak és r_b-nek is, tehát mind r_a mind r_b U-beli. Innen pedig a második állítás közvetlenül adódik.

Az ultraszorzatokra vonatkozó alapvető tétel *J. Łoś*tól származik. Ennek kimondásához legyen e olyan értékelés, ami minden változójelhez a $B = \prod \mathfrak{A}_\xi$ egy elemét rendeli. Legyen $\xi \in I$-re e_ξ az e-nek ξ-edik koordinátáiból álló $\mathfrak{A}_\xi$ fölötti értékelés: az ultraszorzat feletti $\overline{e}$ értékelést pedig definiáljuk úgy, hogy $\overline{e}(x_i) = \overline{e(x_i)}$.

8.6. Tétel (Łoś lemma) *Minden $\prod \mathfrak{A}_\xi$ feletti e értékelésre és $\varphi \in F(t)$ formulára, $\prod \mathfrak{A}_\xi / U \models \varphi[\overline{e}]$ akkor és csak akkor, ha $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi[e_\xi]\} \in U$.*

Bizonyítás Legyen $\mathfrak{B} = \prod \mathfrak{A}_\xi$ a struktúrák direkt szorzata, és jelöljük az ultraszorzatot $\mathfrak{A}$-val. Az állítást formulaindukcióval látjuk be. Legyen először φ prímformula. Az ultraszorzat definíciója szerint ha f n-változós függvényjel és $i < n$-re $a_i \in B$, akkor
$$f_{\mathfrak{A}}(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}) = \overline{f_{\mathfrak{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1})}.$$
Innen a kifejezések felépítésére vonatkozó indukcióval azonnal adódik, hogy minden $k \in K(t)$ kifejezésre és $\mathfrak{B}$ fölötti e értékelésre, $k_{\mathfrak{A}}[\overline{e}] = \overline{k_{\mathfrak{B}}[e]}$. Legyen most $\varphi \equiv k = k'$,

ahol k és k' két t típusú kifejezés. $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$ definíció szerint pontosan akkor, ha $k_{\mathfrak{A}}[\overline{e}] = k'_{\mathfrak{A}}[\overline{e}]$. Az előzőek alapján a bal oldal $k_{\mathfrak{B}}[e]$-nek, a jobb oldal pedig $k'_{\mathfrak{B}}[e]$-nek az ekvivalencia osztálya. Ez a két osztály akkor esik egybe, ha a reprezentáns elemek $\approx$ relációban állnak. Korábban láttuk, hogy $k_{\mathfrak{B}}[e]$ ξ-edik koordinátája éppen $k_{\mathfrak{A}_\xi}[e_\xi]$, így $\mathfrak{A} \models (k = k')[\overline{e}]$ pontosan akkor, ha

$$\{\xi \in I :\ k_{\mathfrak{A}_\xi}[e_\xi] = k'_{\mathfrak{A}_\xi}[e_\xi]\,\} \in U.$$

A kapcsos zárójelben álló feltétel éppen $\mathfrak{A}_\xi \models (k = k')[e_\xi]$, ahogyan kívántuk.

A $\varphi \equiv r(k_0, \ldots, k_{n-1})$ alakú prímformulára $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$ azt jelenti, hogy

$$\langle (k_0)_{\mathfrak{A}}[\overline{e}], \ldots, (k_{n-1})_{\mathfrak{A}}[\overline{e}]\rangle \in r_{\mathfrak{A}}.$$

Tudjuk, hogy $(k_i)_{\mathfrak{A}}[\overline{e}] = \overline{(k_i)_{\mathfrak{B}}[e]}$, ez utóbbi reprezentáns elem ξ-edik koordinátája pedig $(k_i)_{\mathfrak{A}_\xi}[e_\xi]$. A 8.5. definíció (iii) pontja szerint tehát $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$ pontosan akkor, ha

$$\big\{\xi \in I :\ \langle (k_0)_{\mathfrak{A}_\xi}[e_\xi], \ldots, (k_{n-1})_{\mathfrak{A}_\xi}[e_\xi]\rangle \in r_{\mathfrak{A}_\xi}\ \big\} \in U,$$

az itt álló feltétel pedig láthatóan $\mathfrak{A} \models r(k_0, \ldots, k_{n-1})[e_\xi]$. Ezzel a tétel állítását bizonyítottuk arra az esetre, mikor φ prímformula.

A továbbiakban a jelölések egyszerűsítése érdekében legyen $I_\varphi = \{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi[e_\xi]\,\}$. Tegyük fel, hogy az állítást már tudjuk φ-re, és legyen $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\overline{e}]$. Ez pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\overline{e}]$, ami az indukciós feltevés folytán ekvivalens azzal, hogy $I_\varphi \notin U$. De I_φ és $I_{\neg\varphi}$ egymás komplementerei, ezért közülük pontosan az egyik eleme U-nak. Így $I_\varphi \notin U$ ekvivalens azzal, hogy $I_{\neg\varphi} \in U$, ami az állítást adja $(\neg\varphi)$-re.

Másodszor tegyük fel, hogy φ-re és ψ-re már tudjuk az állítást.. Ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi[\overline{e}]$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$ vagy $\mathfrak{A} \models \psi[\overline{e}]$, azaz ha vagy $I_\varphi \in U$ vagy $I_\psi \in U$. De $I_{\varphi\vee\psi} = I_\varphi \cup I_\psi$, ezért ha I_φ vagy I_ψ eleme U-nak, akkor $I_{\varphi\vee\psi}$ is eleme, ha pedig sem I_φ sem I_ψ nincs U-ban, akkor uniójuk sincs.

Így a $\varphi \equiv \exists x\, \psi$ alakú formulák maradtak hátra. $\mathfrak{A} \models \psi[\overline{e}]$ pontosan akkor, ha van olyan $\overline{a} \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models \psi[\overline{e}(x/\overline{a})]$. Az indukciós feltevés szerint ez pontosan akkor, ha

$$(*) \qquad \{\xi \in I :\ \mathfrak{A}_\xi \models \psi[e_\xi(x/a_\xi)]\,\} \in U,$$

hiszen $\overline{e}(x/\overline{a}) = \overline{e(x/a)}$ és ez utóbbi ξ-edik koordinátája $e_\xi(x/a_\xi)$. Ha $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$, akkor I_φ bővebb a $(*)$ alatt álló halmaznál, és így U-beli. Ha pedig $I_\varphi \in U$, akkor mindegyik $\xi \in I_\varphi$-re $\mathfrak{A}_\xi \models \exists x\, \psi[e_\xi]$, tehát van olyan $a_\xi \in A_\xi$, amivel $\mathfrak{A}_\xi \models \psi[e_\xi(x/a_\xi)]$; ha $\xi \notin I_\varphi$, akkor válasszuk $a_\xi \in A_\xi$-t tetszőlegesen. Arra az $a \in B$-re, aminek koordinátái éppen ezek az a_ξ-k, $(*)$ teljesül. A tételt bizonyítottuk. ∎

A Łoś lemmának fontos következménye az alábbi tétel.

8.7. Tétel (Ultraszorzatok alaptétele) *Minden $\varphi \in F(t)$-re $\prod \mathfrak{A}_\xi / U \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\{\xi \in I :\ \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\,\} \in U$.*

Bizonyítás Jelölje ismét $\mathfrak{A}$ az ultraszorzatot. Tegyük fel elsőként, hogy $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\,\} \in U$. Ekkor minden e értékelésre $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi[e_\xi]\,\} \in U$ hiszen ez bővebb mint az U-beli $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\}$ halmaz. Így a Łoś lemma miatt $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$, ahonnan $\mathfrak{A} \models \varphi$, hiszen az e értékelést tetszőlegesen választottuk.

Fordítva, minden $\xi \in I$-re amire csak lehet, válasszunk olyan $\mathfrak{A}_\xi$ fölötti e_ξ értékelést, amivel $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e_\xi]$, vagyis $\mathfrak{A}_\xi \models \neg\varphi[e_\xi]$. Ha ilyen értékelés nem volna, legyen e_ξ tetszőleges. Most $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\}$ és $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \neg\varphi[e_\xi]\}$ egymás komplementerei. Tehát ha az első nincs U-ban, akkor a második ott van, és a Łoś lemma szerint $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\overline{e}]$ arra az e értékelésre, melynek koordinátái éppen az e_ξ-k. Így $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, ahogyan kívántuk. ■

Gyakran erre a tételre is mint Łoś lemmára fogunk hivatkozni. Látszik, hogy sikerült célunkat elérni: elkerültük azt a direkt szorzatnál fellépő kényelmetlenséget, hogy van formula, amely minden struktúrában igaz, de a direkt szorzatban nem. Ultraszorzatnál ha $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi$ minden $\xi \in I$-re, akkor $\prod \mathfrak{A}_\xi / U \models \varphi$.

Ha U főszűrő, amit mondjuk az $\eta \in I$ generál, vagyis $U = \{X \subset I : \eta \in X\}$, akkor a $\prod \mathfrak{A}_\xi / U$ ultraszorzat izomorf $\mathfrak{A}_\eta$-val. Ezért véges sok struktúra ultraszorzata mindig izomorf a tényezők valamelyikével: az ultraszorzat csak nem főszűrők esetén adhat új struktúrát.

Amennyiben az ultraszorzatban mindegyik $\mathfrak{A}_\xi$ megegyezik, mindjuk $\mathfrak{B}$-vel, akkor $\prod \mathfrak{A}_\xi / U$ helyett az ${}^I\mathfrak{B}/U$ jelölést használjuk, és ezt $\mathfrak{B}$ *ultrahatványának* nevezzük. Az alaptétel szerint az ultrahatvány mindig elemien ekvivalens a kiindulási struktúrával, hiszen ilyenkor $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\}$ vagy üres, vagy maga I. Ennél azonban több is igaz.

8.8. Tétel *$\mathfrak{B}$ elemien beágyazható minden ${}^I\mathfrak{B}/U$ ultrahatványába.*

Bizonyítás Valamely $b \in B$-re jelöljük $\langle b\rangle$-vel ${}^IB$-nek azt az elemét, melynek összes koordinátája b, azaz $\xi \in I$-re $\langle b\rangle_\xi = b$. Álljon B' az $\mathfrak{A} = {}^I\mathfrak{B}/U$ ultrahatvány alaphalmazának azokból az elemeiből, melyek valamely $b \in B$-re $\langle b\rangle$ ekvivalencia osztályai:

$$B' = \{\overline{\langle b\rangle} : b \in B\}.$$

Mivel különböző b_0, $b_1 \in B$-re $\langle b_0\rangle \neq \langle b_1\rangle$, azért ezzel B és B' között kölcsönösen egyértelmű leképezést adtunk meg. Állítjuk, hogy ez a keresett beágyazás. Először is az ultraszorzat definíciója miatt ez művelet- és relációtartó, tehát izomorfizmus, így csak azt kell látnunk, hogy $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{A}$. Ehhez a 7.14.-ben kimondott Tarski–Vaught kritériumot használjuk. Legyenek $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ tetszőleges elemek, és tegyük fel, hogy a $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \in F(t)$ $(n+1)$-változós formulára $\mathfrak{A} \models \exists y\, \varphi[\overline{\langle b_0\rangle}, \ldots, \overline{\langle b_{n-1}\rangle}]$. A Łoś lemma szerint ekkor

$$\{\xi \in I : \mathfrak{B} \models \exists y\, \varphi[b_0, \ldots, b_{n-1}]\} \in U,$$

ami persze csak úgy lehet, ha $\mathfrak{B} \models \exists y\, \varphi[b_0, \ldots, b_{n-1}]$, azaz valamilyen $b \in B$-re $\mathfrak{B} \models \varphi[b_0, \ldots, b_{n-1}, b]$. Ám ekkor ismét a Łoś lemma miatt

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{\langle b_0\rangle}, \ldots, \overline{\langle b_{n-1}\rangle}, \overline{\langle b\rangle}].$$

Mivel $\overline{\langle b\rangle} \in B'$, a kritérium teljesül, $\mathfrak{B}'$ valóban elemi rész. ■

Legyen $\mathfrak{B}$ egy végtelen struktúra, és válasszunk ω-n egy nem triviális U ultraszűrőt. Ilyen a 8.2. lemma szerint létezik. Az U nem tartalmaz egyetlen véges halmazt sem, tehát ezek komplementumai vannak U-ban. Nézzük most a ${}^{\omega}\mathfrak{B}/U$ ultrahatványt. Vegyünk egy olyan $c \in {}^{\omega}B$ elemet, melynek mindegyik koordinátája különböző. Ilyen van, hiszen feltettük, hogy $\mathfrak{B}$ végtelen. Ennek a c-nek az ekvivalencia osztálya különbözik az összes konstansfüggvény ekvivalencia osztályától, hiszen $b \in B$-re

$$\{\xi \in \omega : c(\xi) = \langle b \rangle_{\xi}\} = \{\xi \in \omega : c(\xi) = b\}$$

legfeljebb egy elemű, és így nincs U-ban, vagyis $\overline{c} \neq \overline{\langle b \rangle}$. A $\mathfrak{B}$ struktúra elemeit „azonosítva" a konstansfüggvények ekvivalencia osztályaival, $\mathfrak{B}$-nek olyan elemi bővítését kapjuk, aminek van nem $\mathfrak{B}$-beli eleme is.

8.9. Lemma *Minden végtelen struktúrának van valódi elemi bővítése.* ■

8.10. Tétel (Felszálló Löwenheim–Skolem tétel) *Legyen $\mathfrak{A}$ egy végtelen struktúra, és κ egy számosság. Van $\mathfrak{A}$-nak olyan elemi bővítése, melynek számossága legalább κ.*

Bizonyítás Struktúrák egy κ hosszúságú növekvő elemi láncát definiáljuk. Legyen $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, és tegyük fel, hogy $\xi < \kappa$ olyan, hogy minden $\eta < \xi$-re definiáltuk $\mathfrak{A}_{\eta}$-t. Ha ξ limesz rendszám, legyen

$$\mathfrak{A}_{\xi} = \bigcup\{\mathfrak{A}_{\eta} : \eta < \xi\},$$

ez a 7.17. lemma miatt mindegyik korábbi $\mathfrak{A}_{\eta}$-nak elemi bővítése. Ha pedig ξ rákövetkező, mondjuk $\xi = \eta + 1$, akkor persze $\mathfrak{A}_0 \prec \mathfrak{A}_{\eta}$ miatt $\mathfrak{A}_{\eta}$ végtelen, s az előző lemma miatt van valódi elemi bővítése. Legyen $\mathfrak{A}_{\xi} = \mathfrak{A}_{\eta+1}$ ilyen.

A $\mathfrak{B} = \bigcup\{\mathfrak{A}_{\xi} : \xi < \kappa\}$ teljesíti a tétel követelményeit. A 7.17. lemma miatt elemi bővítése $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$-nak, továbbá

$$B = \bigcup\{A_{\xi} : \xi < \kappa\} = \bigcup\{A_{\xi+1} \setminus A_{\xi} : \xi < \kappa\},$$

hiszen minden $\xi < \kappa$-ra $A_{\xi} \subsetneq A_{\xi+1}$. Ezzel B-t felbontottuk κ darab nem üres diszjunkt részre, tehát a $\mathfrak{B}$ struktúra számossága legalább κ. ■

A felszálló és a 7.15. alatt bizonyított leszálló Löwenheim–Skolem tételek együttes alkalmazásából adódnak az alábbiak.

8.11. Következmény *Legyen $\kappa \geq |t| \cdot \omega$. Minden t típusú végtelen $\mathfrak{A}$ struktúrához található olyan κ számosságú $\mathfrak{B}$ struktúra, hogy $|A| \leq \kappa$ esetén $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, $\kappa < |A|$ esetén pedig $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$.* ■

8.12. Következmény *Legyen $\kappa \geq |t| \cdot \omega$, és legyen $\Gamma \subset F(t)$ tetszőleges elmélet. Ha Γ-nak van végtelen modellje, akkor van pontosan κ számosságú modellje is.* ■

A $\Gamma \subset F(t)$ elmélet κ-kategorikus, ha van κ számosságú modellje, de bármely két ilyen modellje izomorf. Egy elmélet kategoricitását és teljességét köti össze az alábbi tétel.

8.13. Tétel (Łoś–Vaught próba) *Tegyük fel, hogy a* $\Gamma \subset F(t)$ *elméletnek csak végtelen modelljei vannak. Ha valmilyen* $\kappa \geq |t| \cdot \omega$ *számosságra* Γ κ*-kategorikus, akkor teljes is.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy Γ nem teljes, azaz van olyan zárt $\varphi \in F(t)$ formula, hogy $\Gamma \not\models \varphi$ és $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Ekkor vannak Γ-nak olyan $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ modelljei, hogy $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ és $\mathfrak{B} \not\models \neg\varphi$, vagyis hogy $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ és $\mathfrak{B} \models \varphi$. Így speciálisan $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ nem elemien ekvivalensek. A feltétel szerint Γ-nak nincsenek véges modelljei, ezért $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ is végtelen. A 8.12 következmény szerint ekkor vannak olyan $\mathfrak{A}$-val és $\mathfrak{B}$-vel elemien ekvivalens $\mathfrak{A}'$ illetve $\mathfrak{B}'$ struktúrák, amik κ számosságúak. Ezek Γ-nak modelljei, de nem lehetnek izomorfak, hiszen még csak nem is elemien ekvivalensek. Így Γ nem κ-kategorikus. ■

Az ultraszorzat felhasználásával bizonyítjuk a 6.12. alatt már kimondott kompaktsági tételt is.

8.14. Tétel (Gödel kompaktsági tétele) *Legyen* $\Gamma \subset F(t)$ *tetszőleges elmélet. Ha* Γ *minden véges része konzisztens, akkor* Γ *is az.*

Bizonyítás Legyen $I = [\Gamma]^{<\omega}$, azaz álljon I a Γ véges részeiből. Feltételünk szerint $\xi \in I$ esetén a $\xi \subset F(t)$ véges formulahalmaz konzisztens, azaz van olyan t típusú $\mathfrak{A}_\xi$ struktúra, hogy $\mathfrak{A}_\xi \models \xi$. Definiáljuk minden $\varphi \in \Gamma$-ra a $\hat{\varphi} \subset I$ halmazt úgy, hogy álljon I-nek mindazon ξ elemeiből, melyek tartalmazzák φ-t:

$$\hat{\varphi} = \{\xi \in I : \varphi \in \xi\}.$$

Természetesen az I részhalmazainak $F = \{\hat{\varphi} : \varphi \in \Gamma\}$ rendszere véges metszet tulajdonságú: $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Gamma$ esetén

$$\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\} \in \hat{\varphi}_0 \cap \ldots \cap \hat{\varphi}_{n-1}.$$

A 8.2. lemma szerint F kiterjeszthető egy I feletti U ultraszűrővé. Legyen $\mathfrak{A} = \prod \mathfrak{A}_\xi / U$, állítjuk hogy ez a struktúra tanusítja hogy Γ konzisztens, azaz $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Ehhez legyen $\varphi \in \Gamma$ tetszőleges. Minden olyan $\xi \in I$-re, amire $\varphi \in \xi$, az $\mathfrak{A}_\xi$ választása miatt $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi$. A $\hat{\varphi}$ halmaz éppen az ilyen $\xi \in I$-k halmaza volt, ezért

$$\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\} \supset \hat{\varphi}.$$

Most $\hat{\varphi} \in F$ és U-t úgy kaptuk, hogy F-et kiterjesztettük. Tehát $\hat{\varphi} \in U$, amiből $\{\xi \in I : \mathfrak{A}_\xi \models \varphi\} \in U$. Az ultraszorzat alaptétel folytán $\prod \mathfrak{A}_\xi / U \models \varphi$. Ez tetszőleges $\varphi \in \Gamma$-ra így van, ezért az ultraszorzat valóban modellje Γ-nak. ■

A tétel bizonyítása során tulajdonképpen a következő, többet mondó állítást igazoltuk:

8.15. Lemma *Legyen* $I = [\Gamma]^{<\omega}$ *és tegyük fel, hogy minden* $\xi \in I$*-re* $\mathfrak{A}_\xi \models \xi$*. Ekkor van olyan* I *feletti* U *ultraszűrő, melyre* $\prod \mathfrak{A}_\xi / U \models \Gamma$. ■

A kompaktsági tétel segítségével új bizonyítást adunk a 8.9. lemmára, ezzel is érzékeltetni akarjuk az ilyen bizonyítások szokásos felépítését. Legyen tehát $\mathfrak{B}$ egy végtelen t típusú struktúra, azt szeretnénk megmutatni, hogy $\mathfrak{B}$-nek van valódi elemi bővítése.

Legyen $\Delta_{\mathfrak{B}}$ a $\mathfrak{B}$-nek $t_{\mathfrak{B}}$ típusú teljes diagramja. A 7.21. lemma szerint $\mathfrak{B}$ elemien beágyazható $\Delta_{\mathfrak{B}}$ tetszőleges modelljébe. Válasszunk most egy új, $t_{\mathfrak{B}}$-ben nem szereplő c konstansjelet, és legyen

$$\Gamma = \Delta_{\mathfrak{B}} \cup \{c \neq c_b : b \in B\}.$$

Ha megmutatjuk, hogy Γ konzisztens, készen vagyunk. Ha ugyanis $\mathfrak{A}$ a Γ-nak tetszőleges modellje, akkor $\mathfrak{A} \models \Delta_{\mathfrak{B}}$ miatt a $\{c_b : b \in B\}$ konstansjelek interpretáltjai egy $\mathfrak{B}$-vel izomorf $\mathfrak{B}'$ elemi részét alkotják $\mathfrak{A}$-nak. Ugyanakkor c interpretálja nincs $\mathfrak{B}'$-ben $\mathfrak{A} \models \{c \neq c_b : b \in B\}$ miatt, tehát $B' \subsetneqq A$. Most $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B}'$ alaphalmazát „azonosítva” megkapjuk a keresett bővítést.

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy Γ konzisztens. Ezt a kompaktsági tétel miatt elég Γ véges részeiről megmutatni. De Γ minden véges része része a

$$(*) \qquad \Delta_{\mathfrak{B}} \cup \{c \neq c_{b_0}, \dots, c \neq c_{b_{n-1}}\}$$

halmazok valamelyikének, tehát elég ezekről belátnunk, hogy konzisztensek. $\mathfrak{B}$ modellje $\Delta_{\mathfrak{B}}$-nek, és a maradék véges sok formula is teljesül, ha c interpretáltját úgy választjuk B elemei közül, hogy az különbözzön $b_0, \dots, b_{n-1}$ mindegyikétől. Ezt pedig meg tudjuk tenni, hiszen $\mathfrak{B}$ végtelen. Ezért $(*)$ valóban konzisztens, a 8.9. lemmát beláttuk.

Általában is igaz, hogy ultraszorzattal igazolható állítások jó részére adható a kompaktsági tételt használó bizonyítás is.

A kompaktsági tételt olyan állítások bizonyítására is fel lehet használni, melyeknek első pillanatban nem sok közük van a logikához. Ilyen az alábbi, elsőként deBruijn és Erdős által (másként) bizonyított állítás is.

Legyen k egy természetes szám. Egy $\mathcal{G}$ gráfról azt mondjuk, hogy k *színnel színezhető*, ha a gráf szögpontjait (csúcsait) meg tudjuk k színnel színezni úgy, hogy éllel összekötött csúcsok különböző színűek legyenek.

8.16. Tétel *Egy $\mathcal{G}$ gráf akkor és csak akkor színezhető k színnel, ha minden véges részgráfja k színnel színezhető.*

Bizonyítás Az állítás az egyik irányban triviális: ha $\mathcal{G}$ k színnel színezhető, akkor ugyanez a színezés minden véges részére jó lesz. A fordított irányú implikáció bizonyításához válasszunk $\mathcal{G}$-nek minden g szögpontjához egy c_g konstansjelet. Legyen még $\acute{E}$ egy kétváltozós, és $R_0, \dots, R_{k-1}$ összesen k darab egyváltozós relációjel. Az $\acute{E}$ reprezentálja azt, hogy a szögpontok össze vannak kötve, és ha egy szögpontra az R_i reláció fennáll, akkor azt az i-edik színnel színeztük meg. Legyen t az a hasonlósági típus, mely ezekből a jelekből áll, és álljon $\Gamma \subset F(t)$ a következő formulákból:

(i) $\acute{E}(c_{g_0}, c_{g_1})$ minden olyan $g_0, g_1 \in G$-re, melyek $\mathcal{G}$-ben éllel vannak összekötve,

(ii) $\forall x\,\big(\big(R_0(x) \vee R_1(x) \vee \dots \vee R_{k-1}(x)\big) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg\,\big(R_i(x) \wedge R_j(x)\big)\big),$

(iii) $\forall x\,\forall y\,\big(\acute{E}(x,y) \to \bigwedge_{i<n} \big(\neg R_i(x) \vee \neg R_i(y)\big)\big).$

(ii) azt mondja ki, hogy minden szögpont pontosan egy színnel van kiszínezve, (iii) szerint az éllel összekötött szögpontok különböző színűek. Azonnal adódik, hogy Γ minden véges része konzisztens. Valóban, egy ilyen véges formulahalmazban a c_g konstansjelek közül csak véges sok fordul elő. $\mathcal{G}$-ben az ilyen g szögpontok közötti éleket tartsuk meg, a többit pedig töröljük ki. Az adódó véges részgráf a feltétel szerint k színnel színezhető, és egy tetszőleges $g \in G$ szögpontra aszerint teljesüljön az $R_0, \ldots, R_{k-1}$ relációk interpretáltja, hogy a g ennél a színezésnél hányadik színt kapta. Ebben a struktúrában (ii) és (iii) a színezés tulajdonságai miatt teljesül, az (i) alatti véges sok formula pedig azért, mert az ott felsorolt éleket nem töröltük ki.

A kompaktsági tétel miatt ekkor Γ is konzisztens, legyen $\mathcal{G}^*$ a Γ tetszőleges modellje. Egy $g \in G$ szögpontot színezzünk ki $i < k$ színűre, ha $\mathcal{G}^* \models R_i(c_g)$. Ilyen $i < k$ $\mathcal{G}^* \models$ (ii) miatt pontosan egy van, és $\mathcal{G}^* \models$ (i), $\mathcal{G}^* \models$ (iii) miatt $\mathcal{G}$-ben éllel összekötött szögpontok különböző színűek lesznek. ■

Végül az ultraszorzatok segítségével szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy struktúraosztály axiomatizálható legyen.

8.17. Tétel *Legyen $\mathcal{K}$ t típusú struktúrák egy osztálya.*
a) *$\mathcal{K}$ akkor és csak akkor axiomatizálható, ha*
(i) *zárt az elemi ekvivalenciára, azaz ha $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ és $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, akkor $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$,*
(ii) *zárt az ultraszorzatra, azaz ha $\xi \in I$-re $\mathfrak{A}_\xi \in \mathcal{K}$ és U ultraszűrő I felett, akkor $\prod \mathfrak{A}_\xi / U \in \mathcal{K}$.*
b) *$\mathcal{K}$ akkor és csak akkor végesen axiomatizálható, ha $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}$-nak (a t típusú struktúrákra vonatkozó) komplementere is kielégíti az* (i) *és* (ii) *feltételeket.*

Bizonyítás a) Ha $\mathcal{K}$ axiomatizálható, azaz valamely $\Gamma \subset F(t)$ formulahalmazra $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$, akkor $\mathcal{K}$ nyilván rendelkezik az (i) tulajdonsággal, (ii) pedig következik a 8.7. alaptételből. Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ teljesíti (i)-t és (ii)-t. Álljon $\Gamma \subset F(t)$ az összes olyan formulából, amik $\mathcal{K}$ összes elemén igazak. Állítjuk, hogy $\mathcal{K}$-t ez a Γ axiomatizálja. $\mathcal{K}$ elemei nyilván modelljei Γ-nak, így csak azt kell látnunk, hogy ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$, akkor $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ is teljesül. Legyen $\Delta \subset F(t)$ az összes $\mathfrak{A}$-ban igaz zárt formula, és legyen $I = [\Delta]^{<\omega}$ a Δ véges részhalmazainak halmaza. Minden $\xi \in I$-re van $\mathcal{K}$-nak olyan $\mathfrak{A}_\xi$ eleme, melyre $\mathfrak{A}_\xi \models \xi$. Valóban, ha ugyanis $\xi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ és minden $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$-ra $\mathfrak{B} \not\models \xi$, akkor

$$\mathfrak{B} \models \neg\varphi_0 \vee \ldots \vee \neg\varphi_{n-1},$$

és így ez a formula eleme volna Γ-nak, ami viszont $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \xi$ miatt lehetetlen.

A 8.15. lemma miatt ekkor valamely I fölötti U ultraszűrőre $\prod \mathfrak{A}_\xi / U \models \Delta$, tehát az ultraszorzat elemien ekvivalens $\mathfrak{A}$-val (bármely zárt formulára vagy ő vagy a tagadása eleme Δ-nak), és (ii) szerint az ultraszorzat is eleme $\mathcal{K}$-nak, így (i) miatt $\mathfrak{A}$ is eleme.

b) Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ elemei a véges $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\} \subset F(t)$ zárt formulákból álló halmaz modelljei. $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A}$-ban a $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ formulák valamelyike nem áll fenn, azaz ha

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi_0 \vee \dots \vee \neg\varphi_{n-1}.$$

Így $\mathcal{K}$ komplementere is (végesen) axiomatizálható, tehát az a) alatt bizonyítottak szerint $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}$ komplementere is teljesíti (i)-t és (ii)-t.

Fordítva tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ és komplementere is axiomatizálható, és álljon $\mathcal{K}$ éppen a $\Gamma \subset F(t)$ modelljeiből. Ha most Γ-nak egyetlen véges része sem axiomatizálná $\mathcal{K}$-t, akkor minden ilyen $\xi \in [\Gamma]^{<\omega}$-nak volna $\mathcal{K}$ komplementerében $\mathfrak{A}_\xi$ modellje. A 8.15. lemma szerint $\prod \mathfrak{A}_\xi / U$ modellje Γ-nak valamely U ultraszűrőre, de (ii) szerint ez, mint $\mathcal{K}$ komplementerébe tartozó struktúrák ultraszorzata, maga is $\mathcal{K}$ komplementerébe tartozik. Ez az ellentmondás bizonyítja állításunkat. ■

A tétel jól használható annak igazolására, hogy megadott struktúraosztály nem axiomatizálható, vagy hogy ugyan axiomatizálható, de végesen nem. Első esetben (ha a struktúraosztály zárt az elemi ekvivalenciára) azt kell megmutatnunk, hogy az ultraszorzat kivezet az osztályból; a második esetben pedig azt, hogy a komplementerből vezet ki.

Feladatok

1. Adjunk meg olyan $\varphi \in F(t)$ formulát és olyan $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ struktúrákat, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi$, $\mathfrak{B} \models \varphi$, de $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ direkt szorzatában φ nem igaz.
2. Legyen $\kappa \geq |t| \cdot \omega$. Ha a $\varphi \in F(t)$ formula minden κ számosságú t típusú struktúrán igaz, akkor $\models \varphi$.
3. Egy $\Gamma \subset F(t)$ elméletről azt modjuk, hogy *független*, ha minden $\varphi \in \Gamma$-ra $\Gamma \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi$. Mutassuk meg, hogy minden axiomatizálható struktúraosztály axiomatizálható független elmélettel is.
4. Mutassuk meg, hogy ha a $\Gamma \subset F(t)$ elméletnek minden n természetes számra van legalább n elemű modellje, akkor van végtelen modellje is.
5. Bizonyítsuk be, hogy izomorf struktúrákból álló osztály akkor és csak akkor axiomatizálható, ha a struktúrák elemszáma véges.
6.* Adjunk meg olyan $\Gamma \subset F(t)$ elméletet, ami kategorikus valamilyen $\kappa \geq \omega$-ra, de nem teljes.
7.* Legyen $\mathfrak{A}$ egy megszámlálható struktúra, U egy nem triviális ultraszűrő ω-n. Bizonyítsuk be, hogy ${}^\omega\mathfrak{A}/U$ kontinuum számosságú. Útmutatás: használjuk fel, hogy ω-nak megadható kontinuum sok végtelen részhalmaza úgy, hogy bármely kettőnek csak véges sok közös eleme legyen.
8. Legyen $\Gamma \subset F(t)$ tetszőleges elmélet, és tegyük fel, hogy Γ-nak van megszámlálható modellje. Mutassuk meg, hogy ekkor t számosságától függetlenül van Γ-nak kontinuum számosságú modellje is. Adjunk meg olyan Γ-t, aminek van ω és 2^ω számosságú modellje, de semmilyen $\omega < \kappa < 2^\omega$-ra nincs κ számosságú modellje.
9.* Igazoljuk a kompaktsági tétel segítségével a következő állítást. Legyenek F és L diszjunkt végtelen halmazok, a fiúk és lányok halmazai, és legyen $I \subset F \times L$ egy reláció. $(f, \ell) \in I$ esetén azt mondjuk, hogy f *ismeri* ℓ-et. A következőket tudjuk:
   (i) minden fiú véges sok lányt ismer, és minden lányt csak véges sok fiú;
   (ii) akárhogyan veszünk ki véges sok, mondjuk k fiút, azok együttvéve legalább k lányt ismernek, és akárhogyan veszünk ki k lányt, azok valamelyikét legalább k fiú ismeri.
   Ekkor a fiúk és lányok „összeházasíthatók," azaz megadható F és L között olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, ami minden fiúhoz olyan lányt rendel, akit ismer.