7. fejezet

Modellelméleti alapfogalmak

Legyen t rögzített típus, és $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra. Emlékeztetünk arra, hogy az $f \in t$ függvényjel és az $r \in t$ relációjel $\mathfrak{A}$-beli interpretáltjait $f_{\mathfrak{A}}$-val illetve $r_{\mathfrak{A}}$-val jelöltük.

7.1. Definíció Az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrák *izomorfak*, jelben $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$, ha van a struktúrák alaphalmazai között olyan $g : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, ami a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) minden $f \in t$ n-változós függvényjelre és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$-ra $g(f_{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})) = f_{\mathfrak{B}}(g(a_0), \ldots, g(a_{n-1}))$;

(ii) minden $r \in t$ n-változós relációjelre és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$-ra $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in r_{\mathfrak{A}}$ akkor és csak akkor, ha $\langle g(a_0), \ldots, g(a_{n-1})\rangle \in r_{\mathfrak{B}}$.

Ha két struktúra izomorf, akkor persze alaphalmazaik számosságának is meg kell egyeznie. Az is látható, hogy struktúrák izomorfizmusa ekvivalencia reláció: $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{A}$; $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$ esetén $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{A}$; végül ha $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{C}$ akkor $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{C}$.

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrák izomorfizmusát a $g : A \to B$ leképezés mutatja. Legyen a változójelek egy $\mathfrak{A}$ fölötti értékelése e és definiáljuk a $\mathfrak{B}$ fölötti $g(e)$ értékelést a következőképpen: $g(e)(x) = g(e(x))$ minden x változójelre.

7.2. Lemma *Tetszőleges $\varphi \in F(t)$ formulára $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{B} \models \varphi[g(e)]$. Speciálisan $\mathfrak{A} \models \varphi$ és $\mathfrak{B} \models \varphi$ ekvivalens egymással.*

Bizonyítás Az izomorfizmus definíciója alapján formulaindukcióval. A részleteket az olvasóra hagyjuk. ∎

Izomorf struktúrák tehát a formulák szempontjából egyformán viselkednek, lényegében azonosak. Legyen κ egy számosság. A $\Gamma \subset F(t)$ elméletet *κ-kategorikusnak* nevezünk, ha van κ számosságú modellje, de bármely két κ számosságú modellje izomorf egymással. Példaként vegyük azt a típust, melyben egyetlen függvényjel vagy relációjel sincs (üres típus), és tekintsük a következő egyetlen formulából álló elméletet:

$$\exists x\, \exists y\, \big(x \neq y \wedge \forall z\, (z = x \vee z = y)\big)\,.$$

Világos, hogy ennek pontosan a két elemű struktúrák a modelljei, azok viszont izomorfak egymással. Így ez az elmélet 2-kategorikus. Általában minden $n \geq 2$-re az egyetlen

$$\exists x_0 \ldots \exists x_{n-1} \big(\bigwedge_{i<j<n} x_i \neq x_j \wedge \forall z \big(\bigvee_{i<n} x_i = z\big)\big)$$

formulából álló elmélet n-kategorikus.

7.3. Tétel *A végpont nélküli sűrű rendezés elmélete ω-kategorikus.*

Bizonyítás Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ megszámlálható modelljei a végpontok nélküli sűrű rendezésnek, és soroljuk fel alaphalmazaikat ω típusban: $A = \{a_i : i \in \omega\}$, $B = \{b_i : i \in \omega\}$. Definiálni fogunk A és B között egy $g : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű, rendezéstartó leképezést, ez megadja a keresett izomorfiznust.

Először is legyen $g(a_0) = b_0$. Ezek után tegyük fel, hogy véges sok A-beli elemről már megmondtuk, hogy mi a g szerinti képük, legyenek ezek nagyság szerint x_0, x_1, $\dots, x_{k-1}$, vagyis

$$x_0 \leq_{\mathfrak{A}} x_1, \quad x_1 \leq_{\mathfrak{A}} x_2, \quad \dots, \quad x_{n-2} \leq_{\mathfrak{A}} x_{n-1}.$$

Legyen az A fenti felsorolásában a_ℓ a legkisebb indexű olyan elem, ami még nem szerepel az $x_0, \dots, x_{k-1}$ elemek között. Azt is feltesszük, hogy g rendezéstartó a már definiált elemeken, vagyis $i < n-1$ esetén $g(x_i) \leq_{\mathfrak{B}} g(x_{i+1})$. Most vagy $a_\ell \leq_{\mathfrak{A}} x_0$, amikor is válasszunk $g(a_\ell)$-nek egy tetszőleges $g(x_0)$-nál kisebb B-beli elemet; vagy $x_i \leq_{\mathfrak{A}} a_\ell \leq_{\mathfrak{A}} x_{i+1}$, amikor is $g(a_\ell)$-t úgy választjuk, hogy az $g(x_i)$ és $g(x_{i+1})$ közé essen; végül ha $x_{k-1} \leq_{\mathfrak{A}} a_\ell$, akkor legyen $g(a_\ell)$ bármely $g(x_{k-1})$-nél nagyobb B-beli elem. Az, hogy ilyen elemet tudunk választani, következik abból, hogy $\leq_{\mathfrak{B}}$ a B-nek kezdő- és végpont nélküli sűrű rendezése.

Ezek után vegyük ki B felsorolásából a legkisebb indexűt azok közül, amiket még nem feleltettünk meg egyetlen A-belinek sem. Erre a $b_j \in B$-re hasonlóan határozzuk meg $g^{-1}(b_j)$-t, majd ismét egy A-beli elemet veszünk, stb.

Az eljárás által adott g függvény kölcsönösen egyértelmű, hiszen mind A mind B összes elemével valamikor foglalkoztunk, legkésőbb annyiadik lépésben, amennyi az indexe, és egyetlen elemnek sem feleltettünk meg különbözőket. g persze rendezéstartó, így a 7.1. definíció alapján izomorfizmus is, tehát $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ valóban izomorf struktúrák. ∎

A bizonyításból az is látható, hogy a megszámlálható sűrű rendezés minden sűrű rendezésbe beágyazható rendezéstartó módon.

7.4. Lemma *A végpontok nélküli sűrű rendezés $\kappa > \omega$ esetén nem κ-kategorikus.*

Bizonyítás Megadunk két κ számosságú sűrű rendezést, $\mathfrak{A}$-t és $\mathfrak{B}$-t, melyek nem lesznek izomorfak. Jelölje $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát. Mint $\mathfrak{A}$ mind $\mathfrak{B}$ alaphalmaza a $\kappa \times \mathbb{Q}$ halmaz, a rendezés pedig a következő: $\xi, \eta \in \kappa$ és $q, r \in \mathbb{Q}$ esetén

$$\begin{array}{ll} (\xi, q) \leq_{\mathfrak{A}} (\eta, r) & \text{ha } \xi < \eta \text{ vagy ha } \xi = \eta \text{ és } q \leq r; \\ (\xi, q) \leq_{\mathfrak{B}} (\eta, r) & \text{ha } \xi > \eta \text{ vagy ha } \xi = \eta \text{ és } q \leq r. \end{array}$$

Világos, hogy mind $\mathfrak{A}$ mind $\mathfrak{B}$ valóban sűrű rendezés, ugyanakkor a $(\xi, 0)$ alakú elemek $\mathfrak{A}$-ban egy κ hosszúságú növő sorozatot alkotnak, $\mathfrak{B}$-ben pedig egy κ hosszúságú csökkenő sorozatot. Ugyanakkor $\mathfrak{A}$-ban nincs még ω_1-es csökkenő sorozat sem. Rendszámoknak ugyanis csak véges csökkenő sorozata van, így ha veszünk $\mathfrak{A}$-ból egy csökkenő sorozatot, abban első koordinátaként csak véges sok rendszám fordulhat elő. A második koordinátahalmaz, $\mathbb{Q}$ megszámlálható, így minden csökkenő sorozat szükségképpen megszámlálható. ∎

Ugyanígy adódik, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ nem csak hogy nem izomorf, hanem közülük egyik sem ágyazható be a másikba rendezéstartó módon.

7.5. Definíció Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két t típusú struktúra. $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ *elemien ekvivalens*, jelben $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, ha minden $\varphi \in F(t)$-re $\mathfrak{A} \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{B} \models \varphi$.

A 7.2. lemma szerint izomorf struktúrák elemien ekvivalensek is, de fordítva általában nem. Különösen fontosak az olyan elméletek, melyeknek bármely két modellje elemien ekvivalens.

7.6. Definíció Egy $\Gamma \subset F(t)$ elméletről azt mondjuk, hogy *teljes*, ha bármely két modellje elemien ekvivalens.
Teljes elméletek egy másik jellemzését adja az alábbi lemma.

7.7. Lemma *A $\Gamma \in F(t)$ elmélet pontosan akkor teljes, ha bármely zárt $\varphi \in F(t)$ formulára vagy $\Gamma \models \varphi$ vagy $\Gamma \models \neg\varphi$.*

Bizonyítás A definíciók alapján azonnal adódik abból, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha φ-nek $\overline{\varphi}$ lezártjára $\mathfrak{A} \models \overline{\varphi}$. ■

A $\varphi \in F(t)$ formuláról azt mondjuk, hogy *független* a $\Gamma \subset F(t)$ elmélettől, ha sem $\overline{\varphi}$ sem $\neg\overline{\varphi}$ nem következménye Γ-nak. Így Γ akkor és csak akkor teljes, ha nincs tőle független formula.

7.8. Tétel *A végpontok nélküli sűrű rendezés elmélete teljes.*

Bizonyítás Jelöljük a kérdéses elméletet Γ-val. Azt bizonyítjuk, hogy tetszőleges φ formulához található olyan kvantormentes (tehát nyílt) ψ formula, hogy φ-nek és ψ-nek a szabad változói megegyeznek, továbbá $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Ebből már következik a tétel állítása, hiszen zárt formulának nincs szabad változója, a változójel nélküli kvantormentes formulák pedig esetünkben csak az azonosan igaz és az azonosan hamis „formulák.” Így minden zárt φ-re vagy $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow$ „igaz” vagy $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow$ „hamis”, ami az első esetben $\Gamma \models \varphi$, a másodikban $\Gamma \models \neg\varphi$-t jelenti.

Azt, hogy φ-hez található megfelelő nyílt formula, formulaindukcióval bizonyítjuk. Prímformulákra nyilvánvaló, továbbá φ-ről $\neg\varphi$-re; φ és ψ-ről $(\varphi \vee \psi)$-re is azonnal adódik. Így egyedül azt kell megmutatnunk, hogy ha φ nyílt, akkor található hozzá olyan ψ nyílt formula, melyre $\Gamma \models (\exists x\, \varphi) \leftrightarrow \psi$.

Legyen tehát φ valamely nyílt formula. Világos, hogy az általánosság megszorítása nélkül vehetünk φ helyett tetszőleges olyan φ'-t, amire $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$, hiszen ekkor $\Gamma \models (\exists x\, \varphi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi')$ is igaz. Így először is feltehetjük, hogy φ diszjunktív normál formájú, hiszen az 5.7. tétel szerint minden nyílt formulához található vele ekvivalens ilyen formula. Másodszor definiáljuk a $<$ relációt a következőképpen:

$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \wedge x \neq y.$$

Bővítsük ki a nyelvet a $<$ kétváltozós relációjellel, és vegyük Γ-hoz ezt a formulát (konzervatív bővítés). A kapott Γ'-nek az alábbi formulák következményei:

$$\begin{array}{lcl} x \leq y & \leftrightarrow & (x < y \vee x = y) \\ \neg(x \leq y) & \leftrightarrow & y < x \\ x \neq y & \leftrightarrow & x < y \vee y < x \end{array}$$

A φ-ben szereplő $x \leq y$, $\neg(x \leq y)$ és $\neg(x = y)$ alakú részformulákat cseréljük le ezekre a $<$ jelet használó ekvivalensükre, majd a kapott formulát ismét hozzuk diszjunktív normál formájúra. Ezzel elértük, hogy φ-ben a negációjel nem szerepel, és

$$\varphi \equiv \varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}$$

alakú, ahol mindegyik φ_i csak $x < y$ és $x = y$ alakú prímformulák diszjunkcióiból áll. Az

$$\models \exists x\,(\varphi_0 \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}) \leftrightarrow \big((\exists x\,\varphi_0) \vee \ldots \vee (\exists x\,\varphi_{n-1})\big)$$

logikai ekvivalencia miatt elegendő a diszjunkciós tagokkal külön-külön foglalkozni, tehát feltehetjük, hogy φ egyetlen konjunkciós tagból áll. Nézzük, hogyan néz ki! Ha φ-ben szerepel $x = x_\ell$ vagy $x_\ell = x$ alakú diszjunkciós tag, akkor persze

$$\models \exists x\,\varphi \leftrightarrow \varphi[x/x_\ell],$$

amivel készen vagyunk. Így feltehetjük, hogy x egyenlőségben nem szerepel, következésképp a formula a diszjunkciós tagok átrendezése után

$$\begin{array}{ll} & (x_{i_0} < x) \wedge (x_{i_1} < x) \wedge \ldots \wedge (x_{i_{k-1}} < x) \wedge \\ \wedge & (x < x_{j_0}) \wedge (x < x_{j_1}) \wedge \ldots \wedge (x < x_{j_{\ell-1}}) \wedge \psi \end{array}$$

ahol ψ-ben már nem szerepel az x. Ha ezt kielégítő x létezik, akkor persze az x_{i_0}, $\ldots, x_{i_{k-1}}$ mindegyike szükségképpen kisebb az $x_{j_0}, \ldots, x_{j_{\ell-1}}$ mindegyikénél. Ha viszont ez így van, akkor a rendezés sűrűsége miatt megfelelő x található is, ezért

$$\Gamma' \models \exists x\,\varphi \leftrightarrow \Big(\bigwedge_{\substack{s<k\\ t<\ell}} x_{i_s} < x_{j_t}\Big) \wedge \psi.$$

A $\leftrightarrow$ jel jobb oldalán álló formula nyílt, és visszaírva a $<$ jel nélküli alakjára továbbra is nyílt formulát kapunk. Ezzel találtunk olyan nyílt ϑ-t amivel $\Gamma \models \exists x\,\varphi \leftrightarrow \vartheta$, a tételt bizonyítottuk. ■

Általában ha egy $\Gamma \subset F(t)$ elmélet olyan, hogy bármely $\varphi \in F(t)$ formulához található ψ nyílt formula úgy, hogy φ és ψ szabad változói megegyeznek és $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$, akkor Γ-t *kvantoreliminálható*nak nevezzük. Egy kvantoreliminálható elmélet formuláinak igazságát már a változójelek nélküli formulák igazsága eldönti. Ha ezeket az elmélet egyértelműen meghatározza (például mert ilyen formula csak az azonosan igaz és az azonosan hamis), akkor az elmélet teljes is.

7.9. Definíció Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ közös t típusú struktúrák. $\mathfrak{B}$ *részstruktúrája* $\mathfrak{A}$-nak, jelben $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, ha a következő három feltétel teljesül:

(i) $B \subset A$,

(ii) minden n-változós $f \in t$ függvényjelre $f_{\mathfrak{B}} = f_{\mathfrak{A}} \restriction B$,

(iii) minden n-változós $r \in t$ relációjelre $r_{\mathfrak{B}} = r_{\mathfrak{A}} \restriction B^n$.

Részstruktúra ezek szerint mindig tartalmazza a konstansjelek interpretáltjait, és zárt a függvényekre. Részstruktúrák metszete is az, feltéve hogy nem üres, tehát tetszőleges $\emptyset \neq X \subset A$-ra létezik legszűkebb X-et tartalmazó részstruktúra. Erről azt mondjuk, hogy X *generálja*.

7.10. Lemma *Legyen $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra, $\emptyset \neq X \subset A$ és legyen $\kappa = \max(|X|, |t| \cdot \omega)$. Ekkor az X által generált részstruktúra számossága legfeljebb κ.*

Bizonyítás Legyen $B_0 = X$ és ha B_i-t már definiáltuk valamilyen $i \in \omega$-ra, akkor legyen

$$B_{i+1} = B_i \cup \{ f_{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) : \quad f \in t \ n\text{-változós függvényjel, és } a_0, \ldots, a_{n-1} \in B_i \}.$$

Világos, hogy minden $i \in \omega$-ra

$$|B_{i+1}| \leq |B_i| + |t| \cdot \sum_{n \in \omega} |B_i|^n ,$$

ahonnan $\kappa \geq \omega$ miatt $|B_i| \leq \kappa$ adódik. Ezért $B = \bigcup\{B_i : i \in \omega\}$ számossága is legfeljebb κ, és persze ez a legszűkebb X-et tartalmazó halmaz, ami zárt a függvényjelek interpretáltjaira. Definiáljuk a B alaphalmazú $\mathfrak{B}$ struktúrát úgy, hogy $f \in t$-re $f_{\mathfrak{B}} = f_{\mathfrak{A}} \restriction B$, és ha $r \in t$ n-változós relációjel, akkor $r_{\mathfrak{B}} = r_{\mathfrak{A}} \cap B^n$. Mivel B zárt a függvényekre, ez a definíció jogos. Most $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $X \subset B$ és $|B| \leq \kappa$, az állítást bizonyítottuk. ■

7.11. Definíció Legyen σ egy rendszám, és $\xi < \sigma$-ra $\mathfrak{A}_\xi$ közös t típusú struktúrák növekvő lánca, azaz $\xi < \eta < \sigma$ esetén $\mathfrak{A}_\xi \subset \mathfrak{A}_\eta$. A lánc *unióján* azt a t típusú, $\bigcup\{\mathfrak{A}_\xi : \xi < \sigma\}$-val jelölt $\mathfrak{A}$ struktúrát értjük, aminek alaphalmaza $A = \bigcup\{A_\xi : \xi < \sigma\}$, és ha $\varrho \in t$ egy függvényjel vagy relációjel, akkor $\varrho_{\mathfrak{A}} = \bigcup\{\varrho_{\mathfrak{A}_\xi} : \xi < \sigma\}$.

Világos, hogy az összes $\mathfrak{A}_\xi$ részstruktúrája az uniónak, és hogy ha mindegik $\mathfrak{A}_\xi$ részstruktúrája egy nagy $\mathfrak{B}$ struktúrának, akkor ez áll az uniójukra is.

Vegyük észre, hogy ha $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, akkor a változójelek tetszőleges $\mathfrak{B}$ fölötti értékelése egyúttal $\mathfrak{A}$ fölötti értékelés is. A 7.9. definíció alapján azonnal adódik, hogy minden $\varphi \in F(t)$ nyílt formulára és $\mathfrak{B}$ fölötti e értékelésre $\mathfrak{B} \models \varphi[e]$ valamint $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ egyszerre teljesülnek. Ez tetszőleges formulára általában nem igaz, ha mégis, $\mathfrak{B}$-t az $\mathfrak{A}$ elemi részének nevezzük.

7.12. Definíció Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ t típusú struktúrák. $\mathfrak{B}$ *elemi része* $\mathfrak{A}$-nak, jelben $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$, ha egyrészt $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, másrészt tetszőleges $\mathfrak{B}$ fölötti e értékelésre és $\varphi \in F(t)$ formulára, $\mathfrak{B} \models \varphi[e]$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$.

Ha $\mathfrak{B}$ elemi része $\mathfrak{A}$-nak, akkor azt is mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ *elemi bővítése* $\mathfrak{B}$-nek. Ha $\mathfrak{B}$ izomorf $\mathfrak{A}$ valamely elemi részével, akkor $\mathfrak{B}$ *elemien beágyazható* $\mathfrak{A}$-ba. A definíció alapján világos, hogy $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ esetén zárt φ-re $\mathfrak{A} \models \varphi$ és $\mathfrak{B} \models \varphi$ ekvivalensek, tehát $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ elemien ekvivalensek is. Láttuk, hogy van a végpontok nélküli sűrű rendezésnek két olyan modellje, melyek közül az egyik sem ágyazható a másikba rendezéstartó módon, tehát elemien sem. Így vannak elemien ekvivalens struktúrák, melyek közül egyik sem ágyazható elemien a másikba.

7.13. Lemma *Tetszőleges t típusú $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ struktúrákra teljesülnek az alábbiak:*

(i) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}$,
(ii) *ha* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ *és* $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, *akkor* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$,
(iii) *ha* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$ *és* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, *akkor* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Bizonyítás A definíciók alapján közvetlenül adódik. ■

Most egy jól kezelhető feltételt mondunk arra, hogy mikor lesz egy részstruktúra egyúttal elemi rész is.

7.14. Lemma (Tarski–Vaught kritérium) *Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ t típusú struktúrák, továbbá $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ akkor és csak akkor, ha minden $\varphi \in F(t)$ formulára és $\mathfrak{B}$ fölötti e értékelésre, $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi)[e]$ esetén van olyan $b \in B$, amire $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/b)]$.*

Bizonyítás Elsőként tegyük fel, hogy $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi)[e]$. Az elemi rész definíciója alapján ekkor $\mathfrak{B} \models (\exists x\, \varphi)[e]$, tehát valamely $b \in B$-vel $\mathfrak{B} \models \varphi[e(x/b)]$. Mivel $e(x/b)$ is egy $\mathfrak{B}$ fölötti értékelés, azért ismét az elemi rész definícióját használva, $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/b)]$, ahogyan kívántuk.

Fordítva a φ formula felépítésére vonatkozó indukcióval mutatjuk meg, hogy minden $\mathfrak{B}$ fölötti e értékelésre $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ és $\mathfrak{B} \models \varphi[e]$ ekvivalensek. Prímformulákra ez a $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ feltétel miatt teljesül, továbbá φ-ről $\neg\varphi$-re; φ és ψ-ről $(\varphi \vee \psi)$-re is azonnal adódik. Így csak a $\exists x\, \varphi$ alakú formulák maradtak. Ha $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi)[e]$, akkor a feltétel szerint $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/b)]$ valamely $b \in B$-vel, tehát $\mathfrak{B} \models \varphi[e(x/b)]$ az indukciós feltétel miatt, és így $\mathfrak{B} \models (\exists x\, \varphi)[e]$. Ha pedig $\mathfrak{B} \models (\exists x\, \varphi)[e]$, akkor $\mathfrak{B} \models \varphi[e(x/b)]$ valamely $b \in B$-vel, amiből ismét az indukciós feltétel miatt $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/b)]$, tehát $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi)[e]$. ∎

Legyenek $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. Az $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ jelölést annak rövidítésére használtuk, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ minden olyan e értékelés mellett, ahol $e(x_0) = a_0, \ldots, e(x_{n-1}) = a_{n-1}$. A lemma feltételét ezzel a következőképpen fogalmazhatjuk meg: minden $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$-re és $\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, z) \in F(t)$ formulára, melynek összes szabad változója a felsoroltak között van, ha valamely $a \in A$-val $\mathfrak{A} \models \varphi[b_0, \ldots, b_{n-1}, a]$, akkor van olyan $b \in B$ is, amivel $\mathfrak{A} \models \varphi[b_0, \ldots, b_{n-1}, b]$.

7.15. Tétel (Leszálló Löwenheim–Skolem tétel) *Legyen $\kappa \geq |t| \cdot \omega$, $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra és X A-nak egy κ számosságú része. Van $\mathfrak{A}$–nak olyan $\mathfrak{B}$ elemi része, amire $X \subset B$ és $|B| = \kappa$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az $n+1$-változós $\psi(y_0, \ldots, y_{n-1}, z) \in F(t)$ formula szabad változói azok, amiket feltüntettünk. Egy n-változós $f : A^n \to A$ függvényt az $\mathfrak{A}$ struktúra $(\exists z\, \psi)$-hez tartozó *Skolem-függvényének* nevezünk, ha minden $a_0, \ldots, a_{m-1} \in A$-ra $\mathfrak{A} \models \exists z\, \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ esetén $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}, f(a_0, \ldots, a_{n-1})]$. Ilyen függvényt kaphatunk például a következőképpen. Vegyük a struktúra alaphalmazának egy tetszőleges $<$ jólrendezését, és legyen

$$f(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{cases} \min\limits_{<} \{a \in A : \mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]\} & \text{ha ez nem üres,} \\ \min\limits_{<} A & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Rögzítsünk most minden $\exists z\, \psi$ alakú $\varphi \in F(t)$ formulához egy f_φ Skolem-függvényt. Mivel $F(t)$ számossága egyenlő $|t| \cdot \omega$-val, azért ilyen függvényből legfeljebb $|t| \cdot \omega \leq \kappa$ van. Definiáljuk $\mathfrak{A}$ részstruktúráinak egy növekvő $\langle \mathfrak{B}_i : i \in \omega \rangle$ sorozatát a következőképpen. Legyen $X_0 = X$ és $\mathfrak{B}_0$ az X_0 által generált részstruktúra. Ha már $\mathfrak{B}_i$ megvan, legyen

$$X_{i+1} = B_i \cup \{ f_\varphi(b_0, \ldots, b_{n-1}) : \quad b_0, \ldots, b_{n-1} \in B_i \text{ és } f_\varphi \text{ a rögzített Skolem-függvények egyike} \},$$

és $\mathfrak{B}_{i+1}$ az X_{i+1} által generált részstruktúra. Végül legyen $\mathfrak{B} = \bigcup \{ \mathfrak{B}_i : i \in \omega \}$. Állítjuk, hogy mindegyik $\mathfrak{B}_i$ κ számosságú, és így $\mathfrak{B}$ is. A 7.10. lemma miatt elegendő megmutatnunk, hogy $|X_i| = \kappa$. Ez $i = 0$-ra a feltétel volt, ha pedig i-re már tudjuk, akkor $X_i \subset X_{i+1}$ miatt

$$\kappa = |X_i| \leq |X_{i+1}| \leq |B_i| + \kappa \cdot \sum_{n \in \omega} |B_i|^n = \kappa,$$

hiszen κ végtelen számosság. Azt kell még belátnunk, hogy $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$. Ebből $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ a konstrukció miatt világos. A Tarski–Vaught kritérium teljesülését ellenőrizendő, legyen $\psi(y_0, \ldots, y_{n-1}, z) \in F(t)$, és $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ és $a \in A$ olyan, amire $\mathfrak{A} \models \psi[b_0, \ldots, b_{n-1}, a]$. Olyan $b \in B$-t kell keresnünk, amivel $\mathfrak{A} \models \psi[b_0, \ldots, b_{n-1}, b]$. Feltehetjük, hogy ψ szabad változói pontosan azok, amiket feltüntettünk, és persze $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi[b_0, \ldots, b_{n-1}]$. A $B = \bigcup\{B_i : i \in \omega\}$ miatt kell lennie olyan $i \in \omega$-nak, hogy az összes $b_0, \ldots, b_{n-1}$ már eleme B_i-nek is. Ekkor viszont X_{i+1} definíciója miatt

$$b = f_{\exists z\, \psi}(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in X_{i+1} \subset B,$$

és mivel $f_{\exists z\, \psi}$ a $\exists z\, \psi$-hez tartozó Skolem-függvény, azért

$$\mathfrak{A} \models \psi\left[b_0, \ldots, b_{n-1}, f_{\exists z\, \psi}(b_0, \ldots, b_{n-1})\right],$$

ahogyan kívántuk. ■

A tételből azonnak adódik az alábbi meglepő következmény, melyet éppen váratlansága miatt Skolem-paradoxonnak is szoktak nevezni.

7.16. Következmény *Legyen $\kappa \geq |t| \cdot \omega$, és legyen $\Gamma \subset F(t)$ tetszőleges elmélet. Ha Γ-nak van legalább κ számosságú modellje, akkor van pontosan κ számosságú modellje is.* ■

Így például ha a halmazelmélet ***ZF*** axiómarendszere ellentmondástalan, akkor a teljességi tétel szerint van modellje. Ez a modell persze nem lehet véges, és ekkor a fenti következmény szerint van *ZF*-nek megszámlálható modellje is. (Persze azt, hogy *ZF* ellentmondástalan, nem feltétlenül tudjuk bizonyítani.)

A 7.15. tétel segítségével egy másik bizonyítást is tudunk adni arra, hogy a végpontok nélküli sűrű rendezés elmélete teljes. Legyen ez az elmélet Γ, és tegyük fel, hogy valamely φ zárt formulára $\Gamma \not\models \varphi$ és $\Gamma \not\models \neg\varphi$ állna fenn ellentétben az állításunkkal. $\Gamma \not\models \varphi$ definíció szerint azt jelenti, hogy van Γ-nak olyan $\mathfrak{A}$ modellje, amelyre $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Mivel $\mathfrak{A}$-nak minden elemi része rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, azért a leszálló Löwenheim–Skolem tétel értelmében van ilyen megszámlálható modellje is Γ-nak. Hasonlóan, $\Gamma \not\models \neg\varphi$-ből adódik, hogy van Γ-nak olyan megszámlálható $\mathfrak{B}$ modellje is, amire $\mathfrak{B} \not\models \neg\varphi$. Ám a 7.2. tétel szerint Γ bármely két megszámlálható modellje izomorf, tehát ezek bármelyikében $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ és $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$. Ez pedig lehetetlen, mivel minden struktúrában egy zárt formulára vagy ő vagy negáltja igaz.

A következő lemma szerint tetszőleges bővülő elemi lánc uniója elemi bővítése a lánc minden tagjának.

7.17. Lemma *Legyen σ egy rendszám és $\langle \mathfrak{A}_\xi : \xi < \sigma \rangle$ közös t típusú struktúrák egy növő elemi lánca, azaz $\xi < \eta < \sigma$ esetén $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}_\eta$. Legyen $\mathfrak{A} = \bigcup\{\mathfrak{A}_\xi : \xi < \sigma\}$, ekkor minden $\xi < \sigma$-ra $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}$.*

Bizonyítás A következő állítást bizonyítjuk a $\varphi \in F(t)$ formula felépítésére vonatkozó indukcióval: ha φ összes szabad válozója az $x_0, \ldots, x_{n-1}$ között van, akkor tetszőleges $\xi < \sigma$-ra és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A_\xi$-re,

$$(*) \qquad \mathfrak{A}_\xi \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \text{ és } \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \text{ ekvivalensek.}$$

Ebből a lemma állítása azonnal adódik.

Prímformulákra $(*)$ következik onnan, hogy mindegyik $\mathfrak{A}_\xi$ részstruktúrája $\mathfrak{A}$-nak. φ-ről $\neg\varphi$-re, φ és ψ-ről $(\varphi \vee \psi)$-re egyszerű az átmenet, s így megint csak a $\exists z\,\varphi$ alakú formulákkal kell dolgoznunk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy φ szabad változói éppen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ és z. Ha most $\mathfrak{A}_\xi \models \exists z\,\varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$, akkor valamely $a \in A_\xi$-re $\mathfrak{A}_\xi \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$. Az indukciós feltétel miatt ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$, azaz $\mathfrak{A} \models \exists z\,\varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Fordítva, ha $\mathfrak{A} \models \exists z\,\varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$, akkor valamely $a \in A$-ra

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a].$$

Most $A = \bigcup\{A_\eta : \eta < \sigma\}$ miatt $a \in A_\eta$ valamilyen $\xi < \eta$-ra, és ekkor az indukciós feltételünk szerint $\mathfrak{A}_\eta \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$, azaz $\mathfrak{A}_\eta \models \exists z\,\varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$. Most használjuk, hogy $\mathfrak{A}_\xi \prec \mathfrak{A}_\eta$, ahonnan $\mathfrak{A}_\xi \models \exists z\,\varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$, ahogyan kívántuk. ∎

Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges t típusú struktúra. Válasszunk A minden a eleméhez egy új c_a konstansjelet, és legyen $t_\mathfrak{A}$ az a típus, amit t-ből ezeknek a konstansjeleknek a hozzávételével kapunk:

$$t_\mathfrak{A} = t \cup \{c_a : a \in A\}.$$

Az $\mathfrak{A}$-t természetes módon kibővíthetjük egy $t_\mathfrak{A}$ típusú $\mathfrak{A}'$ struktúrává: a c_a konstansjel interpretáltjának az $a \in A$-t választjuk.

7.18. Definíció Az $\mathfrak{A}$ struktúra $\Delta^0_\mathfrak{A}$ *diagramja* mindazoknak a $t_\mathfrak{A}$ típusú változójel nélküli formuláknak a halmaza, melyek $\mathfrak{A}'$-ben igazak:

$$\Delta^0_\mathfrak{A} = \{\varphi \in F(t_\mathfrak{A}) : \varphi\text{-ben nincs változójel, és } \mathfrak{A}' \models \varphi\}.$$

$\mathfrak{A}$-nak $\Delta_\mathfrak{A}$-val jelölt *teljes diagramja* pedig az $\mathfrak{A}'$-ben igaz zárt formulák halmaza:

$$\Delta_\mathfrak{A} = \{\varphi \in F(t_\mathfrak{A}) : \varphi \text{ zárt és } \mathfrak{A}' \models \varphi\}.$$

Azzal, hogy a struktúra elemeit egy-egy konstansjellel megjelöltük, az elemek „jogot kaptak” arra, hogy formulákban is szerepelhessenek. A diagram segítségével pédául az elemi rész definícióját a következőképpen fogalmazhatjuk át. Legyen $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, és tegyük fel, hogy a B-beli elemeket $\mathfrak{B}$-ben és $\mathfrak{A}$-ban is ugyanazokkal a konstansjelekkel jelöltük meg. Ehhez a megállapodáshoz általában is tartjuk magunkat: ha $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, akkor abból automatikusan következtetünk arra, hogy $t_\mathfrak{B} \subset t_\mathfrak{A}$. Ilyenkor $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ pontosan akkor, ha $\Delta_\mathfrak{B} \subset \Delta_\mathfrak{A}$. A diagramok hasznosak akkor is, ha részstruktúraként vagy akár elemi részként akarunk egy struktúrát beágyazni egy másikba.

7.19. Lemma *Legyen $\mathfrak{B}$ egy tetszőleges t típusú struktúra, és legyen a $t_{\mathfrak{B}}$ típusú $\mathfrak{A}$ struktúra modellje $\Delta^0_{\mathfrak{B}}$-nek. Ekkor $\mathfrak{B}$ részstruktúraként beágyazható $\mathfrak{A}$-ba.*

Bizonyítás Legyen a $b \in B$-hez rendelt konstansjel c_b, és jelöljük $g(b) \in A$-vel c_b-nek $\mathfrak{A}$-beli interpretáltját. Így a $g : B \to A$ függvény B minden elemén értelmezve van, másrészt különböző elemekhez különbözőket rendel. Ugyanis ha $b_1 \neq b_2$, akkor a $c_{b_1} \neq c_{b_2}$ formula eleme $\mathfrak{B}$ diagramjának, így igaz $\mathfrak{A}$-ban, tehát c_{b_1} és c_{b_2} interpretáltjai is különböznek. Legyen

$$B' = \{g(b) \in A : b \in B\},$$

állítjuk, hogy B' zárt a függvényjelek interpretáltjaira, azaz a B' által generált $\mathfrak{B}'$ résztruktúra alaphalmaza maga B'. Legyen $f \in t$ tehát egy n-változós függvényjel, és $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ tetszőleges elemek. Ekkor $f_{\mathfrak{B}}(b_0, \ldots, b_{n-1}) = b$ valamilyen $b \in B$-vel, tehát az $f(c_{b_0}, \ldots, c_{b_{n-1}}) = c_b$ formula eleme $\mathfrak{B}$ diagramjának, így igaz $\mathfrak{A}$-ban is. Következésképp

$$f_{\mathfrak{A}}\big(g(b_0), \ldots, g(b_{n-1})\big) = g(b).$$

Hasonlóan látható, hogy tetszőleges $r \in t$ n-változós relációjelre és $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$-re

$$\langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle \in r_{\mathfrak{B}} \quad \text{valamint} \quad \langle g(b_0), \ldots, g(b_{n-1})\rangle \in r_{\mathfrak{A}}$$

ekvivalensek. Így egyúttal azt is kaptuk, hogy a g egy izomorfizmust is megad $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{B}'$ között, tehát $\mathfrak{B}$ valóban beágyazható részstruktúraként $\mathfrak{A}$-ba. ∎

A $\mathfrak{B}$-beli elemeket jelölő konstansjelek interpretáltjai most $\mathfrak{A}$-nak egy részstruktúráját alkották. Egy kicsit más típusú feltételt szabva ez nem csak részstruktúra, hanem elemi rész is lesz.

7.20. Lemma *Álljon a C nem üres halmaz t-beli konstansjelekből, és legyen $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra. Tegyük fel, hogy minden egyváltozós $\varphi(x) \in F(t)$ formulához $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$ esetén található olyan $c \in C$ konstansjel, amire $\mathfrak{A} \models \varphi(c)$. Ekkor a C-beli jelek interpretáltjai $\mathfrak{A}$-nak egy elemi részét alkotják.*

Bizonyítás Álljon $B \subset A$ a C-hez tartozó konstansjelek interpretáltjaiból. Először is B zárt a t-beli függvényjelek interpretáltjaira. Ha ugyanis $f \in t$ egy n-változós függvényjel, és $c_0, \ldots, c_{n-1} \in C$, akkor persze

$$\mathfrak{A} \models \exists x\, f(c_0, \ldots, c_{n-1}) = x,$$

és ekkor a feltétel szerint van olyan $c \in C$ amivel $\mathfrak{A} \models f(c_0, \ldots, c_{n-1}) = c$, azaz

$$f_{\mathfrak{A}}\big((c_0)_{\mathfrak{A}}, \ldots, (c_{n-1})_{\mathfrak{A}}\big) = c_{\mathfrak{A}} \in B.$$

Így a B által generált résztstruktúra alaphalmaza is B, végül $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ abból következik, hogy a lemma feltétele éppen a 7.14. lemmában szereplő Tarski–Vaught kritérium átfogalmazása. ∎

7.21. Lemma *Tegyük föl, hogy $\mathfrak{A}$ modellje $\mathfrak{B}$ teljes diagramjának. Ekkor $\mathfrak{B}$ elemien beágyazható $\mathfrak{A}$-ba.*

Bizonyítás Mivel $\mathfrak{B}$ teljes diagramja, $\Delta_{\mathfrak{B}}$ tartalmazza $\Delta^0_{\mathfrak{B}}$-t, azért a 7.19. lemma szerint a $\mathfrak{B}$ elemeit jelölő konstansjelek $\mathfrak{A}$-beli interpretációi a $\mathfrak{B}$-vel izomorf $\mathfrak{B}'$ struktúrát határozzák meg. Annak bizonyítására, hogy $\mathfrak{B}' \prec \mathfrak{A}$ az előző lemmát használjuk. Legyen ehhez $\varphi(x) \in F(t_{\mathfrak{B}})$ tetszőleges egyváltozós formula, és tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x)$. Itt $\exists x\, \varphi(x)$ egy $t_{\mathfrak{B}}$ típusú zárt formula, ezért vagy ő vagy a tagadása benne van $\Delta_{\mathfrak{B}}$-ben, De $\mathfrak{A}$ modellje volt $\Delta_{\mathfrak{B}}$-nek, így csak $\exists x\, \varphi(x) \in \Delta_{\mathfrak{B}}$ lehetséges, azaz

$$\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x).$$

Így van olyan $b \in B$ elem is, hogy $\mathfrak{B} \models \varphi(c_b)$. Most $\varphi(c_b)$ ismét $t_{\mathfrak{B}}$ típusú zárt formula, így eleme $\Delta_{\mathfrak{B}}$-nek, tehát $\mathfrak{A} \models \varphi(c_b)$, ahogyan kívántuk. ■

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a legkisebb és legnagyobb elemmel rendelkező sűrű rendezés elmélete is teljes.
2. Mutassuk meg, hogy a $\langle\leq\rangle$ típusú, kezdőponttal rendelkező, végpont nélküli diszkrét rendezés elmélete
   - teljes,
   - nem kvantoreliminálható,
   - nem κ-kategorikus semmilyen végtelen κ számosságra.
3. Adjunk meg olyan $\mathfrak{A}$ struktúrát és abban olyan $X \subset A$ részhalmazt, hogy ne legyen $\mathfrak{A}$-nak minimális X-et tartalmazó elemi része, azaz minden $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$-hoz, ha $X \subset B$, legyen olyan $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{A}$, amire $\mathfrak{C} \subsetneq \mathfrak{B}$ és $X \subset C$.
4. Adjunk meg olyan $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots$ struktúrákat, hogy minden $i \in \omega$-ra $\mathfrak{A}_{i+1} \prec \mathfrak{A}_i$, $\bigcap\{\mathfrak{A}_i : i \in \omega\} \neq \emptyset$, de a struktúrák közös része nem elemi része $\mathfrak{A}_0$-nak.
5. Adjunk meg olyan elemien ekvivalens $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ struktúrákat, melyekre $\mathfrak{A}$ részstruktúrája $\mathfrak{B}$-nek, de nem elemi része.
6. Adjunk meg olyan Γ elméletet, hogy tetszőleges $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ modelljeire $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ esetén $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ is igaz legyen.
7. Mutassuk meg, hogy a következő struktúraosztályok zártak a növekvő struktúraláncok uniójára: csoportok, Abel-csoportok, testek, algebrailag zárt testek, Boole-algebrák.
8. Adjunk meg egy Γ elméletet és Γ modelljeinek növő $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \dots$ sorozatát úgy, hogy $\bigcup\{\mathfrak{A}_i : i \in \omega\}$ ne legyen modellje Γ-nak.
9.* Adjunk meg egy elméletet, aminek van egy megszámlálható modellje, de minden más ezzel nem izomorf modell legalább kontinuum számosságú (feltehetjük, hogy a kontinuum hipotézis nem igaz).
   Útmutatás: vegyünk fel ω-n kontinuum sok végtelen halmazt úgy, hogy bármely kettőnek csak véges sok közös eleme legyen. Mindegyiket tekintsük egy–egy reláció reprezentációjának, vegyük ehhez ω-nak a szokásos nagyság szerinti rendezését, és nevezzük meg ω elemeit egy–egy konstansjellel. Álljon Γ azokból a formulákból, melyek ezen a struktúrán igazak.
10.* Mutassuk meg, hogy egy kontinuum számosságú A halmazon megadható olyan végpontok nélküli sűrű rendezés, hogy A-nak bármely két megszámlálható és diszjunkt X és Y részére, ha X minden eleme kisebb Y bármely eleménél, akkor van olyan $a \in A$, amire X minden eleme kisebb a-nál, és Y minden eleme nagyobb a-nál. Beágyazható-e ebbe a struktúrába a valós számok halmaza a szokásos rendezéssel?