6. fejezet

A levezethetőség fogalma

Eddig főleg a formulák szemantikájáról volt szó, vagyis arról, mi azok jelentése, értelme. Ezzel szemben a szintaktika kizárólag a formulák formai megjelenésével foglalkozik, teljesen függetlenül a mögöttes tartalomtól. Például egy jelsorozatot milyen feltételek teljesülése esetén mondunk kifejezésnek, formulának; milyen szabályok alapján lehet formulákból újabbakat készíteni, stb. Ide tartozik a 2.9. Egyértelmű olvashatósági lemma, vagy a megengedett helyettesítés 3.13. definíciója is. A szintaktikus fogalmak közül talán a legfontosabb a *levezethetőség* fogalma. Ez alatt valamiféle eljárást értünk, mely egy $\Gamma \subset F(t)$ elméletről és egy $\varphi \in F(t)$ formuláról kizárólag formai jelek alapján megmondja, hogy φ levezethető-e Γ-ból. Sok különböző levezetésfogalmat lehet (és szokás) definiálni, ezek közül a matematikai bizonyításfogalmat legjobban az ún. Hilbert-típusú levezetés közelíti meg. Ebben adott formulák egy halmaza, melyet (logikai) *axiómáknak* nevezünk, továbbá *következtetési szabályok*. Ezek mindegyike $F(t)$ bizonyos véges részéhez egy formulát rendel, az előbbieket a következtetési szabály *premisszáinak*, az utóbbit a *konklúziónak* nevezzük.

6.1. Definíció Legyen $\Gamma \subset F(t)$ tetszőleges elmélet. Γ-ból való *levezetésen* vagy *bizonyításon* formulák olyan $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ sorozatát értjük, melyben minden $i < n$ -re a φ_i formula vagy Γ-nak egy eleme, vagy (logikai) axióma, vagy pedig valamelyik következtetési szabály konklúziója, aminek összes premisszája a korábban szereplő $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\}$ között megtalálható.

A $\varphi \in F(t)$ *levezethető* vagy *bizonyítható* Γ-ból, ha van olyan Γ-ból való levezetés, melynek utolsó formulája éppen φ.

Azt, hogy φ levezethető Γ-ból, így jelöljük: $\Gamma \vdash \varphi$. Szokás szerint $\{\psi\} \vdash \varphi$ helyett a $\psi \vdash \varphi$ jelölést használjuk, és $\emptyset \vdash \varphi$ helyett $\vdash \varphi$-t írunk. Azt, hogy φ nem vezethető le Γ-ból, így jelöljük: $\Gamma \nvdash \varphi$, s hasonló a $\psi \nvdash \varphi$ és $\nvdash \varphi$ jelentése.

Elsőként a most definiált levezethetőség néhány alapvető tulajdonságát mondjuk ki.

6.2. Lemma (i) *Ha* $\Gamma \subset \Delta$ *és* $\Gamma \vdash \varphi$*, akkor* $\Delta \vdash \varphi$*;*
(ii) $\Gamma \vdash \varphi$ *akkor és csak akkor, ha* Γ*-nak valamely véges* Γ' *részére* $\Gamma' \vdash \varphi$*;*
(iii) *ha* $\Delta \vdash \varphi$ *és minden* $\psi \in \Delta$*-ra* $\Gamma \vdash \psi$*, akkor* $\Gamma \vdash \varphi$.

Bizonyítás (i) azonnal adódik abból, hogy ha egy formula eleme Γ-nak, akkor eleme Δ-nak is, tehát Γ-ból való bizonyítások egyúttal Δ-ból való bizonyítások is. Ez (ii) „csak akkor” részét is mutatja. Az „akkor” rész abból következik, hogy minden levezetés véges hosszúságú, így benne Γ-nak csak véges sok eleme fordulhat elő. (iii) ugyancsak egyszerű: φ-nek Δ-ból való levezetésében Δ minden elemét helyettesítjük annak egy Γ-ból való levezetésével. A kapott sorozat továbbra is levezetés marad, utolsó formulája változatlanul φ, viszont Δ helyett Γ elemei fordulnak elő. ∎

A lemma (ii) pontját úgy is szokták fogalmazni, hogy a levezethetőség *kompakt*, vagy *véges jellegű*; az (iii) pontot pedig úgy, hogy a levezethetőség *monoton*.

Attól függően, hogy mik az axiómák és mik a következtetési szabályok, különböző bizonyításfogalmakat kapunk. A lehetséges változatok közül rögzíteni fogunk egyet, és a továbbiakban valahányszor levezetésről lesz szó, mindig erre gondolunk. Axiómáink két csoportra bomlanak, az elsőben levők a (valódi) logikai axiómák, a többiek az egyenlőség axiómák.

6.3. Definíció Tetszőleges φ, ψ, $\vartheta \in F(t)$-re a következő formulák a *logikai axiómák*:

A1 $\quad \varphi \vee \varphi \to \varphi$,

A2 $\quad \varphi \to \varphi \vee \psi$,

A3 $\quad \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$,

A4 $\quad (\varphi \to \psi) \to (\vartheta \vee \varphi \to \vartheta \vee \psi)$,

végül minden $k \in K(t)$ kifejezésre és x változójelre, ha a $\varphi[x/k]$ helyettesítés megengedett,

A5 $\quad \varphi[x/k] \to \exists x\, \varphi$.

A következő formulák az *egyenlőség axiómák*:

E1 $\quad x = x$,

E2 $\quad x = y \to y = x$,

E3 $\quad x = y \wedge y = z \to x = z$,

továbbá minden n-változós $r \in t$ relációjelre:

E4 $\quad x_0 = y_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \to (r(x_0, \ldots, x_{n-1}) \to r(y_0, \ldots, y_{n-1}))$,

és minden n-változós $f \in t$ függvényjelre:

E5 $\quad x_0 = y_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \to f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(y_0, \ldots, y_{n-1})$.

Az E5 formulát úgy kell érteni, hogy ha f nullváltozós (azaz konstansjel), akkor az egyszerűen $f = f$ alakú.

Logikai axiómából mindig végtelen sok van, míg ha a t típus véges, egyenlőség axiómából csak véges sok, egyébként annyi, amennyi a t típus számossága Az E1–E3 axiómák azt mondják ki, hogy az egyenlőség egy ekvivalencia-reláció, E4 és E5 pedig azt, hogy a relációk és függvények kompatibilisek az $=$ szerinti osztályozással.

Vegyük észre, hogy tetszőleges formuláról mechanikusan el lehet dönteni, hogy az axióma-e. Az axiómák valóban igazságokat fejeznek ki:

6.4. Lemma *A logikai és egyenlőség axiómák minden struktúrában igazak.*

Bizonyítás Az A1–A4 axiómák igazsága közvetlenül adódik az igazság definíciójából, A5-é pedig a 3.14. helyettesítési lemmából. E1–E5 abból következik, hogy az $=$ jel interpretációja a valódi egyenlőség, annak pedig ezek a tulajdonságai megvannak. ■

A következtetési szabályok felírásánál a premisszákat és a konklúziót függőleges vonal választja el: az előbbieket a vonal bal oldalára, az utóbbit a jobb oldalra írjuk. Szabályaink két sémára oszlanak. Az első az ún. *leválasztási szabály*, más néven *modus ponens*; a második az *általánosítás*.

6.5. Definíció A *következtetési szabályok* tetszőleges $\varphi, \psi \in F(t)$-re a következők:

K1 $\varphi \to \psi, \varphi \mid \psi$ leválasztási szabály vagy modus ponens,

valamint feltéve, hogy az x változójel nem szerepel szabadon ψ-ben:

K2 $\varphi \to \psi \mid (\exists x\, \varphi) \to \psi$

Ezek valóban helyes következtetéseket írnak le, vagyis ha a premisszák igazak voltak, akkor a konklúzió is igaz lesz.

6.6. Lemma *Legyen Δ valamely következtetési szabály premisszáinak halmaza, ϑ pedig a konklúzió. Ekkor $\Delta \models \vartheta$.*

Bizonyítás Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges t típusú struktúra, és tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \models \Delta$; azt kell megmutatnunk, hogy ekkor $\mathfrak{A} \models \vartheta$. Az első esetben $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$ pontosan akkor, ha minden e értékelésre $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ esetén $\mathfrak{A} \models \psi[e]$. Ám $\mathfrak{A} \models \varphi$ miatt minden e-re $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$, és ezért $\mathfrak{A} \models \psi[e]$ minden értékelésre, azaz $\mathfrak{A} \models \psi$, ahogyan kívántuk.

A második esetben legyen $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$, és legyen e olyan értékelés, amire $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi)[e]$. Ez azt jelenti, hogy valamely $a \in A$-ra $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/a)]$, és ezért $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$ miatt $\mathfrak{A} \models \psi[e(x/a)]$. Mivel x nem szerepel szabadon ψ-ben, ezért a 3.9. lemma szerint ψ igazsága nem függ az x-hez rendelt értéktől, tehát $\mathfrak{A} \models \psi[e]$ is teljesül. Így $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi) \to \psi$, és ezt akartuk bizonyítani. ∎

Illusztrációként nézzük meg, hogyan lehet a $(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \to \psi)$ formulát az axiómákból a megadott levezetési szabályokkal levezetni. A levezetés formuláit külön sorokba írjuk, a formulák elé a sorszámuk, utánuk pedig az kerül, hogy mely axiómából, illetve mely korábbi formulákból kaptuk meg. Emlékeztetünk arra, hogy a $\varphi \to \psi$ formula a $(\neg\varphi) \vee \psi$ rövidítése, ezt az átírást is gyakran használjuk, de ez nem számít külön lépésnek.

F0	$\neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\varphi$	A2 axióma
F0a	$\neg\neg\varphi \vee (\neg\varphi \vee \neg\varphi)$	átírás
F1	$\neg\varphi \vee \neg\varphi \to \neg\varphi$	A1 axióma
F2	$(\neg\varphi \vee \neg\varphi \to \neg\varphi) \to \big(\neg\neg\varphi \vee (\neg\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi \vee \neg\varphi\big)$	A4 axióma
F3	$\neg\neg\varphi \vee (\neg\varphi \vee \neg\varphi) \to \neg\neg\varphi \vee \neg\varphi$	F2 és F1 alapján K1-gyel
F4	$\neg\neg\varphi \vee \neg\varphi$	F3 és F0a alapján K1-gyel
F5	$\neg\neg\varphi \vee \neg\varphi \to \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$	A3 axióma
F6	$\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$	F5 és F4 alapján K1-gyel
F6a	$\varphi \to \neg\neg\varphi$	átírás
F7	$(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\psi \vee \varphi \to \psi \vee \neg\neg\varphi)$	A4 axióma
F8	$\psi \vee \varphi \to \psi \vee \neg\neg\varphi$	F7 és F6a alapján K1-gyel
F9	$\varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$	A3 axióma
F9a	$\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \varphi)$	átírás
F10	$(\psi \vee \varphi \to \psi \vee \neg\neg\varphi) \to \big(\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \varphi) \to \neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \neg\neg\varphi)\big)$	A4 axióma

F11	$\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \varphi) \to \neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \neg\neg\varphi)$	
		F10 és F8 alapján K1-gyel
F12	$\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \neg\neg\varphi)$	F11 és F9a alapján K1-gyel
F13	$\psi \vee \neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi \vee \psi$	A3 axióma
F14	$(\psi \vee \neg\neg\varphi \to \varphi \vee \psi) \to$	
	$\big(\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \neg\neg\varphi) \to \neg(\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\varphi \vee \psi)\big)$	
		A4 axióma
F15	$\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\psi \vee \neg\neg\varphi) \to \neg(\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\varphi \vee \psi)$	
		F14 és F13-ból K1-gyel
F16	$\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\neg\neg\varphi \vee \psi)$	F15 és F12-ből K1-gyel
F16a	$\varphi \vee \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$	átírás

A levezetés tulajdonképpen „játék a jelekkel.” Egy papírlapra adott szabályok szerint újabb és újabb jelsorozatokat írunk, mit sem törődve azok jelentésével. A következő tétel szerint a szabályokat elég ügyesen választottuk ahhoz, hogy ne lehessen Γ-ból olyan formulákat levezetni, amik nem következményei Γ-nak.

6.7. Tétel (Igazság tétel) *Minden $\Gamma \subset F(t)$-re és $\varphi \in F(t)$ formulára, ha $\Gamma \vdash \varphi$, akkor $\Gamma \models \varphi$.*

Bizonyítás A levezetés hossza szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen φ-nek Γ-ból való legrövidebb levezetése $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, és tegyük fel, hogy az állítást már tudjuk az összes olyan $\psi \in F(t)$ formulára, melyet Γ-ból n-nél kevesebb lépésben le lehet vezetni. Mivel minden $i < n$-re a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$ sorozat egy n-nél rövidebb levezetés Γ-ból, azért az indukciós feltételünk miatt $\Gamma \models \varphi_{i-1}$.

Most különböztessünk meg három esetet aszerint, hogy φ_{n-1} miért került a bizonyításba. Ha $\varphi_{n-1} \in \Gamma$, akkor persze $\Gamma \models \varphi_{n-1}$, és $\varphi_{n-1} \equiv \varphi$ miatt készen vagyunk. Ha φ_{n-1} egy axióma, akkor a 6.4. lemma miatt $\models \varphi_{n-1}$, és ekkor $\Gamma \models \varphi_{n-1}$ is teljesül. Az maradt hátra, mikor φ_{n-1} a K1 vagy K2 következtetési szabályok valamelyikének konklúziója. A szabály premisszáinak Δ halmaza része $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}\}$-nek, így az indukciós feltétel miatt $\Gamma \models \Delta$. A 6.6. lemma szerint $\Delta \models \varphi_{n-1}$, tehát $\Gamma \models \varphi_{n-1}$. Ezzel a tétel állítását beláttuk. ■

Az igazság tétel az egyik fele *K. Gödel* nevezetes 1930-ból származó *teljességi tételének*, mely szerint egy formulahalmaz következményei és a belőle levezethető formulák ugyanazok.

6.8. Tétel (Gödel teljességi tétele) *Minden $\Gamma \subset F(t)$-re és $\varphi \in F(t)$ formulára, $\Gamma \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash \varphi$.* ■

A tétel azt a nagy jelentőségű tényt fejezi ki, hogy a mechanikusan, „gondolkodás nélkül” végezhető formulajátékkal mindazokat a formulákat, és csak azokat, megkaphatjuk, melyek Γ-nak következményei. Kicsit szabadabban fogalmazva: ami igaz, azt be is lehet bizonyítani. A tétel szempontjából lényegtelen, hogy mik is azok a konkrét axiómák és levezetési szabályok, melyekkel az igaz formulák levezethetők, a fontos az, hogy ilyenek léteznek.

A tételt most nem bizonyítjuk, néhány következményét azonban felsoroljuk. A 9. fejezet végén a feladatok között vázoljuk a tétel egy bizonyítását.

6.9. Következmény $\Gamma \models \varphi$ *akkor és csak akkor, ha* Γ*-nak valamely véges* Γ' *részére* $\Gamma' \models \varphi$.

Bizonyítás A teljességi tétel szerint $\Gamma \models \varphi$ és $\Gamma \vdash \varphi$ ekvivalensek. A levezethetőség véges tulajdonságú, tehát ez utóbbi pontosan akkor, ha valamely véges $\Gamma' \subset \Gamma$ formulahalmazra $\Gamma' \vdash \varphi$. Ismét a teljességi tétel szerint ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy $\Gamma' \vdash \varphi$. ■

6.10. Definíció Egy $\Gamma \subset F(t)$ elmélet *ellentmondástalan*, ha nincs olyan $\varphi \in F(t)$, melyre $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. A Γ *konzisztens*, ha van olyan modellje, azaz van olyan t típusú $\mathfrak{A}$ struktúra, melyre $\mathfrak{A} \models \Gamma$.

Az alábbi következményt is „Gödel teljességi tétele" néven szokták emlegetni.

6.11. Következmény $\Gamma \subset F(t)$ *akkor és csak akkor ellentmondástalan, ha konzisztens.*

Bizonyítás Elsőként tegyük fel, hogy Γ konzisztens. Mivel tetszőleges $\mathfrak{A}$ struktúrára és φ formulára $\mathfrak{A} \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$, azért $\Gamma \not\models \varphi \wedge \neg\varphi$ hiszen Γ-nak van modellje. Ekkor az igazság tétel miatt $\Gamma \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$, tehát Γ ellentmondástalan.

Fordítva, tegyük fel, hogy Γ-nak nincs modellje. Ekkor viszont tetszőleges $\varphi \in F(t)$-re $\Gamma \models \varphi \wedge \neg\varphi$, hiszen minden olyan $\mathfrak{A}$ struktúrára, melyre $\mathfrak{A} \models \Gamma$, egyúttal $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \neg\varphi$ (mert ilyen $\mathfrak{A}$ nincs). Ekkor viszont a 6.8. teljességi tétel miatt $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, azaz Γ ellentmondásos. ■

Az alábbi következmény tipikus szemantikus tétel, benne a levezetés, levezethetőség egyáltalán nem fordul elő. Bizonyítása legegyszerűbben mégis a teljességi tétel alapján történhet, s érdekes módon egészen az 50-es évek közepéig nem volt ismeretes attól független bizonyítása. *J. Łoś* 1955-ből származó bizonyítását a 8. fejezetben ismertetjük.

6.12. Következmény (Gödel kompaktsági tétele) *Ha* $\Gamma \subset F(t)$ *minden véges részének van modellje, akkor van* Γ*-nak is.*

Bizonyítás Az előző következmény szerint Γ tetszőleges véges része akkor és csak akkor konzisztens, ha ellentmondástalan. Így Γ minden véges része ellentmondástalan, tehát Γ is. Ismét az előző következmény szerint ekkor Γ konzisztens is, ahogyan állítottuk. ■

Ez a teljességi tétel egyik legtöbbet és legjobban használható következménye, ahogyan azt a 8. és 9. fejezetekben látni fogjuk.

Feladatok

1. Legyen ξ egy rendszám és $\alpha < \xi$ esetén $T_\alpha \subset F(t)$ ellentmondástalan elmélet úgy, hogy $\beta < \alpha < \xi$ esetén $T_\beta \subset T_\alpha$. Igazoljuk, hogy ekkor $\bigcup\{T_\alpha : \alpha < \xi\}$ is ellentmondástalan.
2. Bizonyítandó, hogy minden $\Gamma \subset F(t)$ ellentmondástalan elmélethez található egy Γ-t tartalmazó maximális ellentmondástalan elmélet.
3. Csak a levezethetőség definícióját használva igazoljuk, hogy tetszőleges φ, ψ formulákra $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$.

4. Csak a levezethetőség definícióját használva mutassuk meg, hogy egy formula akkor és csak akkor vezethető le Γ-ból, ha lezártja levezethető. Útmutatás: igazoljuk, hogy $\{\forall x\, \varphi\} \vdash \varphi$ és $\varphi \vdash \forall x\, \varphi$.
5. Legyen $\Gamma \subset F(t)$ maximális ellentmondástalan elmélet. Mutassuk meg, hogy tetszőleges φ, $\psi \in F(t)$-re
   - $\Gamma \vdash \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\varphi \in \Gamma$,
   - $\varphi \notin \Gamma$ akkor és csak akkor, ha $\neg\varphi \in \Gamma$,
   - $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ akkor és csak akkor, ha $\varphi \in \Gamma$ és $\psi \in \Gamma$ is teljesül,
   - $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ akkor és csak akkor, ha vagy $\varphi \in \Gamma$, vagy $\psi \in \Gamma$.
6. Legyen R kétváltozós relációjel. Mutassuk meg, hogy az alábbi formula minden véges struktúrán igaz:
$$\forall x\, \forall y \forall z\, \big[R(x,x) \wedge \big(R(x,y) \vee R(y,x)\big) \wedge \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)\big)\big] \to \exists x\, \forall y\, R(x,y).$$
   Adjunk meg végtelen struktúrát, ahol nem igaz!
7. Legyen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset F(t)$ és tegyük fel, hogy tetszőleges t típusú $\mathfrak{A}$ struktúrára $\mathfrak{A} \models \Gamma_1$ és $\mathfrak{A} \models \Gamma_2$ közül pontosan az egyik igaz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor Γ_1 modelljeinek osztálya végesen axiomatizálható. Útmutatás: használjuk a kompaktsági tételt.
8.* Rögzítsük a t hasonlósági típust és definiáljunk egy topologikus teret a következőképpen. A tér pontjai legyenek a t típusú struktúrák, a bázis nyílt halmazok pedig a t típusú elméletek modelljei, vagyis a tér $\{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma\}$ alakú részei valamely $\Gamma \subset F(t)$-vel. Mutassuk meg, hogy a kompaktsági tétel ekvivalens azzal az állítással, hogy ez a tér kompakt.
9.* Legyen $\Gamma \subset F(t)$ maximális ellentmondástalan formulahalmaz. Álljon a C nem üres halmaz t-beli konstansjelekből úgy hogy
   - ha c_1, c_2 különböző elemei C-nek akkor $\Gamma \vdash c_1 \neq c_2$,
   - minden egyváltozós $\varphi(x) \in F(t)$ formulára $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi(x)$ esetén valamely $c \in C$-re $\Gamma \vdash \varphi(c)$.

   Legyen a $\mathfrak{C}$ struktúra alaphalmaza C, és definiáljuk a függvények és relációk interpretáltjait a következőképpen:
   $f_{\mathfrak{C}}(c_0, \ldots, c_{n-1}) = c_n$ ha $\Gamma \vdash f(c_0, \ldots, c_{n-1}) = c_n$,
   $\langle c_0, \ldots, c_{n-1}\rangle \in r_{\mathfrak{C}}$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash r(c_0, \ldots, c_{n-1})$.

   Mutassuk meg, hogy ez a definíció jogos, továbbá $\mathfrak{C}$ modellje Γ-nak. Útmutatás: kövessük a 7.20. lemma bizonyítását.