5. fejezet

A következmény fogalma

Legyen t egy hasonlósági típus, Γ pedig t típusú elmélet, azaz $\Gamma \subset F(t)$. Egy φ formula következménye Γ-nak, ha Γ összes formulája nem tud úgy igaz lenni, hogy φ ne lenne igaz, vagy másképpen Γ formuláinak igazsága már biztosítja φ igazságát. Ezt a következményfogalmat használtuk az axiómarendszerekkel definiált struktúraosztályok vizsgálatánál, és nyilván ez az, amit a hétköznapi életben következményként emlegetnek.

5.1. Definíció A $\varphi \in F(t)$ formula (szemantikus) *következménye* a $\Gamma \subset F(t)$ elméletnek, ha minden t típusú $\mathfrak{A}$ struktúrára, $\mathfrak{A} \models \Gamma$ esetén $\mathfrak{A} \models \varphi$ is teljesül. Azt, hogy φ következménye Γ-nak, így jelöljük: $\Gamma \models \varphi$.

Egy elemű Γ-ra $\{\psi\} \models \varphi$ helyett $\psi \models \varphi$ a szokásos írásmód, ha pedig Γ üres, akkor egyszerűen nem írjuk ki, és a $\models \varphi$ jelölést használjuk. Ez utóbbi azt mondja, hogy φ minden t típusú struktúrában igaz, az ilyen formulákat *logikai igazságoknak* nevezzük. Így például logikai igazság az $x = x$ formula, vagy minden $\varphi \in F(t)$-re a $\varphi \vee \neg\varphi$. Következményre is számos példát láttunk, így például a 4.4. lemma szerint *PA* $\models (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$, ahol *PA* a Peano axiómarendszert jelöli.

Elsőként a formulák olyan átalakításáról lesz szó, amik nem változtatják meg azok igazságát.

5.2. Definíció A φ és ψ formulák *logikailag ekvivalensek*, ha tetszőleges $\mathfrak{A}$ struktúrára és e értékelésre $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ valamint $\mathfrak{A} \models \psi[e]$ ekvivalensek, azaz ha $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Ha a φ formula felépítése közben annak egy ψ részformuláját kicseréljük egy ψ-vel ekvivalens ψ'-re, akkor az adódó φ' és az eredeti φ is ekvivalens lesz. Ez formulaindukcióval azonnal adódik az alábbi lemmából.

5.3. Lemma *Tegyük fel, hogy φ és ψ logikailag ekvivalensek. Ekkor logikailag ekvivalensek az alábbi formulapárok is: $\neg\varphi$ és $\neg\psi$; $\exists x\, \varphi$ és $\exists x\, \psi$; $\varphi \vee \vartheta$ és $\psi \vee \vartheta$; $\vartheta \vee \varphi$ és $\vartheta \vee \psi$.*

Most egy sor ekvivalens formulákból álló párt írunk fel. Ezek jól ismert „átalakítási szabályokat” mondanak ki, a szabályok elnevezéseit zárójelben tüntettük fel.

5.4. Lemma *Tetszőleges φ, ψ, ϑ formulákra a következő párok logikailag ekvivalensek:*

φ	és	$\varphi \vee \varphi$	(idempotencia)
φ	és	$\varphi \wedge \varphi$;	
$\varphi \wedge \psi$	és	$\psi \wedge \varphi$	(kommutativitás)
$\varphi \vee \psi$	és	$\psi \vee \varphi$;	
$(\varphi \vee \psi) \vee \vartheta$	és	$\varphi \vee (\psi \vee \vartheta)$	(asszociativitás)
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta$	és	$\varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta)$;	

φ	és	$(\varphi \vee \psi) \wedge \varphi$	(elnyelési tulajdonság)
φ	és	$(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi$;	
$\varphi \vee (\psi \wedge \vartheta)$	és	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \vartheta)$	(disztributivitás)
$\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta)$	és	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$;	
$\neg(\varphi \vee \psi)$	és	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	(deMorgan szabályok)
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	és	$\neg\varphi \vee \neg\psi$;	
φ	és	$\neg\neg\varphi$	(kettős tagadás)
$\varphi \to \psi$	és	$\neg\psi \to \neg\varphi$	(kontrapozició).

Bizonyítás Az egyszerű, ám idő- és helyigényes bizonyítást az olvasóra hagyjuk. ■

A $\vee$ (vagy) műveletet *diszjunkciónak*, az $\wedge$ (és) műveletet *konjunkciónak* nevezzük. A lemma szerint mindkettő kommutatív és asszociatív, így ha egyszerre több formula konjunkcióját vagy diszjunkcióját kell felírnunk, nem kell azok sorrendjével és zárójelezésével törődnünk: tetszőleges sorrend és zárójelezés esetén megegyezik igazságértékük. A kettős tagadás törvénye alapján pedig egy formulában annak igazságának megváltoztatása nélkül bárhol kitörölhetünk páros sok egymás után álló $\neg$ jelet.

Nem változtatja meg a formulák igazságát az sem, ha bennük a kötött változókat „szisztematikusan" átnevezzük. Kezdjük a legegyszerűbb esettel, amikor is a formula kvantorral kezdődik.

5.5. Lemma *Tegyük fel, hogy y változójel nem fordul elő a $\exists x\, \varphi$ formulában. Ekkor $\exists x\, \varphi$ és $\exists y\, (\varphi[x/y])$ logikailag ekvivalensek, azaz minden $\mathfrak{A}$ struktúrában $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi \leftrightarrow \exists y\, (\varphi[x/y])$.*

Bizonyítás Először is megjegyezzük, hogy a $\varphi[x/y]$ helyettesítés megengedett, ez azonnal következik abból, hogy y egyáltalán nem fordul elő φ-ben. Ugyanezért $y \notin V(\varphi)$, és persze $x \notin V(\varphi[x/y])$. A változójelek tetszőleges $\mathfrak{A}$ fölötti e értékelésére $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi[e]$ pontosan akkor, ha valamely $a \in A$ elemre $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Az y változó nem szerepel (szabadon) φ-ben, ezért a 3.9. lemma alapján ez utóbbi pontosan akkor áll, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/a, y/a)]$, vagy az $e' = e(y/a)$ jelöléssel, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e'(x/a)]$. Az y változójelnek, mint kifejezésnek az értéke $y_{\mathfrak{A}}[e'] = e'(y) = a$, ezért a helyettesítési lemma alapján ez utóbbi formula akkor és csak akkor igaz, ha

$$\mathfrak{A} \models (\varphi[x/y])[e'],$$

ami e' definíciója szerint ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{A} \models (\exists y\, \varphi[x/y])[e]$. Tetszőleges e értékelésre $\exists x\, \varphi$ és $\exists y\, \varphi[x/y]$ igazsága tehát megegyezik, a lemmát bizonyítottuk. ■

Az 5.3. lemma alapján φ-nek tetszőleges $\exists x\, \psi$ alakú részformulájában lecserélhetjük az x kötött változót bármely, a $\exists x\, \psi$-ben nem szereplő változójelre, logikailag ekvivalens formulát kapunk. Így ekvivalensek a $\exists x\, (x = y)$ és $\exists u\, (u = y)$ formulák, vagy az alábbi formulapár is:

$$\exists x_3\, (x_3 + x_0 = x_1) \wedge \exists x_3\, (x_3 + x_1 = x_2) \to \exists x_3\, (x_3 + x_0 = x_2),$$

$$\exists x\, (x + x_0 = x_1) \wedge \exists y\, (y + x_1 = x_2) \to \exists z\, (z + x_0 = x_2),$$

Azzal a lehetőséggel, hogy a kötött változók bármikor átnevezhetők, gyakorta élünk.

Ammennyiben a formulákat a programozási nyelvek eljárásaihoz, szubrutinjaihoz hasonlítjuk, a kötött változók a formulák „lokális változói,” melyekhez kívülről nem lehet hozzáférni, a szabad változók pedig a „paraméterek” vagy „argumentumok,” melyek értékét az eljárás meghívásakor — a formula igazságának kiszámításakor — kell megadni.

5.6. Lemma *Tetszőleges φ, ψ formulákra az alábbi formulapárok logikailag ekvivalensek:*

(i) $\neg\exists x\,\varphi$ és $\forall x\,\neg\varphi$; $\neg\forall x\,\varphi$ és $\exists x\,\neg\varphi$;

(ii) $\exists x\,\exists y\,\varphi$ és $\exists y\,\exists x\,\varphi$; $\forall x\,\forall y\,\varphi$ és $\forall x\,\forall y\,\varphi$;

(iii) $(\exists x\,\varphi)\vee\psi$ és $\exists x\,(\varphi\vee\psi)$; $(\forall x\,\varphi)\vee\psi$ és $\forall x\,(\varphi\vee\psi)$, feltéve, hogy x nem szerepel szabadon ψ-ben.

Bizonyítás (i) és (ii) közvetlenül adódik a definíciókból. (iii) két felének bizonyítása hasonló, ezért csak az elsőt igazoljuk. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $\mathfrak{A}$ struktúrára és e értékelésre, $\mathfrak{A}\models(\exists x\,\varphi)\vee\psi[e]$ valamint $\mathfrak{A}\models\exists x\,(\varphi\vee\psi)[e]$ ekvivalensek. A formulák igazságának definíciója alapján az első pontosan akkor áll, ha vagy ha vagy $\mathfrak{A}\models\varphi[e(x/a)]$ valamilyen $a\in A$ elemre, vagy $\mathfrak{A}\models\psi[e]$. Mivel x nem fordul elő szabadon ψ-ben, azért a 3.9. lemma szerint ψ igazsága nem függ attól, hogy az e értékelés mit rendel az x változójelhez, így $\mathfrak{A}\models\psi[e]$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A}\models\psi[e(x/a)]$. Tehát $\mathfrak{A}\models(\exists x\,\varphi)\vee\psi[e]$ pontosan akkor áll, ha $\mathfrak{A}\models(\varphi\vee\psi)[e(x/a)]$ valamilyen $a\in A$-val, azaz ha $\mathfrak{A}\models\exists x\,(\varphi\vee\psi)[e]$, ahogyan kívántuk. ■

Egy formula *nyílt*, ha egyáltalán nem tartalmaz kvantort. Így nyíltak a prímformulák, és azok, amik a prímformulákból a $\neg$, $\vee$ és $\wedge$ logikai jelekkel építhetők fel. Egy nyílt formuláról azt mondjuk, hogy *diszjunktív normál formájú*, ha egy vagy több $\vee$ jellel összekötött, ún. diszjunkciós tagból áll, a diszjunkciós tagok mindegyike prímformulák és prímformulák tagadásainak konjunkciója, vagyis ezek $\wedge$ jellel összekötött sorozata. Egy nyílt formula *konjunktív normál formájú*, ha egy vagy több $\wedge$ jellel összekötött konjunkciós tagból áll, amik viszont prímformulák és azok tagadásainak diszjunkciói. A halmazelmélet következő formulája például diszjunktív normál formájú:

$$(u\in x\wedge\neg(u\in y))\vee(\neg(u\in x)\wedge u\in y)\vee x=y$$

és három diszjunkciós tagot tartalmaz, az

$$(u\in x\vee u\in y\vee x=y)\wedge\big(\neg(u\in x)\vee\neg(u\in y)\vee x=y\big)$$

formula pedig két konjunkciós tagból álló konjunktív normál formájú. Egyetlen prímformulát vagy annak tagadását is diszjunktív és konjunktív normál formájúnak tekintünk.

Már az elnevezés is utal rá, hogy ezeket a nyílt formulák normál alakjának lehet tekinteni.

5.7. Tétel *Minden nyílt formulához található vele logikailag ekvivalens diszjunktív normál formájú, valamint konjunktív normál formájú formula.*

Bizonyítás Megadunk egy eljárást, mely tetszőleges nyílt formulából vele ekvivalens formulák sorozatán keresztül egy diszjunktív (konjunktív) normál formulát készít. Az eljárás folyamán csak olyan formulák fognak előfordulni, melyek a $\vee$, $\wedge$ valamint $\neg$ logikai műveleti jeleket tartalmazzák. Kezdetben ez így van, mivel definíciónk szerint φ-ben csak a $\neg$ és $\vee$ fordulhat elő.

1. lépés Ha az utoljára kapott formula valamely részformulája $\neg(\varphi \vee \psi)$ alakú, azt helyettesítsük $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$-val; ha az $\neg(\varphi \wedge \psi)$ alakú, helyettesítsük $(\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$-vel.

Az 5.4. lemma szerint amit helyettesítünk és amivel helyettesítünk, ekvivalensek, ezért a helyettesítés után az eredetivel ekvivalens formulát fogunk kapni. Az is világos, hogy ha az 1. lépést nem tudjuk alkalmazni, akkor az összes negációjel prímformulák előtt, vagy azok negáltjai előtt, stb. áll.

Az, hogy tetszőleges formulából kiindulva az 1. lépést csak véges sokszor alkalmazhatjuk, nem teljesen nyilvánvaló, hiszen az eljárás folyamán a formula mérete állandóan nő. Viszont a formulában található $\wedge$ és $\vee$ jelek együttes száma nem változik, és minden $\neg$ jel minden $\wedge$ és $\vee$-hoz tartozó részformulára legfeljebb egyszer alkalmazható. Így ha n darab $\neg$ jel és ℓ darab $\wedge$ illetve $\vee$ jel volt a kiindulási formulában, legfeljebb $n \cdot \ell$ lépés után megállunk.

2. lépés Ha az 1. lépést már nem tudjuk alkalmazni, akkor az összes $\neg$ jel közvetlenül prímformulák előtt áll. Ha egy prímformula előtt páros sok $\neg$ van, töröljük ki az összeset, ha pedig páratlan sok, egyet hagyjunk meg. Az 5.4. lemma „kettős tagadás” szabálya értelmében a kapott formula ekvivalens az eredetivel.

3. lépés Erre akkor kerül sor, ha az előző két lépést már nem tudjuk alkalmazni. Az, hogy mit kell csinálni, függ attól, hogy diszjunktív vagy konjunktív normál formájú formulát akarunk-e előállítani. Az első esetben a $\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta)$ valamint $(\psi \vee \vartheta) \wedge \varphi$ alakú részformulákat cseréljük ki $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$-ra; a második esetben a $\varphi \vee (\psi \wedge \vartheta)$ valamint $(\psi \wedge \vartheta) \vee \varphi$ alakú részformulákat $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \vartheta)$-ra. Ezzel továbbra is logikailag ekvivalens formulákat kapunk, és világos, hogy ezt a lépést csak akkor nem tudjuk alkalmazni, ha a keresett normál formát megkaptuk.

Így most is csak azt kell belátnunk, hogy előbb-utóbb megakadunk. Sajnos most a formulák változását nem annyira könnyű követni, mint az 1. lépés esetén. A végesség azonban most is azonnal adódik, ha sikerül a formulákhoz természetes számokat rendelnünk úgy, hogy ez a szám az eljárás folyamán mindvégig csökkenjen. A φ formulához rendelt értéket $r(\varphi)$-vel jelöljük és φ felépítésére vonatkozó rekurzióval definiáljuk: $r(\varphi) = 1$, ha φ prímformula vagy annak negáltja, $r(\varphi \wedge \psi) = r(\varphi)^2 \cdot r(\psi)^2$, és $r(\varphi \vee \psi) = r(\varphi) + r(\psi)$.

A definíció alapján világos, hogy r monoton, azaz ha φ-nek egy ψ részformuláját kicseréljük egy olyan ψ'-re, amire $r(\psi') < r(\psi)$, akkor az adódó φ' formulára $r(\varphi') < r(\varphi)$. Így mindössze azt kell ellenőriznünk, hogy minden φ, ψ, ϑ mellett igaz a következő két egyenlőtlenség:

$$r\big(\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta)\big) > r\big((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)\big)\,,$$

$$r\big((\psi \vee \vartheta) \wedge \varphi\big) > r\big((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)\big)\,.$$

Az egyenlőtlenségeket felírva:

$$r(\varphi)^2(r(\psi) + r(\vartheta))^2 > r(\varphi)^2 \cdot r(\psi)^2 + r(\varphi)^2 \cdot r(\vartheta)^2$$

valóban teljesül, amivel diszjunktív normál forma esetére igazoltuk, hogy a 3. lépést csak véges sokszor tudjuk alkalmazni. Hasonlóan láthatjuk be, hogy a konjunktív normál formulához is előbb-utóbb eljutunk. ∎

Ha φ-t a nyílt ψ formulából úgy kaphatjuk meg, hogy ψ elé valamilyen sorrendben univerzális és egzisztenciális kvantorokat írunk, akkor φ-t *prenex formulának* nevezzük. Speciálisan a nyílt formulákat is prenexeknek tekintjük. Ezek hasonló normálforma szerepet töltenek be a formulák között, mint amilyent a konjunktív normál formájúak a nyíltak között.

5.8. Tétel *Minden formulához található egy vele logikailag ekvivalens prenex formula.*

Bizonyítás Az előző tétel bizonyításához hasonlóan megadunk egy eljárást, ami csak akkor fejeződik be, ha prenex formulához értünk el. Az eljárás során a formulákban a $\neg$ és $\vee$ műveleti jeleken és a $\exists$ kvantoron kívül csak a $\forall$ kvantor for előfordulni. Az eljárást addig folytatjuk, míg az alábbi négy lépés valamelyikét alkalmazni tudjuk:

1a. lépés Ha a formula tartalmaz $\neg\exists x\, \varphi$ alakú részformulát, azt cseréljük ki $\forall x\, (\neg\varphi)$-re.

1b. lépés Ha a formula tartalmaz $\neg\forall x\, \varphi$ alakú részformulát, azt cseréljük ki $\exists x\, (\neg\varphi)$-re.

2a. lépés Ha a formula tartalmaz $(\exists x\, \varphi) \vee \psi$ vagy pedig $\psi \vee (\exists x\, \varphi)$ alakú részformulát, akkor elsőként válasszunk olyan y változójelet, ami nem szerepel a részformulában, majd a részformulát cseréljük le a $\exists y\, (\varphi[x/y] \vee \psi)$ formulára.

2b. lépés Ha a formula tartalmaz $(\forall x\, \varphi) \vee \psi$ vagy $\psi \vee (\forall x\, \varphi)$ alakú részformulát, akkor válasszunk olyan y változójelet, ami a részformulában nem szerepel, majd az egészet cseréljük le a $\forall y\, (\varphi[x/y] \vee \psi)$ formulára.

Az 5.5. és 5.6. lemmák alapján ezek az átalakítások logikailag ekvivalens formulákat eredményeznek, és az is világos, hogy nem prenex formulára a lépések valamelyikét biztosan lehet alkalmazni, ezért a tétel következik abból, hogy az eljárás véges sok lépésben véget ér.

Ez utóbbi állítás bizonyításához rendeljük a φ formulához az $r(\varphi)$ természetes számot a következőképpen:
$r(\varphi) = 2$ ha φ prímformula,
$r(\neg\varphi) = 2 \cdot r(\varphi)$, $r(\varphi \vee \psi) = r(\varphi) \cdot r(\psi)$, végül
$r(\exists x\, \varphi) = r(\forall x\, \varphi) = r(\varphi) + 1$.
Az eljárás során a formulához rendelt szám állandóan csökken, hiszen egyrészt r monoton, másrészt

$$r(\neg\exists x\, \varphi) = 2 \cdot \big(r(\varphi) + 1\big) > 1 + 2 \cdot r(\varphi) = r\big(\forall x\, (\neg\varphi)\big)\,,$$

valamint $r(\psi) \geq 2$ alapján

$$r\big((\exists x\, \varphi) \vee \psi\big) = \big(r(\varphi) + 1\big) \cdot r(\psi) > r(\varphi) \cdot r(\psi) + 1 = r\big(\exists y\, (\varphi[x/y] \vee \psi)\big)\,. \qquad \blacksquare$$

Példaként nézzük meg, hogy a *ZF* axiómarendszer meghatározottsági axiómájára:

$$\forall x\, \forall y\, \big(\forall u\, (u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y\big)$$

hogyan működik az eljárás. Először is, a formulát a $\leftrightarrow$ és $\to$ rövidítések nélkül írjuk fel:

$$\forall x\, \forall y\, \big(\neg\forall u\, \big((u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \in x \vee u \notin y)\big) \vee x = y\big)\,.$$

Az 1. lépés alkalmazásával a $\neg$ jelet a $\forall$ kvantor mögé visszük:

$$\forall x\, \forall y\, \big(\exists u\, \big(\neg((u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \in x \vee u \notin y))\big) \vee x = y\big)\,.$$

Most a 2a. lépés következik, de átnevezésre nincs szükség, mivel u nem fordul elő az $x = y$ formulában:

$$\forall x\, \forall y\, \exists u\, \big(\neg\, \big((u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \in x \vee u \notin y)\big) \vee x = y\big)\,.$$

Ezzel a prenex alakot megkaptuk.

A belső nyílt formulát hozzuk diszjunktív normál alakúra! Elsőként a $\neg$ jelet a de-Morgan szabályok alapján legbelülre visszük:

$$\bigl(\neg(u \notin x \vee u \in y) \vee \neg(u \in x \vee u \notin y)\bigr) \vee x = y,$$

$$\bigl(\neg(u \notin x) \wedge \neg(u \in y)\bigr) \vee \bigl(\neg(u \in x) \wedge \neg(u \notin y)\bigr) \vee x = y.$$

Innen a kétszeres negálások törlése után máris előáll a keresett alak:

$$(u \in x \wedge u \notin y) \vee (u \notin x \wedge u \in y) \vee x = y.$$

Ha ugyanezt a formulát konjunktív normál formára akarjuk hozni, lényegesen többet kell dolgoznunk, számtalanszor alkalmazva a disztributivitási szabályt.

A prenex formulákat szokás osztályozni aszerint hogy a formula elején álló kvantorsorozat hány azonos kvantorból álló blokkra bomlik. A $\exists_0$ és $\forall_0$ egyaránt a nyílt formulákat jelentik. Most tegyük fel, hogy valamilyen $n \geq 0$-ra már definiáltuk a $\exists_n$ és $\forall_n$ halmazokat. Ekkor

$$\exists_{n+1} = \{\exists x_0 \, \exists x_1 \, \ldots \, \exists x_{k-1} \, \psi \in F(t) : \, \psi \in \forall_n \ \text{ és } \ k \geq 0\},$$

valamint

$$\forall_{n+1} = \{\forall x_0 \, \forall x_1 \, \ldots \, \forall x_{k-1} \, \psi \in F(t) : \, \psi \in \exists_n \ \text{ és } \ k \geq 0\}.$$

Minden esetben megengedjük, hogy $k = 0$ legyen, azaz ψ elé egyetlen új kvantort sem kell írnunk. Így a $\exists_n$ és $\forall_n$-beli formulák elemei $\exists_{n+1}$-nek és $\forall_{n+1}$-nek is minden n-re. Világos, hogy minden prenex formula a $\exists_n$ és $\forall_n$ halmazok valamelyikébe beleesik. A $\exists_1$ elemeit *egzisztenciális*, a $\forall_1$ elemeit pedig *univerzális* formuláknak szokás nevezni. A Peano axiómák például a teljes indukció axiómasémáját kivéve csupa univerzális formulából állnak.

Az egyenlőség jele abban különbözik a nyelv többi relációjelétől, hogy interpretációja előre meg van szabva: $k_0 = k_1$ csak úgy lehet igaz egy struktúrában, ha a k_0 és k_1 kifejezések értéke ugyanaz az elem. Ez időnként kényelmetlenséget okozhat, ugyanis az egyenlőségjellel külön kell foglalkozni, ami a bizonyításokat elbonyolítja. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogyan lehet az egyenlőségtől – a következményfogalom megtartása mellett – megszabadulni.

Bővítsük ki a t hasonlósági típust az új $\approx$ kétváltozós relációjellel, legyen a kibővített típus $\tilde{t}$. Minden $\varphi \in F(t)$-re jelölje $\widetilde{\varphi} \in F(\tilde{t})$ azt a formulát, amit úgy kapunk, hogy φ-ben minden $=$ jelet kicserélünk $\approx$-ra, és persze $\Gamma \subset F(t)$ esetén $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\varphi} : \varphi \in \Gamma\}$. Az egyenlőségjel helyett álló $\approx$ relációjelről szeretnénk, ha interpretáltja úgy viselkedne, mint az igazi egyenlőség. Azt persze nem várhatjuk, hogy egybeessen vele, de mindenesetre megkövetelhetjük, hogy kielégítsen bizonyos formulákat. Legyen tehát $E \subset F(\tilde{t})$ a következő formulahalmaz:

E1 $\qquad x \approx x,$
E2 $\qquad x \approx y \to y \approx x,$
E3 $\qquad x \approx y \wedge y \approx z \to x \approx z,$

továbbá minden n-változós $r \in t$ változójelre

E4 $\qquad x_0 \approx y_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \approx y_{n-1} \to \big(r(x_0, \ldots, x_{n-1}) \to r(y_0, \ldots, y_{n-1})\big),$

végül minden n-változós $f \in t$ függvényjelre

E5 $\qquad x_0 \approx y_0 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \approx y_{n-1} \to f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \approx f(y_0, \ldots, y_{n-1}).$

E1–E5-öt *egyenlőség axiómáknak* szokás hívni.

5.9. Tétel *Legyen* $\Gamma \subset F(t)$ *és* $\varphi \in F(t)$ *tetszőleges. Ekkor* $\Gamma \models \varphi$ *akkor és csak akkor, ha* $\widetilde{\Gamma} \cup \mathrm{E} \models \widetilde{\varphi}$.

Bizonyítás A tétel „csak akkor” része az egyszerűbb. Legyen ugyanis $\widetilde{\Gamma} \cup \mathrm{E} \models \widetilde{\varphi}$ és legyen $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra, amire $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Azt szeretnénk igazolni, hogy ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi$. Definiáljuk $\mathfrak{A}$-n az E relációt a következőképpen: $a, b \in A$-ra $E(a, b)$ pontosan akkor, ha $a = b$. Most kiterjesztjük $\mathfrak{A}$-t egy $\tilde{t}$ típusú $\mathfrak{B}$ struktúrúvá a következő módon. Az alaphalmaz és a t-beli jelek interpretáltjai maradjanak változatlanok, a $\approx$ reláció interpretáltja pedig legyen E. $\mathfrak{A} \models \Gamma$ miatt $\mathfrak{B} \models \widetilde{\Gamma}$ is teljesül, továbbá mivel a $\approx$ interpretációja a valódi egyenlőség, azért $\mathfrak{B} \models \mathrm{E}$. A feltétel szerint $\widetilde{\Gamma} \cup \mathrm{E} \models \widetilde{\varphi}$, tehát $\mathfrak{B} \models \widetilde{\varphi}$, amiből $\mathfrak{A} \models \varphi$, ahogyan kívántuk.

Az „akkor” rész bizonyításához legyen $\mathfrak{B}$ olyan $\tilde{t}$ típusú struktúra, amire $\mathfrak{B} \models \mathrm{E}$. Definiáljuk $\mathfrak{B}$-nek a $\approx$ reláció szerinti faktorát, ami egy t típusú $\mathfrak{A}$ struktúra lesz, a következőképpen. Először is, $\mathfrak{B} \models$ E1–E3 miatt a $\approx$ reláció interpretáltja a B halmazon egy ekvivalencia reláció. Azt az ekvivalencia osztályt, aminek $a \in B$ eleme, $\overline{a}$ jelöli. Az $\mathfrak{A}$ struktúra alaphalmazát ezek az ekvivalencia osztályok alkotják: $A = \{\overline{a} : a \in B\}$. Legyen $r \in t$ egy n-változós relációjel. Vegyünk n ekvivalencia osztályt, s mindegyikből egy–egy elemet. $\mathfrak{B} \models$ E4 miatt az, hogy az $r_{\mathfrak{B}}$ reláció teljesül-e ezekre az elemekre, független a reprezentánsok kiválasztásától. Így r $\mathfrak{A}$-beli $r_{\mathfrak{A}}$ interpretációjának alábbi definíciója jogos:

$$\langle \overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}} \rangle \in r_{\mathfrak{A}} \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in r_{\mathfrak{B}}.$$

Hasonlóan minden n-változós $f \in t$ függvényjelre f-nek $\mathfrak{A}$-beli $f_{\mathfrak{A}}$ interpretáltját definiálhatjuk azzal, hogy $a_0, \ldots, a_{n-1}, a \in B$-re $f_{\mathfrak{A}}(\overline{a_0}, \ldots, \overline{a_{n-1}}) = \overline{a}$ akkor és csak akkor, ha $f_{\mathfrak{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a$.

Legyen e a változójeleknek egy $\mathfrak{B}$ feletti értékelése, és legyen minden x változójelre $\overline{e}(x) = \overline{e(x)}$. A kifejezések felépítésére vonatkozó indukcióval azonnal adódik, hogy tetszőleges $k \in K(t)$-re k-nak $\mathfrak{B}$-beli értékét, $k_{\mathfrak{B}}[e]$-t $a \in B$-vel jelölve $k_{\mathfrak{A}}[\overline{e}] = \overline{a}$. Következésképp prímformulákra $\mathfrak{B} \models \widetilde{\varphi}[e]$ és $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$ egyszerre teljesülnek, amiből egyszerű formulaindukcióval kapjuk az alábbi lemmát.

5.10. Lemma *Minden* $\varphi \in F(t)$ *formulára* $\mathfrak{B} \models \widetilde{\varphi}[e]$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathfrak{A} \models \varphi[\overline{e}]$. ■

Végül tegyük fel, hogy egy $\tilde{t}$ típusú $\mathfrak{B}$ struktúrára $\mathfrak{B} \models \widetilde{\Gamma} \cup \mathrm{E}$. Legyen $\mathfrak{B}$-nek a most definiált faktora éppen $\mathfrak{A}$, akkor a lemma szerint $\mathfrak{A} \models \Gamma$ is teljesül. $\Gamma \models \varphi$ miatt $\mathfrak{A} \models \varphi$, és ismét a lemma miatt $\mathfrak{B} \models \widetilde{\varphi}$, amit bizonyítani akartunk. ■

Kicsit szabadon fogalmazva a tétel azt mondja ki, hogy minden, amit az egyenlőségről elsőrendű nyelven meg tudunk fogalmazni, az már az E1–E5 egyenlőség axiómáknak is következménye: ha egy kétváltozós reláció teljesíti E1–E5-öt, akkor lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az egyenlőség. Nem csorbítaná tehát az általánosságot, ha az $=$ jelet nem használhatnánk a megszokott módon, hanem helyette valamely E1–E5-öt kielégítő kétváltozós relációjellel kellene beérnünk.

Hasonlóan azt is feltételezhetnénk, hogy a hasonlósági típusban nem szerepel függvényjel, a fejezet hátralevő részében azt mutatjuk meg, hogy miért. A $t = \langle F, R, \tau\rangle$ hasonlósági típus minden $f \in F$ függvényjeléhez rendeljünk hozzá egy új, eggyel több változós r_f relációjelet, és legyen $t^* = \langle \emptyset, R \cup \{r_f : f \in F\}, \tau^*\rangle$, ahol $r \in R$ esetén $\tau^*(r) = \tau(r)$ és $\tau^*(r_f) = \tau(f) + 1$. Minden t típusú $\mathfrak{A}$ struktúrából egy t^* típusú $\mathfrak{A}^*$ struktúrát állíthatunk elő a következő módon: az alaphalmazt és az R-beli relációjelek interpretáltjait változatlanul hagyjuk; $f \in F$ esetén az $n + 1$-változós r_f relációjel $\mathfrak{A}^*$-beli interpretáltja az

$$\{\langle a_0, \dots, a_{n-1}, f_{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})\rangle : a_0, \dots, a_{n-1} \in A\}$$

reláció.

Ezt szem előtt tartva definiáljuk a $\varphi \in F(t)$ formula $\varphi^* \in F(t^*)$ „fordítását.” Elsőként választunk egy olyan változójelet, ami nem fordul elő φ-ben, legyen ez y, majd φ felépítésére vonatkozó rekurzióval definiáljuk φ^*-ot. Először minden φ-ben előforduló $k \in K(t)$ kifejezésre legyen $k^* \in F(t^*)$ formula a következő:

(i) Ha a k az x változójellel egyezik meg, akkor $k^* \equiv y = x$ (feltételünk alapján x és y különbözők).

(ii) Ha k az $f \in t$ nullváltozós függvényjel, akkor $k^* \equiv r_f(y)$.

(iii) Ha $k = f(k_0, \dots, k_{n-1})$, ahol $f \in t$ egy n-változós függvényjel, akkor válasszunk n olyan változójelet, amik $k_0^*, \dots, k_{n-1}^*$ egyikében sem fordulnak elő, legyenek ezek $y_0, \dots, y_{n-1}$, és ekkor

$$k^* \equiv \exists y_0 \dots \exists y_{n-1}\, (r_f(y_0, \dots, y_{n-1}, y) \wedge k_0^*[y/y_0] \wedge \dots \wedge k_{n-1}^*[y/y_{n-1}]).$$

Most már rátérhetünk az $F(t)$-beli formulák fordítására.

(i) Ha φ az $r(k_0, \dots, k_{n-1})$ prímformula, akkor válasszunk ismét n olyan változójelet, $y_0, \dots, y_{n-1}$-et, melyek $k_0^*, \dots, k_{n-1}^*$ egyikében sem fordulnak elő, ekkor

$$\varphi^* \equiv \exists y_0 \dots \exists y_{n-1}\, (r(y_0, \dots, y_{n-1}) \wedge k_0^*[y/y_0] \wedge \dots \wedge k_{n-1}^*[y/y_{n-1}]).$$

(ii) Ha $\varphi \equiv k_0 = k_1$, és y_0, y_1 nem fordulnak elő k_0^*-ban és k_1^*-ban, akkor

$$\varphi^* \equiv \exists y_0\, \exists y_1\, (k_0^*[y/y_0] \wedge k_1^*[y/y_1] \wedge y_0 = y_1).$$

(iii) Végül $(\neg\varphi)^* \equiv \neg\varphi^*$, $(\varphi \vee \psi)^* \equiv (\varphi^*) \vee (\psi^*)$, és $(\exists x\, \varphi)^* \equiv \exists x\, (\varphi^*)$.

Nem nehéz belátni, hogy φ és φ^* szabad változói megegyeznek. A következő lemma azt mondja ki, hogy amit csináltunk, valóban a kívánt „fordítás.”

5.11. Lemma *Tetszőleges t típusú $\mathfrak{A}$ struktúrára, $\varphi \in F(t)$ formulára és a változójelek $\mathfrak{A}$ fölötti e értékelésére, $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A}^* \models \varphi^*[e]$.*

Bizonyítás A cseppet sem szívderítő, hosszadalmas és semmi új ötletet nem igénylő bizonyítást elhagyjuk. ■

Az $\mathfrak{A}$ struktúrában az újonnan bevezetett relációk azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy akárhogyan is veszünk n elemet, egyértelműen található hozzájuk olyan $(n+1)$-edik, amivel a reláció teljesül, Így $\mathfrak{A}^*$-ban teljesül a következő R^*-gal jelölt formulahalmaz is: minden $f \in t$ n-változós függvényjelre

$$\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \left[\exists y\, r_f(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \wedge \right.$$
$$\left. \forall y_0 \forall y_1 \left(r_f(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0) \wedge r_f(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_1) \to y_0 = y_1\right)\right]$$

Természetesen most is $\Gamma \subset F(t)$ esetén $\Gamma^* \subset F(t^*)$ a $\{\varphi^* : \varphi \in \Gamma\}$ halmazt jelenti.

5.12. Tétel *Legyen $\Gamma \in F(t)$ és $\varphi \in F(t)$ tetszőleges. Ekkor $\Gamma \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma^* \cup \mathrm{R}^* \models \varphi^*$.*

Bizonyítás Hasonló az 5.9. tétel bizonyításához. A „csak akkor” rész az 5.11. lemma következménye: ha egy $\mathfrak{A}$ struktúrára $\mathfrak{A} \models \Gamma$, akkor $\mathfrak{A}^* \models \Gamma^* \cup \mathrm{R}^*$ és ezért $\mathfrak{A}^* \models \varphi^*$, ahonnan $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Fordítva, ha egy t^* típusú $\mathfrak{B}$ struktúrára $\mathfrak{B} \models \mathrm{R}^*$, akkor $\mathfrak{B}$-ből csinálhatunk egy t típusú $\mathfrak{A}$ struktúrát úgy, hogy az alaphalmazt és a t-beli relációjelek interpretáltjait megtartjuk, egy $f \in t$ függvényjelre pedig minden $a_0, \ldots, a_{n-1}, b \in B$ esetén

$$f_{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = b \;\text{ akkor és csak akkor, ha }\; \langle a_0, \ldots, a_{n-1}, b\rangle \in (r_f)_{\mathfrak{B}}.$$

$\mathfrak{B} \models \mathrm{R}^*$ miatt minden B-beli $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ n-esre pontosan egy ilyen $b \in B$ található, így ez a definíció helyes, ráadásul a $\mathfrak{B}$ struktúra egybeesik $\mathfrak{A}^*$-gal. Így az előző lemma alapján $\mathfrak{B} \models \Gamma^* \cup \mathrm{R}^*$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Ekkor $\Gamma \models \varphi$ miatt $\mathfrak{A} \models \varphi$, tehát $\mathfrak{A}^* \models \varphi^*$, vagyis $\mathfrak{B} \models \varphi^*$, ahogyan kívántuk. ■

Az 5.9. és 5.12 tételek szerint a logikai következmény vizsgálatakor elegendő olyan formulákra szorítkoznunk, melyekben sem az $=$ jel, sem függvényjel nem szerepel.

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy egy n jelből álló nyílt formulához található vele logikailag ekvivalens diszjunktív (konjunktív) normál formájú formula, melynek mérete legfeljebb 2^n.
2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges formulához található nála nem hosszabb, vele logikailag ekvivalens prenex formájú formula.
3. Írjuk fel a halmazelmélet összes axiómáját prenex alakban. A végtelenségi axióma a $\exists_n$, $\forall_n$ osztályok közül melyikbe esik?
4. Egy $\Gamma \subset F(t)$ elméletet *konzisztensnek* nevezünk, ha van modellje. Bizonyítsuk be, hogy minden konzisztens elmélet kiterjeszthető maximális konzisztens elméletté.
5. Legyen $\Gamma \subset F(t)$ maximális konzisztens elmélet. Mutassuk meg, hogy minden $\varphi, \psi \in F(t)$-re $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ akkor és csak akkor, ha vagy $\varphi \in \Gamma$ vagy $\psi \in \Gamma$; $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ akkor és csak akkor, ha $\varphi \in \Gamma$ és $\psi \in \Gamma$. Elképzelhető-e, hogy $\psi \in \Gamma$ és $\neg\psi \in \Gamma$ közül egyik sem teljesül?
6. Mutassuk meg, hogy ha $\Gamma \models \varphi \to \psi$, akkor $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Keressünk olyan Γ elméletet és φ, ψ formulákat, melyekre $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$, de $\Gamma \not\models \varphi \to \psi$.
7. Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ és $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \psi$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\Gamma \models \psi$.
8. Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ és $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \neg\psi$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\Gamma \models \neg\varphi$.
9. Jelölje φ lezártját $\overline{\varphi}$. Mutassuk meg, hogy $\Gamma \subset F(t)$ akkor és csak akkor konzisztens, ha $\{\overline{\varphi} : \varphi \in \Gamma\}$ konzisztens.