3. fejezet

Struktúrák, formulák igazsága

Legyen A egy nem üres halmaz, n pedig egy pozitív egész szám. Az A halmaz elemeiből alkotott rendezett n-esek halmazát A^n-nel jelöljük. Az f függvényről (műveletről) azt mondjuk, hogy *n-változós függvény* A-n, ha f értelmezési tartománya, amit $D(f)$-fel jelölünk, éppen A^n, és f értékkészlete, $R(f)$, része A-nak. Az A-n értelmezett nullváltozós függvényeket azonosítjuk A elemeivel: A-nak minden eleme egy nullváltozós függvény. Egy *n-változós reláció* A rendezett n-eseinek valamiféle tulajdonsága úgy, hogy A^n tetszőleges eleméről el tudjuk dönteni, fenáll-e rá ez a tulajdonság vagy sem (gondoljunk a pozitív egészek párjain értelmezett „kisebb” vagy „osztója” relációkra). Hogy ne okozzon gondot, hogy a „valamiféle tulajdonság” mit is jelent tulajdonképpen, az n-változós relációkat azonosítjuk A^n részhalmazaival: az $R \subset A^n$ reláció pontosan azokra az n-esekre áll, melyek R-nek elemei.

Struktúrának nevezünk egy nem üres halmazt bizonyos rajta értelmezett függvényekkel és relációkkal együtt. Így például struktúra minden (algebrai) csoport vagy test: a csoport elemei alkotják az alaphalmazt, és ezen három függvény van adva: egy nullváltozós, mely az egységelemet jelöli ki, egy egyváltozós, mely minden elemhez annak inverzét rendeli, végül egy kétváltozós, ami a csoport két elemére azok szorzatát adja. Struktúra a természetes számok halmaza az összeadással és szorzással (mint két kétváltozós függvénnyel) és a „kisebb” (kétváltozós) relációval ellátva.

Egy struktúra függvényeit és relációit valamiképpen meg kell jelölnünk. Egy t hasonlósági típus automatikusan szolgáltat függvény- és relációjeleket, s egy struktúrát t típusúnak mondunk, ha t minden függvényjeléhez és relációjeléhez egy ugyanannyi változós függvény illetve reláció tartozik.

3.1. Definíció Legyen $t = \langle F, R, \tau \rangle$ egy hasonlósági típus. Az $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ pár egy *t típusú struktúra*, ha A egy nem üres halmaz, I pedig egy $(F \cup R)$-en értelmezett függvény úgy, hogy $f \in F$ esetén $I(f)$ egy $\tau(f)$-változós függvény A-n, $r \in R$ esetén pedig $I(r)$ egy $\tau(r)$-változós reláció A-n.

Az A halmazt az $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ struktúra *alaphalmazának* nevezzük, I pedig a függvény- és relációjelek *interpretációja*. Általában ha egy struktúrát valamilyen gót vagy írott nagybetűvel jelölünk, annak alaphalmazát automatikusan a megfelelő latin nagybetű jelzi. Az f függvényjel illetve r relációjel $\mathfrak{A}$-beli interpretáltját $f_{\mathfrak{A}}$-val és $r_{\mathfrak{A}}$-val is jelöljük, vagy ha nem okoz félreértést, az $\mathfrak{A}$ indexet el is hagyjuk. Ilyenkor az f-nek két értelme is van: egyrészt a függvényjelet jelenti, másrészt a jelnek az interpretáltját. Az, hogy mikor melyikre gondolunk, a szövegkörnyezetből derül ki.

Egy struktúra *számosságán* alaphalmazának számosságát értjük.

A matematika sok ága egy-egy struktúra tulajdonságait vizsgálja: a számelmélet, a sík- és térgeometria, a valós függvénytan stb. Más ágak struktúrák valamilyen rögzített osztályával foglalkoznak, mint pl. a csoportelmélet, Hilbert terek elmélete, lineáris algebra stb.

Az előző fejezetben definiált t típusú formulák tulajdonképpen t típusú struktúrákra vonatkozó állítások, s mint ilyenek vagy teljesülnek, vagy nem. Ha egy formula teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *igaz*, ha pedig nem teljesül, akkor *hamis*. Egy formuláról felépítése szerinti rekurzióval tudjuk eldönteni, hogy igaz-e: $r(k_0, \ldots, k_{n-1})$ pontosan akkor igaz, ha a $k_0, \ldots, k_{n-1}$ kifejezések értékei $r_{\mathfrak{A}}$ relációban állnak egymással; $k_0 = k_1$ igaz, ha k_0 és k_1 értéke megegyezik; $\neg\varphi$ akkor igaz, ha φ nem igaz; $\varphi \vee \psi$ igaz ha vagy φ vagy ψ vagy mindkettő igaz; végül $\exists x\, \varphi$ igaz, ha van a struktúrának olyan eleme, amit x helyébe téve a kapott formula igaz lesz. Ám addig még a kifejezések értékeit sem tudjuk kiszámítani, míg meg nem mondjuk, hogy a változójelek a struktúra mely elemeinek felelnek meg.

3.2. Definíció Legyen $\mathfrak{A}$ egy tetszőleges struktúra. A változójeleknek $\mathfrak{A}$ *fölötti értékelése* olyan e függvény, mely minden x változójelhez a struktúra A alaphalmazának egy-egy elemét rendeli.

Az ilyen e függvényeket röviden csak értékelésnek hívjuk. Szükségünk lesz arra, hogy egy értékelésben egyetlen változójel értékét — az összes többi változójel értékének megtartása mellett — meg tudjuk változtatni.

3.3. Definíció Legyen e egy $\mathfrak{A}$ fölötti értékelés, $a \in A$ pedig tetszőleges. Ekkor $e(x/a)$ azt az $\mathfrak{A}$ fölötti e' értékelést jelöli, melyre $e'(x) = a$, és $e'(y) = e(y)$ minden más $y \neq x$ változójel esetén.

Elsőként azt definiáljuk precízen, mit is értünk egy kifejezés *értékén*. Ezt természetesen a kifejezés felépítése szerinti rekurzióval tesszük, a definíció jogosságát az egyértelmű olvashatósági lemma biztosítja. Legyen tehát $t = \langle F, R, \tau \rangle$ egy hasonlósági típus, $\mathfrak{A} = \langle A, I \rangle$ egy t típusú struktúra, e pedig a változójeleknek egy $\mathfrak{A}$ fölötti értékelése. Emlékeztetünk arra, hogy az I interpretáció minden t-beli f függvényjelnek egy-egy A-beli f függvényt feleltet meg.

3.4. Definíció Legyen $k \in K(t)$ tetszőleges kifejezés, $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra, és e a változójeleknek egy $\mathfrak{A}$ fölötti értékelése. A k kifejezés $\mathfrak{A}$-beli *helyettesítési értékét* az e értékelés mellett $k_{\mathfrak{A}}[e]$-vel jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

(i) ha k megegyezik az x változójellel, akkor értékét az e értékelés adja meg, azaz $k_{\mathfrak{A}}[e] = e(x)$;

(ii) ha k olyan $f \in F$ függvényjel, amire $\tau(f) = 0$, akkor f-nek $f_{\mathfrak{A}}$ interpretáltja az A egy eleme, mégpedig $k_{\mathfrak{A}}[e] = f_{\mathfrak{A}}$;

(iii) egyébként a k kifejezés $f(k_0, \ldots, k_{n-1})$ alakú, ahol $f \in F$ egy $n = \tau(f) > 0$-változós függvényjel. A $k_0, \ldots, k_{n-1}$ kifejezések értékeit már tudjuk, legyen $i < n$-re $(k_i)_{\mathfrak{A}}[e] = a_i \in A$. Ekkor $k_{\mathfrak{A}}[e] = f_{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Példaként tekintsük azt a t típust, mely a $+$ és a $*$ kétváltozós függvényjelekből valamint az 1 konstansjelből (azaz nullváltozós függvényjelből) áll. Legyen $\mathfrak{A}$ alaphalmaza a természetes számok halmaza, az 1 jel interpretáltja az 1 szám, a $+$ és $*$ interpretáltjai pedig azok a kétváltozós függvények, melyek két számhoz azok összegét illetve szorzatát rendelik. Mondjuk, az e értékelés olyan, amely minden változójelhez a 0-t rendeli. A $k = (1 + (x + 1)) * (1 + 1)$ kifejezés $\mathfrak{A}$-beli helyettesítési értékét az e értékelés mellett például a következő sorrendben határozhatjuk meg:

1. x helyettesítési értéke (i) alapján $e(x) = 0$
2. 1 helyettesítési értéke (ii) alapján 1
3. $x + 1$ helyettesítési értéke (iii) alapján $0 + 1 = 1$
4. újból 1 helyettesítési értékét határozzuk meg, ami persze most is 1
5. $1 + (x + 1)$ értéke $1 + 1 = 2$
6. megint 1 helyettesítési értékét nézzük (kétszer is)
7. $1 + 1$ értéke 1+1=2
8. $(1 + (x + 1)) * (1 + 1)$ értéke $2 \cdot 2 = 4$

Most már definiálhatjuk a formulák igazságértékét. Legyen tehát $\varphi \in F(t)$ egy formula, $\mathfrak{A} = \langle A, I\rangle$ egy t típusú struktúra, e a változóknak egy $\mathfrak{A}$ fölötti értékelése. Azt, hogy φ ***igaz*** az $\mathfrak{A}$ struktúrán a változók e értékelése mellett, $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ jelöli. Ha ez nem így van, akkor azt írjuk, hogy $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$, és azt mondjuk, hogy φ nem igaz, vagy φ ***hamis*** az e értékelésre nézve.

3.5. Definíció (Formulák igazságának definíciója).

(i) Tetszőleges $r \in t$ n-változós relációjelre és $k_0, \ldots, k_{n-1} \in K(t)$ kifejezésekre $\mathfrak{A} \models r(k_0, \ldots, k_{n-1})[e]$ pontosan akkor, ha a $k_0, \ldots, k_{n-1}$ értékei $r_{\mathfrak{A}}$ relációban állnak egymással, vagyis ha $\langle (k_0)_{\mathfrak{A}}[e], \ldots, (k_{n-1})_{\mathfrak{A}}[e]\rangle \in r_{\mathfrak{A}}$.

(ii) Legyenek $k_0, k_1 \in K(t)$ kifejezések. $\mathfrak{A} \models k_0 = k_1[e]$ pontosan akkor, ha k_0 és k_1 értékei egyenlők: $(k_0)_{\mathfrak{A}}[e] = (k_1)_{\mathfrak{A}}[e]$.

(iii) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[e]$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$.

(iv) $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$ pontosan akkor, ha vagy $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ vagy $\mathfrak{A} \models \psi[e]$ (esetleg mindkettő).

(v) $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi[e]$ pontosan akkor, ha van A-nak olyan a eleme, melyet x helyébe téve a φ formula igaz lesz, azaz ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/a)]$ valamilyen $a \in A$-ra.

A definíció jogossága ismét az egyértelmű olvashatósági lemma és a formulaindukció-tétel következménye. Természetesen most már azt is meg tudjuk mondani, hogy a $\to$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ valamint $\forall$ „segédjelekkel” felírt formulákat hogyan kell kiértékelni: egyszerűen a rövidített formulákat kell kibogoznunk. Így $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[e]$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models (\neg\varphi \vee \psi)[e]$, azaz (iv) és (iii) alapján ha vagy $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$, vagy $\mathfrak{A} \models \psi[e]$. Más szavakkal, $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[e]$ akkor és csak akkor, ha abból, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ következik, hogy $\mathfrak{A} \models \psi[e]$.

Hasonlóan, $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ és $\mathfrak{A} \models \psi[e]$ egyaránt áll; $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$ ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ és $\mathfrak{A} \models \psi[e]$ ekvivalensek, azaz vagy mindkettő áll, vagy egyik sem. A $\forall x\, \varphi$ formula igazságát kicsit részletesebben számítjuk ki. $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi[e]$ a definíció szerint pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models \neg\exists x\, \neg\varphi[e]$, ami (ii) szerint pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \not\models \exists x\, \neg\varphi[e]$. Ez a (v) szabály szerint akkor van így, ha *nincs* olyan $a \in A$, amire $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[e(x/a)]$ volna, vagyis minden $a \in A$-ra $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi[e(x/a)]$. Végül is $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi[e]$ pontosan akkor, ha minden $a \in A$-ra $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/a)]$, ahogyan azt elvártuk.

3.6. Definíció Ha minden e értékelésre $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$, akkor azt mondjuk, hogy φ *igaz* $\mathfrak{A}$-n, vagy másképpen $\mathfrak{A}$ *modellje* a φ formulának, és így jelöljük: $\mathfrak{A} \models \varphi$. Azt, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi$ nem áll fönn, a $\models$ jel áthúzásával jelöljük: $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Ha a Γ formulahalmaz (elmélet) minden φ elemére $\mathfrak{A} \models \varphi$, akkor ezt $\mathfrak{A} \models \Gamma$ jelöli.

Világos, hogy $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ azt jelenti, hogy van a változójeleknek olyan e értékelése, amelyre $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$, és $\mathfrak{A} \not\models \Gamma$ akkor, ha valamely $\varphi \in \Gamma$ -ra $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.

Előző példánkhoz visszatérve keressük meg mindazokat az e értékeléseket, amikre a $\varphi \equiv \exists z\,(x = (y + z) + 1)$ formula igaz $\mathfrak{A}$-ban az e értékelése mellett! Először is, a (v) szabály szerint $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ pontosan akkor, ha van olyan $a \in A$ természetes szám, melyre $\mathfrak{A} \models (x = (y + z) + 1)[e(z/a)]$. Ez (ii) szerint pontosan akkor áll fenn, ha $(x)_{\mathfrak{A}}[e(z/a)] = ((y+z)+1)_{\mathfrak{A}}[e(z/a)]$. A kifejezéseket a 3.4. definíció alapján értékeljük ki:

$$(x)_{\mathfrak{A}}[e(z/a)] = e(x),$$

és

$$((y + z) + 1)_{\mathfrak{A}}[e(z/a)] = e(y) + a + 1,$$

hiszen a $+$ függvényjel interpretáltja az összeadás, az 1 konstansjel interpretáltja az 1 szám, végül az $e(z/a)$ értékelés az y változójelhez $e(y)$-t, a z-hez pedig az $a \in A$-t rendeli. Összefoglalva, $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ pontosan akkor, ha van olyan $a \in A$ természetes szám, melyre $e(x) = e(y) + a + 1$, azaz ha $e(x) < e(y)$. Mivel ez nem minden értékelésre teljesül, azért $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. A 3.5. definíció (iii) pontja szerint $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[e]$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \not\models \varphi[e]$, azaz ha $e(x) \geq e(y)$. S mivel van olyan értékelés is, melyre ez nem így van, azért $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$ is fennáll.

Következő lemmánk azt mondja ki, hogy a formulák igazsága nem függ az elöl álló univerzális kvantoroktól.

3.7. Lemma *Tetszőleges x változójelre $\mathfrak{A} \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi$.*

Bizonyítás Láttuk, hogy $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi[e]$ pontosan akkor, ha minden $a \in A$-ra $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/a)]$. Így ha $\mathfrak{A} \models \varphi$, azaz $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ tetszőleges értékelésre, akkor egyúttal $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi$ is teljesül. A fordított irányú implikáció pedig abból adódik, hogy az $e(x/a)$ értékelések között speciálisan maga az e értékelés is előfordul az $a = e(x)$ választással. ∎

Vegyük észre, hogy míg a kifejezések értékelése, azaz értékük kiszámítása mechanikus és effektíve végrehajtható eljárás, addig a formulák igazságának eldöntése már nem feltétlenül az. Mikor a $\exists x\, \varphi$ igazságára vagyunk kiváncsiak, el kell döntenünk, hogy van-e az A-nak olyan eleme, melyre $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/a)]$ fennáll. Ilyen elem keresésére általában nem létezik jobb módszer, mint az, hogy A összes elemét végigpróbáljuk (ezt az állítást igazolni is fogjuk) – ami legalábbis effektívnek semmiképpen nem mondható, ha A végtelen, és még „eljárásnak” is nehezen, ha A megszámlálhatónál nagyobb számosságú: egyszerűen nincs „időnk” a megfelelő elemet kikeresni. A formulák igazságának definiálásakor felmerülő algoritmikus nehézségek vezettek az ún. *konstruktivizmus* létrejöttéhez. A konstruktivisták szerint egy formula csak akkor lehet igaz vagy hamis, ha van olyan *véges* eljárás, ami ezt eldönti, egyébként a formula sem nem igaz, sem nem hamis. A konstruktivizmus – ha filozófiai vonatkozásaitól eltekintünk – a matematikai logikának egy ága, mely azt vizsgálja, hogy ha a formulák igazságát a szokásostól eltérően definiáljuk, mely állítások maradnak igazak, és melyek nem, mi történik a bizonyíthatósággal stb. Mi a követett felépítésben egyszerűen tudomásul vesszük, hogy annak eldöntésére, hogy egy formula igaz-e vagy sem, nem feltétlenül létezik valamilyen pontosan megfogalmazott véges eljárás.

Az előbbi példában láttunk formulát, melynek igazsága függött az e értékeléstől. Ám olyan formula nincs, melynek igazsága az összes változójel értékétől függene. A 3.4. és a 3.5. definíciókat összevetve ugyanis láthatjuk, hogy ha egy változójel egyáltalán nem fordul elő φ-ben, akkor a hozzárendelt érték a formula szempontjából teljesen közömbös, nem befolyásolja a formula igazságát. Hasonlóan, ha egy változójel egzisztenciális (vagy univerzális) kvantor mögött áll, értéke automatikusan elvész. A formulának azokat a változóit, melyeknek nem minden előfordulása van egy kvantorral kezdődő részformulába elrejtve a formula *szabad változóinak* nevezzük, csak ezek értékeitől függhet a formula igazsága (de persze ezektől sem feltétlenül). A φ szabad változóinak $V(\varphi)$ halmazát precízen természetesen φ felépítésére vonatkozó rekurzióval definiáljuk.

3.8. Definíció

(i) Ha φ prímformula, akkor $V(\varphi)$ a φ-ben szereplő változójelek halmaza

(ii) $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

(iii) $V(\neg\varphi) = V(\varphi)$

(iv) $V(\exists x\, \varphi) = V(\varphi) \setminus \{x\}$.

Világos, hogy $V(\varphi)$ részhalmaza a φ-ben előforduló változójelek halmazának, és hogy φ igazsága valóban csak a $V(\varphi)$-beli változójelektől függ:

3.9. Lemma *Legyenek e és e' olyan $\mathfrak{A}$ fölötti értékelések, melyekre minden $x \in V(\varphi)$ esetén $e(x) = e'(x)$. Ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e']$.*

Bizonyítás Az állítást formulaindukcióval bizonyítjuk. Az egyetlen nem triviális eset az, mikor φ éppen $\exists x\, \psi$ alakú. Legyenek e és e' az állításban szereplő értékelések. A 3.8. definíció szerint $V(\psi) \subset V(\exists x\, \psi) \cup \{x\}$), ezért minden $a \in A$ elemre $e(x/a)$ és $e'(x/a)$ olyan értékelések, melyek minden $V(\psi)$-beli változójelhez ugyanazt az értéket rendelik. Most az indukciós feltételt a ψ formulára alkalmazva kapjuk, hogy tetszőleges $a \in A$ mellett

$$\mathfrak{A} \models \psi[e(x/a)]$$

és

$$\mathfrak{A} \models \psi[e'(x/a)]$$

ekvivalensek. Így ha van olyan $a \in A$, amire az egyik fönnáll, akkor ugyanarra az a-ra a másik is teljesül. Tehát $\exists x\, \psi$ igazságának definíciója alapján $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi[e]$ és $\mathfrak{A} \models \exists x\, \psi[e']$ egyszerre teljesül, amit igazolnunk kellett. ■

Azt, hogy $x \in V(\varphi)$ úgy is mondjuk, hogy x *szabadon* fordul elő φ-ben. Azokat a változójeleket, melyek φ-ben egy kvantor mögött (is) állnak, φ *kötött* változóinak nevezzük. Egy formula szabad és kötött változóinak halmaza persze nem feltétlenül diszjunkt. Egy x változójel minden φ-beli előfordulása kötött vagy szabad attól függően, hogy

φ felépítése során valamikor egy $\exists x\, \psi$ alakú részformulában szerepelt-e vagy sem. Az alábbi példában a formula szabad változói x, y és z, kötött változói x és y, a változójelek kötött előfordulásait aláhúztuk:

$$x = y + 1 \lor \exists \underline{x}\, \exists \underline{y}\, (\underline{y} + z = \underline{x} \lor \underline{x} + \underline{x} = \underline{y}) \lor \exists \underline{y}\, (x + \underline{y} = z)$$

Egy formulát n-*változósnak* nevezünk, ha n szabad változója van. Különösen fontosak a 0-változós, azaz szabad változó nélküli formulák, ezekre külön elnevezést vezetünk be:

3.10. Definíció Egy $\varphi \in F(t)$ formula *zárt*, ha nincs szabad változója, azaz $V(\varphi) = \emptyset$. A t típusú zárt formulák halmazát $F^0(t)$ jelöli.

Az előző lemma alapján világos, hogy zárt formula igazsága nem függ a változójelek értékelésétől, ezért zárt formulákra a következő állítások ekvivalensek:
- minden e értékelésre $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$,
- valamely e értékelésre $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$,
- $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Speciálisan $\mathfrak{A} \models \varphi$ és $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ közül pontosan az egyik teljesül, nem fordulhat elő, hogy sem φ sem $\neg\varphi$ nem igaz $\mathfrak{A}$-ban, mint ahogyan az nem zárt formuláknál bizony megesik.

Minden $\varphi \in F(t)$ formulához hozzárendelünk egy zárt formulát melyet φ (univerzális) *lezártjának* hívunk. Legyen φ szabad változóinak halmaza $V(\varphi) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. A φ lezártja a $\forall x_{n-1} \ldots \forall x_1 \forall x_0\, \varphi$ formula, ami a $\forall$ rövidítés nélkül így néz ki:

$$\neg\exists x_{n-1} \neg \ldots \neg\exists x_1 \neg\exists x_0 \neg\varphi.$$

Világos, hogy egy formula lezártja valóban zárt, és hogy zárt formula lezártja saját maga. Egy $\mathfrak{A}$ struktúrában φ akkor és csak akkor igaz minden értékelés mellett, ha lezártja igaz. Ezt fejezi ki a következő lemma.

3.11. Lemma *Jelölje φ lezártját $\overline{\varphi}$. Ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A} \models \overline{\varphi}$.*

Bizonyítás A 3.7. lemma alapján φ szabad változóinak számára vonatkozó indukcióval. ■

Formulák igazsága tehát megegyezik lezártjuk igazságával. Mivel van olyan φ formula és $\mathfrak{A}$ struktúra, hogy mind φ mind $\neg\varphi$ hamis $\mathfrak{A}$-ban egy-egy értékelés mellett, ezért $\mathfrak{A} \not\models \overline{\varphi}$ és $\mathfrak{A} \not\models \overline{\neg\varphi}$. Egy formula lezárása és tagadása tehát nem felcserélhető műveletek.

Legyen $\varphi \in F(t)$ egy formula, x egy változójel, és $k \in K(t)$ egy kifejezés. Azt a formulát, melyet φ-ből úgy kapunk, hogy benne x-t mindazokon a helyeken, ahol szabadon fordul elő, kicseréljük a k kifejezésre, $\varphi[x/k]$-val jelöljük. Világos, hogy így továbbra is formulát kapunk, és az alábbi definíció φ felépítésére vonatkozó rekurzióval éppen ezt adja meg:

3.12. Definíció

(i) Ha φ prímformula, akkor $\varphi[x/k]$ az a formula, melyet φ-ből úgy kapunk, hogy benne x minden előfordulását k-val helyettesítjük

(ii) $(\varphi \vee \psi)[x/k] \equiv (\varphi[x/k]) \vee (\psi[x/k])$

(iii) $(\neg\varphi)[x/k] \equiv \neg(\varphi[x/k])$

(iv) $(\exists x\, \varphi)[x/k] \equiv \exists x\, \varphi$; és ha x és y különböző változójelek, akkor $(\exists y\, \varphi)[x/k] \equiv \exists y\, (\varphi[x/k])$.

Sajnos egy ilyen helyettesítés – minden várakozásunkkal ellentétben – teljesen megváltoztathatja a formula jelentését. Legyen például $\varphi \equiv \exists y\, (x = y)$, és helyettesítsünk x helyébe $(y+1)$-et. Ekkor $\varphi[x/(y+1)] \equiv \exists y\, (y+1 = y)$. Míg φ minden struktúrán (és minden értékelés mellett) igaz, addig $\varphi[x/(y+1)]$-re ez már nem áll, például a természetes számok halmazán egyetlen elem sem egyenlő a rákövetkezőjével. Az történt, hogy a helyettesített kifejezésben olyan változójel (is) szerepelt, mely a kicserélés után egy kvantor hatáskörébe került. Azokat a helyettesítéseket, melyek nem ilyenek, *megengedett* helyettesítéseknek nevezzük. Pontosabban megfogalmazva:

3.13. Definíció

(i) Ha φ prímformula, akkor $\varphi[x/k]$ megengedett helyettesítés;

(ii) $(\varphi \vee \psi)[x/k]$ megengedett helyettesítés, ha $\varphi[x/k]$ és $\psi[x/k]$ egyaránt az;

(iii) $(\neg\varphi)[x/k]$ megengedett helyettesítés, ha $\varphi[x/k]$ az; végül

(iv) $(\exists x\, \varphi)[x/k]$ megengedett helyettesítés; és ha x és y különböző változójelek, akkor $(\exists y\, \varphi)[x/k]$ pontosan akkor megengedett, ha $\varphi[x/k]$ megengedett, továbbá vagy x nem fordul elő szabadon φ-ben, vagy y nem fordul elő k-ban.

Esetünkben $\varphi[x/(y+1)]$ nem megengedett, mivel $x \in V(x = y)$ és y előfordul az $y+1$ kifejezésben. Azt, hogy a megengedett helyettesítések már valóban azt teszik, amit elvárunk tőlük, a következő lemma mutatja.

3.14. Lemma (Helyettesítési lemma) *Legyen $\varphi[x/k]$ egy megengedett helyettesítés, $\mathfrak{A}$ egy t típusú struktúra, e pedig a változójeleknek egy $\mathfrak{A}$ fölötti értékelése. Ekkor $\varphi[x/k]$ pontosan akkor igaz $\mathfrak{A}$-ban az e értékelés mellett, mikor φ igaz $\mathfrak{A}$-ban azzal az értékeléssel, melyet e-ből az x értékének k értékére való kicserélésével kapunk: $\mathfrak{A} \models (\varphi[x/k])[e]$ pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e(x/k_{\mathfrak{A}}[e])]$.*

Bizonyítás A φ formula felépítésére vonatkozó indukcióval. Prímformulákra a kifejezések értékének meghatározása alapján az állítás világos. $(\varphi \vee \psi)$-re és $(\neg\varphi)$-re az állítás az előző definíciók alapján közvetlenül adódik. Ha most a formula $\exists x\, \varphi$ alakú, akkor $(\exists x\, \varphi)[x/k] \equiv \exists x\, \varphi$. Az e és az $e(x/k_{\mathfrak{A}}[e])$ értékelések csak az x helyen térnek el egymástól, $x \notin V(\exists x\, \varphi)$, azért a 3.9. lemma miatt $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi)[e]$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi)[e(x/k_{\mathfrak{A}}[e])]$. Végül ha x és y különbözők és a formula $\exists y\, \varphi$ alakú, akkor vagy x nem fordul elő szabadon φ-ben, vagy y nem fordul elő k-ban. Az első esetben $(\exists y\, \varphi)[x/k] \equiv \exists y\, \varphi$, és persze $x \notin V(\exists y\, \varphi)$. Innen ugyanúgy mehetünk tovább, mint az előbb.

A másik esetben $(\exists y\, \varphi)[x/k] \equiv \exists y\, (\varphi[x/k])$. $\mathfrak{A} \models \exists y\, (\varphi[x/k])[e]$ pontosan akkor, ha van olyan $a \in A$, hogy az $e' = e(y/a)$ értékelésre $\mathfrak{A} \models (\varphi[x/k])[e']$, ami az indukciós feltétel szerint pontosan akkor, ha $\mathfrak{A} \models \varphi[e'(x/k_{\mathfrak{A}}[e'])]$. Mivel y nem fordul elő k-ban, és e és e' csak az y-hoz rendelt értékben különbözik, ezért $k_{\mathfrak{A}}[e'] = k_{\mathfrak{A}}[e]$. S mivel x és y különbözők, azért

$$e'(x/k_{\mathfrak{A}}[e]) = e(x/k_{\mathfrak{A}}[e])(y/a),$$

és így $\mathfrak{A} \models \varphi[e'(x/k_{\mathfrak{A}}[e'])]$ akkor és csak akkor valamilyen $a \in A$-ra, ha

$$\mathfrak{A} \models (\exists y\, \varphi)[e(x/k_{\mathfrak{A}}[e])],$$

amit bizonyítani akartunk. ■

Előfordul, hogy egy formulában egyszerre több helyettesítést is végre kell hajtani. A

$$\big(\ldots((\varphi[x_0/k_0])[x_1/k_1])\ldots\big)[x_{n-1}/k_{n-1}]$$

helyettesítés-láncot a könnyebb olvashatóság kedvéért rövidítjük:

$$\varphi[x_0/k_0, x_1/k_1, \ldots, x_{n-1}/k_{n-1}].$$

Vegyük észre, hogy az argumentumok sorrendje általában nem felcserélhető. Ha például a k_0 kifejezés tartalmazza az x_1 változójelet, akkor x_1-et nem csak φ-ben, hanem k_0-ban is ki kell cserélni k_1-re.

Még egy további rövidítési lehetőségünk van. Ha a fenti helyettesítésben a változójelek valamilyen rögzített, mondjuk $x_0, x_1, \ldots$ sorrendben következnek egymás után, akkor a változójeleket nem írjuk ki, hanem a $\varphi(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})$ jelölést használjuk. Így például a

$$\big(\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x+1))\big) \to \forall x\, \varphi(x)$$

a következő „igazi" formula rövidítése:

$$\big(\varphi[x_0/0] \wedge \forall x\,(\varphi[x_0/x] \to \varphi[x_0/x+1])\big) \to \forall x\,(\varphi[x_0/x]),$$

feltéve persze, hogy a $\varphi[x_0/x]$ helyettesítés megengedett.

Amikor azt mondjuk, hogy „legyen $\varphi(x)$ az a formula, amely ..." vagy „definiáljuk $\psi(x, y)$-t a következőképpen ...", akkor a kipontozott rész helyébe nem φ kerül, hanem a $\varphi[x_0/x]$ illetve a $\psi[x_0/x, x_1/y]$. Ilyenkor feltesszük, hogy az x illetve az x és y változójelek nem fordulnak elő szabadon φ-ben, ψ-ben, úgy hogy φ és ψ egyértelműen visszakódolható a felírásból, továbbá azt is, hogy a helyettesítések megengedettek.

Hasonló jelölésmódot használunk értékelések egyszerűbb felírására. Legyen $\mathfrak{A}$ egy struktúra, és $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. Azt, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[e]$ minden olyan e értékelés mellett, amire $e(x_0) = a_0, \ldots, e(x_{n-1}) = a_{n-1}$, így jelöljük: $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Ezzel lényegében végére értünk mindazon rövidítések, átírások felsorolásának, melyek a formulákat kényelmes, érthető, jól használható eszközökké teszik. Nem szabad azonban elfelejtkeznünk arról, hogy ezek a „szabad formátumú" formulák tulajdonképpen egy-egy valódi, 2.4. definíció szerinti formulát takarnak, csak külalakjuk más. Így valahányszor formulákról bizonyítunk valamit, mindig a 2.4. szerinti formulákra gondolunk, ha viszont konkrét formulát kell felírnunk, minden rövidítést, jelölést szabadon használhatunk.