2. fejezet

Elsőrendű nyelvek

Szimbólumoknak tetszőleges Σ halmazát *ábécének* nevezzük. A Σ elemeiből alkotott véges sorozatok az ábécé *szavai*, ezek halmazát Σ^*-gal szokás jelölni. Egy ábécé fölötti *nyelv* az ábécé szavainak egy részhalmaza. Így például ha Σ a kis- és nagybetűkből, a szóközből és írásjelekből áll, akkor Σ fölött nyelvet alkotnak az értelmes magyar mondatok, vagy nyelvet alkot Jókai Mór összes regénye is. Minthogy Jókai minden regénye véges jelsorozat, így definíció szerint szó is, ezek halmaza pedig nyelvet alkot, jelen esetben véges nyelvet. Nyelvekre fontosabb példák a különböző programozási nyelvek. A Pascalhoz, Algol-60-hoz vagy C-hez tartozó ábécé pédául a betűket, számjegyeket, műveleti jeleket és elválasztó jeleket tartalmazza. Minden program egy–egy szó, a nyelv pedig a helyesen felírt programok halmaza.

A Σ ábécé szavainak halmaza, Σ^* speciálisan tartalmazza az üres szót (üres sorozatot) is, melyet λ-val szokás jelölni. Σ^* elemei az egymás után írásra (konkatenációra), mint műveletre nézve egységelemes félcsoportot alkotnak, az egységelem éppen λ, ezt bármely szó mögé vagy elé írva a szó változatlan marad. Szokás még Σ elemeit a belőlük alkotható 1 hosszúságú jelsorozatokkal azonosítani, azaz $\Sigma \subset \Sigma^*$ lesz, és ekkor Σ^* azonos a Σ által szabadon generált egységelemes félcsoporttal. A konkatenációt egyszerűen egymás után írással jelöljük. Így ha $\Sigma = \{0, 1\}$, akkor Σ^* a véges 0–1 sorozatok halmaza, és $0 \in \Sigma^*$, $1 \in \Sigma^*$ is fennáll. Ha $P \subset \{0, 1\}^*$ a legszűkebb olyan halmaz, amire $\lambda \in P$ továbbá minden $x, y \in \{0, 1\}^*$, $xy \in P$ esetén $x01y \in P$ és $x10y \in P$ is teljesül, akkor P pontosan azokból a 0–1 sorozatokból áll, melyekben ugyanannyi 1-es van, mint 0.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be a fenti állítást.
2. Definiáljuk hasonló módon azokat a 0–1 sorozatokat, melyek szimmetrikusak a felezőpontjukra (mint például 11011, 0100110010 stb).
3. Legyen $\Sigma = \{(,)\}$. Hogyan definiálhatnánk Σ^*-nak azokat az elemeit, melyek helyes zárójelezésnek felelnek meg?

Azokat a szabályokat, melyek valamilyen precíz módon megmondják milyen szavak tartoznak a nyelvbe, a nyelv *szintaxisának* nevezzük, a szavak értelmét definiáló szabályokat pedig a nyelv *szemantikájának*. Az így megadott nyelveket — a hétköznapi nyelvektől való megkülönböztetés érdekében — *formális nyelveknek* nevezzük. Formális nyelvek egyik legnagyobb előállítója és használója a számítógéptudomány: minden programozási nyelv egy-egy formális nyelv is.

A fejezet további részében a formális nyelvek egy családját, az ún. *elsőrendű nyelveket* definiáljuk. Ezek elemei az (elsőrendű) *formulák*, a szokásos matematikai állítások formális alakjai. Az elsőrendű nyelveket még *függvénykalkulus* néven is szokták emlegetni.

A matematikai logikában a formális nyelveknek további családjait is szokás definiálni, egyebek között van *másodrendű*, *harmadrendű* és általában *magasabbrendű*nek nevezett nyelv is; ezekkel a könyvben nem foglalkozunk.

Az elsőrendű nyelveknek csakúgy, mint a beszélt nyelveknek, sok különböző dialektusa létezik. Ezek lényegében ekvivalensek egymással: bármelyik dialektusból bármelyik másikba egyszerű szabályok alkalmazásával át lehet térni. Az általunk választott dialektus elég közel áll a mindennapi „beszélt" matematikai nyelvhez, ugyanakkor igyekeztünk benne minél kevesebb alapfogalmat bevezetni, hogy később a bizonyításaink minél egyszerűbbek legyenek.

Az elsőrendű nyelvek ábécéje két diszjunkt halmazra bomlik: az ún. logikai és a nem logikai jelekre. A *logikai jelek* minden elsőrendű nyelvben (legalábbis az általunk választott dialektusban) közösek, ezek

( ) ,	kezdőzárójel, végzárójel, vessző
$\neg$	negáció
$\vee$	vagy
$\exists$	létezik szimbólum (egzisztenciális kvantor)
$x_0, x_1, \ldots$	végtelen sok, egymástól és az összes többitől is különböző szimbólum, ezek a változójelek
$=$	egyenlőség

A nem logikai jelek alkotják a nyelv jelkészletét, ezek is két részhalmazra bomlanak: függvényjelekre és relációjelekre. Természetesen minden függvényjelhez és relációjelhez az is hozzátartozik, hogy hány változós. Bár ez az információ a jelkészletből nem mindig derül ki egyértelműen, a nyelvhez mindenképpen hozzátartozik.

2.1. Definíció A $t = \langle F, R, \tau \rangle$ hármast *hasonlósági típus*nak, *jelkészletnek* vagy csak röviden *típus*nak nevezzük, ha F és R szimbólumoknak egymástól és a logikai jelektől diszjunkt halmaza, τ pedig olyan függvény, amely $F \cup R$ minden eleméhez egy nem-negatív egészt rendel, ráadásul $r \in R$ esetén $\tau(r) > 0$.

Ha $t = \langle F, R, \tau \rangle$, akkor F elemei a *függvényjelek*, R elemei a *relációjelek*, τ pedig azt mondja meg, hogy egy függvényjel illetve relációjel hány változós. Azokat az f függvényjeleket, melyekre $\tau(f) = 0$ *konstansjeleknek* is nevezzük.

Teljesen jogtalanul, (de remélhetőleg félre nem érthető módon) azt, hogy az f függvényjel illetve r relációjel a t típus függvény- illetve relációjelei között van, $f \in t$-vel és $r \in t$-vel jelöljük. Így például az a mondat, hogy „legyen $f \in t$ tetszőleges n-változós függvényjel" azt jelenti, hogy $t = \langle F, R, \tau \rangle$ és $f \in F$ tetszőleges, továbbá $\tau(f) = n$. A t típus *számosságán* az $|F| + |R|$ számosságot értjük, és (természetesen) $|t|$-vel jelöljük.Végül, ha $t_0 = \langle F_0, R_0, \tau_0 \rangle$ és $t_1 = \langle F_1, R_1, \tau_1 \rangle$ hasonlósági típusok, azt mondjuk, hogy t_0 *résztípusa* t_1-nek, t_1 *bővítése* t_0-nak, és így írjuk: $t_0 \subset t_1$, ha $F_0 \subset F_1$, $R_0 \subset R_1$ és $\tau_0 \subset \tau_1$ (ami utóbbi azt jelenti, hogy $\tau_0 = \tau_1 \restriction F_0 \cup R_0$, azaz $x \in F_0 \cup R_0$ esetén $\tau_0(x) = \tau_1(x)$).

A $t = \langle F, R, \tau\rangle$ típus az elsőrendű nyelv ábécéjének nem logikai jeleit adja meg, ezek az F-beli függvényjelek és az R-beli relációjelek. Az $F \cup R$ halmaz a logikai jelekkel együtt alkotja a t *típusú elsőrendű nyelv* ábécéjét, ezt Σ_t-vel jelöljük. Mind Σ_t, mint Σ_t^* végtelen tetszőleges t típusra, és ha t is végtelen, akkor számosságuk megegyezik t számosságával.

Az elsőrendű formulák definíciójának első lépcsője a *kifejezések* pontos definíciója. Emlékeztetünk arra, hogy Σ_t elemeit azonosítjuk a Σ_t^* egyelemű sorozataival, továbbá Σ_t^* elemein az egymás után fűzés műveletét egyszerűen az elemek egymás után írásával jelöljük.

2.2. Definíció Legyen $t = \langle F, R, \tau\rangle$ egy hasonlósági típus. A t típusú *kifejezések* halmaza, $K(t)$ a Σ_t^*-nak az a legszűkebb részhalmaza, melyre a következők teljesülnek:

(i) $x \in K(t)$ minden x változójelre;

(ii) minden $f \in F$ függvényjelre, ha $\tau(f) = 0$, akkor $f \in K(t)$;

(iii) minden $f \in F$ függvényjelre, ha $\tau(f) > 0$ és $k_0, \ldots, k_{n-1} \in K(t)$ tetszőleges kifejezések, akkor $f(k_0, \ldots, k_{n-1}) \in K(t)$.

Ha tekintjük Σ_t^* összes olyan részhalmazát, melyekre (i)–(iii) teljesül (ilyen van, például maga Σ_t^*), akkor azok metszetére is teljesülnek ezek a tulajdonságok. Így valóban létezik a keresett legszűkebb részhalmaz. A t típusú kifejezéseket definiálhatjuk rekurzióval is, például a következőképpen.

Álljon K_0 az x_i változójelekből valamint mindazon $f \in F$ függvényjelekből, melyekre $\tau(f) = 0$. Ezek után ha K_i-t már definiáltuk, akkor legyen

$$K_{i+1} = K_i \cup \{f(k_0, \ldots, k_{n-1}) \in \Sigma_t^* : \quad f \in F,\ \tau(t) = n > 0, \quad \text{és} \quad k_0, \ldots, k_{n-1} \in K_i\}.$$

2.3. Tétel $K(t) = \bigcup\{K_i \ : i \in \omega\}$.

Bizonyítás Világos, hogy a $K = \bigcup\{K_i : i \in \omega\}$ teljesíti a 2.2. definíció (i)-(iii) feltételeit. Másrészt, ha Σ_t^* tetszőleges részhalmazára (i)-(iii) teljesül, akkor i-re vonatkozó indukcióval könnyen láthatjuk, hogy az minden i-re tartalmazza K_i-t, és ezért K-t is. Így valóban $K = K(t)$ a definíciónak megfelelő halmaz. ∎

Kifejezéseket általában k betűvel jelölünk, esetleg indexszel ellátva. A nullváltozós függvények, azaz konstansok jelölésére a c, esetleg d betű szolgál.

2.4. Definíció $F(t)$ jelöli a $t = \langle F, R, \tau\rangle$ típusú *formulák* halmazát. Ez Σ_t^*-nak az a legszűkebb részhalmaza, melyre a következők teljesülnek:

(i) ha $r \in R$ tetszőleges relációjel, $\tau(r) = n > 0$, és $k_0, \ldots, k_{n-1} \in K(t)$ tetszőleges kifejezések, akkor $r(k_0, \ldots, k_{n-1}) \in F(t)$;

(ii) ha $k_0, k_1 \in K(t)$ tetszőleges kifejezések, akkor $k_1 = k_2 \in F(t)$;

(iii) ha $\varphi, \psi \in F(t)$, akkor $(\varphi) \vee (\psi) \in F(t)$, $\neg(\varphi) \in F(t)$, és tetszőleges x változójelre $\exists x\, (\varphi) \in F(t)$.

Az előzőekhez hasonlóan látható be, hogy $F(t)$ létezik, és $F(t)$-re is adható rekurzív definíció. Mindazokat a formulákat, melyeket a definíció (i) és (ii) szabálya alapján állítottunk elő, *prímformuláknak* nevezzük, $F(t)$ részhalmazait pedig *elméleteknek*. Formulákat (esetleg indexes) görög kisbetűkkel jelölünk, általában φ, ψ, ϑ-val, elméletek jelölésére pedig a görög nagybetűk: Γ, Δ szolgálnak.

Formulákra valamilyen állítást azok felépítésére vonatkozó indukcióval bizonyíthatunk. Minthogy ilyen típusú bizonyítás lépten-nyomon elő fog fordulni, külön nevet is adunk neki:

2.5. Tétel (Formulaindukció) *Tegyük fel, hogy valamilyen Φ állítás igaz a prímformulákra, továbbá ha Φ igaz φ-re és ψ-re akkor igaz $(\varphi) \vee (\psi)$-re, $\neg(\varphi)$-re és $\exists x\,(\varphi)$ is. Ekkor Φ igaz az összes formulára.*

Bizonyítás Álljon $F_0 \subset F(t)$ a prímformulákból, és legyen $i \in \omega$-ra

$$F_{i+1} = F_i \cup \{(\varphi) \vee (\psi), \quad \neg(\varphi), \quad \exists x\,(\varphi) : \quad \varphi, \psi \in F_i\}.$$

Az i-re vonatkozó indukcióval azonnal adódik, hogy a Φ tulajdonság igaz F_i összes elemére, és így igaz $\bigcup\{F_i : i \in \omega\}$ elemeire is. De ez utóbbi halmaz éppen $F(t)$-vel egyenlő, amivel a tételt bizonyítottuk. ■

Bár $K(t)$ és $F(t)$ egyaránt részhalmaza Σ_t^*-nak, nincs olyan jelsorozat, mely egyszerre volna kifejezés és formula is: minden formulának tartalmaznia kell vagy az $=$ jelet, vagy egy relációjelet, míg ezek kifejezésekben nem fordulhatnak elő. Mivel formulák belsejében az $=$ jel szerepelhet, azért a könnyebb olvashatóság érdekében formulák (vagyis a megfelelő jelsorozatok) egyenlőségét a szokásos $=$ jel helyett $\equiv$-val jelöljük.

Miután pontosan definiáltuk, mit is nevezünk kifejezésnek illetve formulának, megállapodunk abban, hogy még más jelsorozatokat is ezekkel a nevekkel illetünk. Ezt azonban csak a könnyebb olvashatóság érdekében tesszük: minden esetben világos, hogy az új kifejezések és formulák hogyan írhatók át az eredeti definíció szerinti alakjukba.

Először is, ha a t típusban a $\oplus$ jel valamely kétváltozós függvény- vagy relációjel, akkor a $\oplus(k_0, k_1)$ úgynevezett prefix jelölésmód mellett megengedjük a $(k_0 \oplus k_1)$ infix jelölés használatát is. Ezzel már „kifejezés”-nek tekintjük az $(1 + (x_0 + 1)) * (1 + 1)$ jelsorozatot is (feltéve, hogy 1 konstansjel), és azt nem kell a szokatlan

$$*(+(1, +(x_0, 1)), +(1, 1))$$

alakba írnunk. Hasonlóan az $x_0 \in x_1$, vagy az $x_2 > 0$ prímformulákat sem kell $\in(x_0, x_1)$ valamint $>(x_2, 0)$-ként felírnunk.

Bevezetünk még további logikai jeleket is, melyeket formulák felépítésekor használhatunk. Ezek:

$\neq$	nem egyenlő
$\to$	nyíl vagy implikáció
$\wedge$	és
$\leftrightarrow$	akkor és csak akkor
$\forall$	minden, unverzális kvantor

Ha k_0 és k_1 kifejezések, φ és ψ tetszőleges formulák, akkor formulának tekintjük a következőket is: $k_0 \neq k_1$, $(\varphi) \to (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$, valamint $\forall x\,(\varphi)$ tetszőleges x változójelre. Ezek azonban csak rövidítések:

$k_0 \neq k_1$	a	$\neg(k_0 = k_1)$	rövidítése,
$(\varphi) \to (\psi)$	a	$(\neg(\varphi)) \vee (\psi)$	rövidítése,
$(\varphi) \wedge (\psi)$	a	$\neg((\neg(\varphi)) \vee (\neg(\psi)))$	rövidítése,
$(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$	a	$((\varphi) \to (\psi)) \wedge ((\psi) \to (\varphi))$	rövidítése,
$\forall x\, (\varphi)$	a	$\neg(\exists x\, (\neg(\varphi)))$	rövidítése.

Már itt is látható formuláink egy további kényelmetlensége: túltengenek bennük a zárójelek. Ezért egy további megállapodásként elhagyjuk az összes zárójelet, melyek nem feltétlenül szükségesek a formula egyértelmű olvasatához. Ehhez (az aritmetikai műveletekhez hasonlóan) megegyezünk abban, hogy a logikai műveletek kötésének erőssége (precedenciája) a következő: legerősebben köt a $\neg$, utána sorban az $\wedge$, $\vee$, $\to$ és végül a $\leftrightarrow$. Így például a

$$(\varphi \to \psi) \to (\vartheta \vee \varphi \to \vartheta \vee \psi)$$

formula teljesen zárójelezve így néz ki:

$$((\varphi) \to (\psi)) \to (((\vartheta) \vee (\varphi)) \to ((\vartheta) \vee (\psi)))$$

a $\to$ rövidítés nélkül pedig így:

$$(\neg((\neg(\varphi)) \vee (\psi))) \vee ((\neg((\vartheta) \vee (\varphi))) \vee ((\vartheta) \vee (\psi)))$$

Ez is jól mutatja, hogy a teljes formalizmus sokszor mennyire el tudja rejteni a nyilvánvaló igazságot.

Végül formulák változójeleit nem csak az x_0, x_1, ... jelekkel jelöljük, hanem más betűket is megengedünk erre a célra, általában x, y, z-t akár indexszel, akár anélkül. Mindezekkel az engedményekkel azt értük el, hogy a „hétköznapi formulák" is formulák lesznek.

Nem véletlen, hogy formuláinkat ilyen bőségesen elláttuk zárójelekkel. Ha a formulát mint jelsorozatot nézzük, a zárójelek segítségével egyértelműen „visszafejthetjük," hogyan is épült fel. Az összetartozó zárójelpárok belsejében vagy egy formulának vagy egy kifejezésnek kell állnia, és így — belülről kifelé haladva — sorra megtaláljuk a felépítésében használt sorozatokat. A továbbiakban azt bizonyítjuk, hogy ez valóban így is van.

Álljon a két elemű Σ ábécé a kezdő- és végzárójelből. Vegyünk egy tetszőleges $k \in K(t)$ kifejezést vagy egy $\varphi \in F(t)$ formulát. Töröljük ki k-ból és φ-ből az összes kezdő- és végzárójeltől különböző jelet, és jelöljük a megmaradt (esetleg üres) sorozatot $k \restriction \Sigma$-val illetve $\varphi \restriction \Sigma$-val.

2.6. Definíció A $\sigma \in \Sigma^*$ kezdő- és végzárójelekből álló véges sorozatról azt mondjuk hogy *helyes zárójelezés*, ha σ-ban a kezdő- és végzárójeleket össze lehet párosítani úgy, hogy minden pár bal oldali eleme kezdőzárójel legyen, továbbá bármely két pár által alkotott intervallumra azok vagy diszjunktak legyenek, vagy közülük az egyik tartalmazza a másikat.

Így például az alábbi Σ^*-beli szó

$$((((\,))(\,)))((((\,)(\,)))((\,)(\,)))$$

helyes zárójelezés (az összetartozó jeleket összekötöttük), míg a $(()()))(()$ szó nem az. A kifejezések és formulák rekurzív definíciói alapján (formulaindukcióval) azonnal adódik a

2.7. Lemma *Minden $k \in K(t)$ kifejezésre és $\varphi \in F(t)$ formulára, $k \restriction \Sigma$ valamint $\varphi \restriction \Sigma$ helyes zárójelezés.* ■

2.8. Lemma *Ha $\sigma \in \Sigma^*$ helyes zárójelezés, akkor a σ-beli zárójeleket csak egyféleképpen lehet összepárosítani.*

Bizonyítás A σ-ban található jelek számára vontkozó indukcióval bizonyítunk. Ha a σ szó üres, akkor az állítás nyilván igaz. Ha σ nem üres, akkor σ csak kezdőzárójellel kezdődhet (egyébként a kezdő végzárójelnek nem lehetne párja), és így σ-ban kell lennie végzárójelnek is. Keressük meg balról az *első* végzárójelet. Ennek párja kizárólag az előtte álló kezdőzárójel lehet. Ezt a két jelet σ-ból törölve továbbra is helyes zárójelezést kapunk, amiben a párosítás az indukciós feltétel miatt egyértelmű. De akkor az egyértelmű σ-ban is, és ezt akartuk bizonyítani. ■

Ez utóbbi két lemmából azonnal adódik, hogy ha egy „bővített” formulában a $\rightarrow$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ vagy $\forall$ jelek valamelyike szerepel, egyértelműen meg lehet határozni, hogy a formula mely része a rövidítés, és hogy mi a rövidítés nélküli formula.

A 2.8. lemma másik fontos következménye a

2.9. Lemma (Egyértelmű olvashatósági lemma) *Minden $k \in K(t)$ kifejezés és $\varphi \in F(t)$ formula egyértelműen építhető föl a 2.2. illetve a 2.4. definíciók szabályai alapján.*

Bizonyítás A lemmát csak formulákra bizonyítjuk, kifejezésekre a bizonyítás hasonló. Az állítást a szereplő jelek számára vonatkozó indukcióval igazoljuk. Legyen tehát $\varphi \in F(t)$ tetszőleges. Több esetet különböztetünk meg a szerint, hogy mi φ kezdő jele. Ha ez kezdőzárójel, akkor φ csak $(\varphi_1) \vee (\varphi_2)$ alakú lehet. Mivel az előző lemma alapján minden kezdőzárójel párját egyértelműen tudjuk meghatározni, azért φ-ből φ_1 és φ_2 is egyértelműen kapható. Most már φ_1 és φ_2 rövidebb φ-nél, rájuk az indukciós feltétel miatt igaz az egyértelmű olvashatóság, s ezért igaz φ-re is.

Ha φ kezdő jele $\neg$, vagy $\exists$, a rekurzió egyszerű. Ha φ kezdő jele egy $r \in t$ relációjel, akkor φ-t csak az (i) szabály alapján kaphatjuk (és az argumentumlistában a kifejezések is egyértelműen visszakereshetők); végül, ha ez sem áll fenn, akkor φ szükségképpen (ii)-ből adódik, és a benne levő két kifejezést az $=$ jel választja el egymástól. Ezzel a lemmát bizonyítottuk. ■

A lemma fontos következménye, hogy kifejezésekhez és formulákhoz azok felépítése szerinti rekurzióval rendelhetünk dolgokat, soha nem fordulhat elő, hogy ugyanahhoz a sorozathoz két különböző dolog is tartozzon.

Példaként nézzük meg, hogyan definiálható az a b függvény, mely minden formulára megmondja, hogy benne a kvantorok milyen mélyen vannak egymásba skatulyázva!

(i) Ha φ prímformula, akkor $b(\varphi) = 0$;

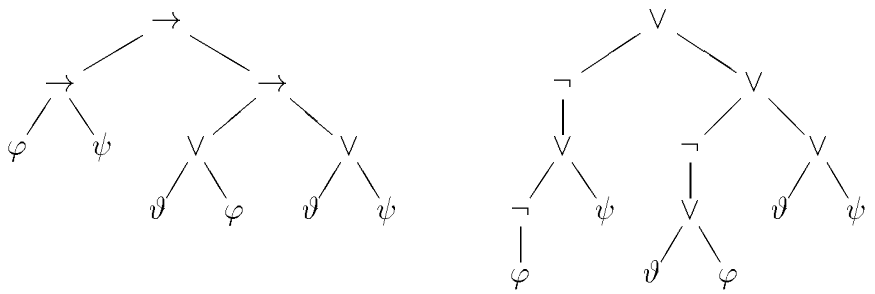
(ii) $b(\varphi \vee \psi) = \max(b(\varphi), b(\psi))$;
$b(\neg\varphi) = b(\varphi)$; végül
$b(\exists x\, \varphi) = b(\varphi) + 1$.

Világos, hogy b valóban azt a függvényt definiálja, amit vártunk. A 2.5. tétel alapján b az $F(t)$ minden elemén értelmezve van (legyen a Φ tulajdonság az, hogy b értelmezve van φ-n), és az egyértelmű olvashatósági lemma miatt egyértelmű.

A 2.9. lemmára és általában záró megjegyzéseinkre azért volt szükség, mert a kifejezéseket és a formulákat azonosítottuk az őket leíró jelsorozatokkal. Definiálhattuk volna őket absztraktabb, a felépítést közvetlenül tükröző módon is, például olyan irányított fagráfként, melynek csúcsaiban logikai összekötő jelek szerepelnek, a csúcsból kiinduló élek végén pedig azok az objektumok vannak, melyekre a jel vonatkozik. A

$$(\varphi \to \psi) \to (\vartheta \vee \varphi \to \vartheta \vee \psi)$$

formula például a következőképpen nézne ki, először a $\to$ rövidítést használva, másodszor pedig anélkül:



Itt φ, ψ, ϑ helyébe hasonlóan felírandó „formulákat” kell tenni. Annak ellenére, hogy ez a jelölésmód technikailag könnyebben kezelhető, nem ezt választjuk, mert túlságosan mesterkéltnek tűnik, s nem látszik, hogy szokásos formuláink is ilyen alakúak volnának.