12. fejezet

Church és Gödel tételei

Az előző fejezetben azt mutattuk meg, hogyan lehet formulákhoz, levezetésekhez természetes számokat rendelni. Most azt vizsgáljuk, mi az a lehető legkevesebb feltételt alőíró elmélet, amely már biztosítja mindazokat a tulajdonságokat, amiket a természetes számokról a Gödel-számozásnál kihasználtunk. Hasonlósági típusnak a Peano axiómarendszer t^{PA} típusút választjuk, melyet még q-val is fogunk jelölni: $q = \langle 0, 1, +, \cdot \rangle$. Elméletként a természetes számok sztenderd modelljén, $\mathfrak{N}$-en igaz összes formula megfelelne, ez azonban túlságosan is bő. A Peano axiómarendszer jobb jelölt, de *Raphael M. Robinson* még egy ennél is gyengébb elméletet talált.

12.1. Definíció A $q = \langle 0, 1, +, \cdot \rangle$ típusú $\mathrm{Q} \subset F(q)$ elmélet a következő hét formulából áll:

Q1	$x + 1 \neq 0$
Q2	$x + 1 = y + 1 \to x = y$
Q3	$x + 0 = x$
Q4	$x + (y + 1) = (x + y) + 1$
Q5	$x \cdot 0 = 0$
Q6	$x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$
Q7	$x \neq 0 \to \exists y\, (x = y + 1)$

Q1–Q6 megegyezik a Peano axiómarendszer P1–P6 formulájával, ám a teljes indukció axiómasémája helyett az egyetlen Q7 formulát vettük hozzá. A teljes indukció elhagyásával a bizonyitások leghatékonyabb eszközét vesztettük el, Q-ból például még csak az sem következik, hogy a $+$ művelet kommutatív: $\mathrm{Q} \not\models x + y = y + x$.

12.2. Definíció Minden $n \in \omega$ természetes számra definiáljuk a q típusú $\Delta_n \in K(q)$ kifejezést a következőképpen. $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = 0 + 1$, $\Delta_2 = (0 + 1) + 1$, és általában $\Delta_{n+1} = \Delta_n + 1$.

Még egy $F(q)$-beli kétváltozós formulára külön jelölést vezetünk be: az $x \leq y$ a $\exists z\, (z + x = y)$ formula helyett áll.

12.3. Tétel *Minden $n, p \in \omega$ természetes számra* Q*-nak tételei a következő formulák:*

(i) $\Delta_n + \Delta_p = \Delta_{n+p}$;
(ii) $\Delta_n \cdot \Delta_p = \Delta_{np}$;
(iii) $\Delta_n \neq \Delta_p$ ha $n \neq p$;
(iv) $x \leq \Delta_n \to x = \Delta_0 \vee x = \Delta_1 \vee \ldots \vee x = \Delta_n$;
(v) $x \leq \Delta_n \vee \Delta_n \leq x$;

(vi) $\Delta_p \leq \Delta_n$ ha $p \leq n$ és $\neg(\Delta_p \leq \Delta_n)$ ha $n < p$.

Bizonyítás Ahelyett, hogy a formulák levezethetőségét közvetlenül mutatnánk meg, belátjuk, hogy mindnyájan következményei Q-nak, s ekkor Gödel teljességi tételének értelmében le is vezethetők.

(i) p-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $p = 0$-ra $\Delta_p = 0$ és Q3 alapján $x + 0 = x$, tehát speciálisan $\Delta_n + 0 = \Delta_n$. Ha most az állítást $p \in \omega$-ra már tudjuk, akkor $\Delta_{p+1} = \Delta_p + 1$ tehát

$$\Delta_n + \Delta_{p+1} = \Delta_n + (\Delta_p + 1) = (\Delta_n + \Delta_p) + 1 = \Delta_{n+p} + 1$$

Q4 és az indukciós feltevés miatt. A jobb oldalon definíció szerint Δ_{n+p+1} áll, amivel (i)-t beláttuk.

(ii) Hasonlóan az előzőhöz most is p-re vonatkozó indukcióval az állítás könnyen adódik.

(iii) Nyilván feltehetjük, hogy $p < n$. Ha $p = 0$, akkor $n > 0$ miatt $\Delta_n = \Delta_{n-1} + 1$, és ez Q1 miatt $\neq 0 = \Delta_p$. Ha viszont $p > 0$, az állítást $p - 1$-re tudjuk, és $\Delta_n = \Delta_p$ volna, akkor persze $\Delta_{n-1} + 1 = \Delta_{p-1} + 1$ és Q2 szerint $\Delta_{n-1} = \Delta_{p-1}$ volna ellentétben az indukciós feltevéssel.

(iv) Q7 és Q4 szerint ha $z + x = 0$ és $x \neq 0$ akkor $\exists y\, \big(x = y + 1 \wedge (z + y) + 1 = 0\big)$. Ám Q1 szerint $(z + y) + 1 \neq 0$, így $z + x = 0$ esetén $x = 0$, azaz

$$\mathrm{Q} \vdash x \leq \Delta_0 \rightarrow x = \Delta_0.$$

Általában is Q7 és Q4 alapján

$$\mathrm{Q} \vdash z + x = \Delta_{n+1} \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y\, \big(x = y + 1 \wedge (x + y) + 1 = \Delta_n + 1\big),$$

tehát Q2 miatt

$$\mathrm{Q} \vdash z + x = \Delta_{n+1} \rightarrow x = 0 \vee \exists y\, (x = y + 1 \wedge y \leq \Delta_n).$$

Innen $n \in \omega$-ra vonatkozó indukcióval (iv) már könnyen adódik.

(v) Q3 szerint $\Delta_0 \leq x$ minden x-re, ami az állítást adja $n = 0$-ra. Most tegyük fel, hogy (v)-t $n \geq 0$-ra már tudjuk. Ha $x = 0$, akkor persze $x \leq \Delta_{n+1}$. Ha viszont $x \neq 0$, akkor Q7 szerint valamely y-ra $x = y + 1$. Alkalmazzuk most az indukciós feltevést y-ra:

$$\mathrm{Q} \vdash y \leq \Delta_n \vee \Delta_n \leq y.$$

Az első esetben van olyan z, amivel $z + y = \Delta_n$, tehát Q4 miatt $z + x = z + (y + 1) = (z + y) + 1 = \Delta_{n+1}$, azaz $x \leq \Delta_{n+1}$. A második esetben viszont $z + \Delta_n = y$ valamely z-re, tehát $z + \Delta_{n+1} = (z + \Delta_n) + 1 = y + 1 = x$, következtetésképp $\Delta_{n+1} \leq x$. Ez pedig (v)-t bizonyítja $(n + 1)$-re.

(vi) Az (i) pontban bizonyítottak szerint $p \leq n$ esetén

$$\Delta_{n-p} + \Delta_p = \Delta_n,$$

tehát valóban $\Delta_p \leq \Delta_n$. Ha viszont $n < p$ és mégis $\Delta_p \leq \Delta_n$ volna, akkor (iv) szerint

$$\Delta_p = \Delta_0 \vee \Delta_p = \Delta_1 \vee \ldots \vee \Delta_p = \Delta_n,$$

noha (iii) miatt itt mindenütt $\neq$ áll. Így valóban $\mathrm{Q} \vdash \neg(\Delta_p \leq \Delta_n)$. ∎

Bár az elmélet modelljei – ellentétben a Peano axiómarendszer modelljeivel – általában nem hasonlítanak a természetes számok sztenderd modelljére, $\mathfrak{N}$-re, a tétel szerint a Δ_n kifejezések értékei egy $\mathfrak{N}$-nel izomorf struktúrát alkotnak.

Legyen t egy hasonlósági típus kiterjesztése q-nak, ezt $t \supset q$ jelöli. Mindegyik Δ_n ekkor természetesen t típusú kifejezés is, így az alábbi definíció értelmes.

12.4. Definíció Legyen $t \supset q$ és $T \subset F(t)$ tetszőleges elmélet.

(i) Az n-változós $f : \omega_n \to \omega$ függvényről azt mondjuk, hogy T-ben *reprezentálható*, ha található olyan $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \in F(t)$ $(n+1)$-változós formula, hogy minden $\vec{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in \omega^n$-re

$$T \vdash \varphi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, y) \leftrightarrow y = \Delta_{f(a_0, \ldots, a_{n-1})}.$$

(ii) Az n-változós $R \subset \omega^n$ relációról azt mondjuk, hogy *reprezentálható T-ben*, ha található olyan n-változós $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F(t)$ formula, hogy minden $\vec{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in \omega^n$-re

$$T \vdash \varphi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}) \qquad \text{ha } \vec{a} \in R,$$

és

$$T \vdash \neg\varphi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}) \qquad \text{ha } \vec{a} \notin R.$$

A definíció szerint ellentmondásos elméletben minden függvény és reláció reprezentálható, hiszen ilyenkor T-ből minden formulát le lehet vezetni. Az is világos, hogy ha egy függvény vagy reláció T-ben reprezentálható és $T' \vdash T$, akkor T'-ben is reprezentálható. Végül megjegyezzük, hogy $T \vdash \Delta_0 \neq \Delta_1$ esetén egy $R \subset \omega^n$ reláció akkor és csak akkor reprezentálható T-ben, ha a karakterisztikus függvénye, K_R reprezentálható. Valóban, ha R-et a $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \equiv \varphi(\vec{x})$ formula reprezentálja, akkor K_R-hez jó reprezentáló formula az alábbi:

$$(\varphi(\vec{x}) \to y = \Delta_0) \wedge (\neg\varphi(\vec{x}) \to y = \Delta_1).$$

Fordítva, ha K_R-et a $\psi(\vec{x}, y)$ $n+1$-változós formula reprezentálja, akkor R-et a $\psi(\vec{x}, \Delta_0)$ n-változós formula.

12.5. Tétel (Rekurzív függvények reprezentációs tétele) *A* Q *elméletben minden rekurzív függvény és reláció reprezentálható.*

Bizonyítás Előbbi megjegyzésünk értelmében elegendő csak a függvények reprezentálhatóságát megmutatnunk, ezt azok definíciójára vonatkozó indukcióval tesszük meg. az I_i^n projekciófüggvénynek tetszőleges elméletben reprezentációja az

$$x_0 = x_0 \wedge x_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} = x_{n-1} \wedge y = x_i$$

formula; itt az első n konjunkciós tagra azért van szükség, hogy a formulának $n+1$ szabad változója legyen. Az összeadásnak és a szorzásnak a 12.3. tétel első három pontja szerint reprezentációja az $x_0+x_1=y$ illetve az $x_0 \cdot x_1 = y$ formula. Végül a $K_<$ függvény egy lehetséges reprezentációja a 12.3. tétel (vi) pontja szerint a

$$\big(\neg(x_1 \leq x_0) \to y = \Delta_0\big) \wedge (x_1 \leq x_0 \to y = \Delta_1).$$

Következő lépésként azt kell megmutatnunk, hogy ha az m-változós $g(x_0, \ldots, x_{m-1})$ reprezentációja a φ $(m+1)$-változós formula, valamint $i < m$-re az n-változós $h_i(\vec{x})$ reprezentációja a ψ_i $(n+1)$-változós formula, akkor a helyettesítéssel adódó

$$f(\vec{x}) = g\big(h_0(\vec{x}), \ldots, h_{m-1}(\vec{x})\big)$$

függvény ugyancsak reprezentálható. Könnyű ellenőrizni, hogy a

$$\exists z_0 \ldots \exists z_{m-1} \big[\bigwedge_{i<m} \psi_i(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_i) \wedge \varphi(z_0, \ldots, z_{m-1}, y)\big]$$

formula megteszi ezt a szívességet.

Így egyedül a μ-operációval való definíció maradt hátra. Legyen a $g(\vec{x}, u)$ $(n+1)$-változós függvény reprezentációja az $(n+2)$-változós $\varphi(\vec{x}, u, y)$ formula, és tegyük fel, hogy minden $\vec{a} \in \omega^n$-hez van olyan $b \in \omega$, amivel $g(\vec{a}, b) = 0$, azaz amivel

$$\mathrm{Q} \vdash \varphi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, \Delta_b, \Delta_0).$$

Tekintsük a következő $(n+1)$-változós $\psi(\vec{x}, y)$ formulát:

$$\psi(\vec{x}, y) \equiv \varphi(\vec{x}, y, \Delta_0) \wedge \forall z \, \big(z \leq y \wedge \varphi(\vec{x}, z, \Delta_0) \to y = z\big)\,.$$

Állítjuk, hogy ez az $f(\vec{x}) = \mu u \, g(\vec{x}, u) = 0$ függvény egy reprezentációja. Valóban, ha $\vec{a} \in \omega^n$ és $f(\vec{a}) = b$, akkor $g(\vec{a}, b) = 0$ miatt

$$\mathrm{Q} \vdash \varphi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, \Delta_b, \Delta_0)\,;$$

a 12.3. tétel (iv) pontja miatt $z \leq \Delta_b$ esetén $z = \Delta_0 \vee z = \Delta_1 \vee \ldots \wedge z = \Delta_b$ és ezek között a $z = \Delta_b$ kivételével mindre

$$\mathrm{Q} \vdash \neg\varphi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, z, \Delta_0),$$

amivel igazoltuk, hogy

$$\mathrm{Q} \vdash y = \Delta_b \to \psi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, \Delta_b),$$

A másik irányú implikáció bizonyításához tegyük fel, hogy y olyan, amivel $\psi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, y)$ áll. Ekkor a 12.3. tétel (v) pontja szerint vagy $y \leq \Delta_b$ vagy $\Delta_b \leq y$. Az első esetben y csak a Δ_0, Δ_1, $\ldots$, Δ_b valamelyike lehet, de ezek közül ψ első konjunkciós tagja csak Δ_b-re áll, így $y = \Delta_b$. A másik esetben nézzük ψ második tagját, abban z-nek választható éppen Δ_b is. Erre $\psi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, z, \Delta_0)$, tehát igaz az implikáció konklúziója is, vagyis $y = \Delta_b$. Mindkét esetben azt kaptuk, hogy $y = \Delta_b$, amivel igazoltuk, hogy

$$\mathrm{Q} \vdash \psi(\Delta_{a_0}, \ldots, \Delta_{a_{n-1}}, y) \to y = \Delta_b.$$

Eszerint ψ valóban reprezentációja a $\mu u \, g(\vec{x}, u) = 0$ függvénynek, a tételt bizonyítottuk. ■

Már minden rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy a Gödel-számozást összekapcsolhassuk a fejezet eddigi eredményeivel. Legyen a t véges típus kiterjesztése q-nak, és legyen $\varphi \in F(t)$ tetszőleges formula. A φ Gödel-számához tartozó $\Delta_{\alpha(\varphi)} \in K(t)$ kifejezésre a $\ulcorner\varphi\urcorner$ jelölést vezetjük be. Ezenkívül definiáljuk a *Szám* : $\omega \to \omega$ függvényt a következőképpen: $n \in \omega$-ra legyen $\mathit{Szám}(n)$ a $\Delta_n \in K(t)$ kifejezés Gödel-száma, vagyis $\alpha(\Delta_n)$.

12.6. Lemma *A Szám függvény rekurzív.*

Bizonyítás A 0 és 1 konstanjelek (nullváltozós függvényjelek) mint kifejezések Gödel-száma, $\alpha(0)$ illetve $\alpha(1)$ a t típus rögzítése miatt konkrét számok. Így a *Szám* függvényt primitív rekurzióval tudjuk definiálni az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \mathit{Szám}(0) &= \alpha(\Delta_0) = \alpha(0), \\ \mathit{Szám}(n+1) &= \ulcorner\langle \alpha_0(+), \mathit{Szám}(n), \alpha(1)\rangle\urcorner, \end{aligned}$$

hiszen $\Delta_{n+1} = \Delta_n + 1$. Végül is a 10.11. tétel szerint a *Szám* függvény rekurzív. ■

12.7. Tétel (Church tétele) *Legyen $t \supset q$ véges hasonlósági típus és $\Gamma \subset F(t)$ olyan ellentmondástalan elmélet, melyre $\Gamma \vdash$ Q. Ekkor Γ nem eldönthető.*

Bizonyítás Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $\mathit{Lev}_\Gamma \subset \omega$ rekurzív reláció. Tekintsük a következő $R(a,b) \subset \omega^2$ kétváltozós relációt:

$$\mathit{Lev}_\Gamma\big(\mathit{Helyettesítve}(a, \alpha_0(x_0), \mathit{Szám}(b))\big)\,,$$

azaz tetszőleges $\varphi \in F(t)$-re $R(\alpha(\varphi), b)$ pontosan akkor, ha $\Gamma \vdash \varphi[x_0/\Delta_b]$. R definíciója szerint ez a reláció rekurzív, ezért ugyancsak rekurzív az egyváltozós $P(b) = \neg R(b,b)$ reláció is. A reprezentációs tétel és $\Gamma \vdash$ Q miatt P reprezentálható Γ-ban, legyen az egyváltozós $\varphi(x_0) \in F(t)$ egy reprezentációja:

$$\begin{aligned} b \in P \quad &\text{esetén} \quad \Gamma \vdash \varphi[x_0/\Delta_b], \\ b \notin P \quad &\text{esetén} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi[x_0/\Delta_b]. \end{aligned}$$

Az első esetben $\Gamma \vdash \varphi[x_0/\Delta_b]$ azt jelenti, hogy $R(\alpha(\varphi), b)$ teljesül, míg a másodikban $\Gamma \not\vdash \varphi[x_0/\Delta_b]$ hiszen feltettük hogy Γ ellentmondástalan, és így $\neg R(\alpha(\varphi), b)$. Ezért minden $b \in \omega$-ra

$$\begin{aligned} b \in P \quad &\text{esetén} \quad R(\alpha(\varphi), b), \\ b \notin P \quad &\text{esetén} \quad \neg R(\alpha(\varphi), b). \end{aligned}$$

Ez speciálisan $b = \alpha(\varphi)$ mellett is így van, tehát $P(\alpha(\varphi))$ akkor és csak akkor, ha $R(\alpha(\varphi), \alpha(\varphi))$. Ez viszont ellentmond P definíciójának, ami szerint $P(b)$ és $\neg R(b,b)$ ekvivalens. A keresett ellentmondást megkaptuk, a tételt bizonyítottuk. ■

A 11.9. tétel szerint egy rekurzív és eldönthetetlen elmélet nem lehet teljes, tehát Church tételéből azonnal adódik az alábbi

12.8. Következmény (Gödel I. Nem-teljességi tétele) *Legyen* $t \supset q$ *véges típus és* $\Gamma \subset F(t)$ *olyan ellentmondástalan axiómarendszer, amire* $\Gamma \models \mathrm{Q}$. *Ekkor* Γ *nem teljes.* ■

Church és Gödel tételei szerint a matematika megalapozása szempontjából fontos elméletek melyekben a természetes számok legelemibb tulajdonságai bizonyíthatók, nem lehetnek sem eldönthetők, sem teljesek. A Peano axiómarendszer (ha ellentmondástalan) a 4.4. lemma szerint teljesíti a tétel feltételeit, tehát nem eldönthető – nincs olyan univerzális eljárás, ami minden t^{PA} típusú formulára megmondaná, következménye-e PA-nak vagy sem; továbbá nem teljes – vagyis található olyan zárt forma, amelyre sem ő sem a tagadása nem következménye PA-nak. Ráadásul a Peano axiómarendszernek ez a „hiányossága," miszerint nem tud számot adni az összes természetes számokon igaz állításról, nem abból adódik, hogy ügyetlenül választottuk meg formuláit. A természetes számokat axiomatizáló tetszőleges $\Gamma \subset F(t^{PA})$ elméletnél (ha legalább annyit tud mint Q) választhatunk: vagy nem lesz axiómarendszer, s akkor nem tudjuk általában eldönteni mely formulák tartoznak Γ-ba; vagy pedig lesz olyan $\varphi \in F(t^{PA})$ zárt formula, ami független Γ-tól, azaz sem φ sem $\neg\varphi$ nem vezethető le belőle.

Church tételének következménye az is, hogy a természetes számok sztenderd modelljén igaz formulák halmaza nem eldönthető. Így a Church-tézis szerint nincs olyan univerzális eljárás, mely tetszőleges számelméleti állítsról eldöntené, hogy az igaz-e vagy sem. Bár vannak eljárások, melyek sok tétel bizonyítását kiadják, minden eljáráshoz található olyan állítás, amire az rosszul működik: azt adja hogy állításunk igaz, noha az hamis, vagy fordítva. A Church-tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy (a matematikában) nincsen Bölcsek Köve, azt hiábavalóság keresni.

Gödel nem-teljességi tételének bizonyítása tipikus egzisztencia bizonyítás. Garantálja, hogy létezik Γ-tól független zárt formula, de hogy ezt hogyan lehetne megtalálni, arról nem szól. Most a tételnek olyan bizonyítását adjuk, melyből az is kiolvasható, hogyan lehet ilyen formulát felírni. Elsőként Gödel eredeti, gyengébb eredményt adó konstrukcióját ismertetjük, majd annak *J. B. Rossertól* származó javított változatát.

Legyen tehát $t \supset q$ véges típus, $\Gamma \subset F(t)$ ellentmondástalan rekurzív elmélet, melyre $\Gamma \models \mathrm{Q}$, vagyis Γ-ban minden rekurzív függvény reprezentálható. Ekkor a 11.7. tétel szerint Biz_Γ rekurzív reláció, legyen $B(x_0, x_1) \in F(t)$ ennek egy reprezentációja:

$$\begin{aligned} &\Gamma \models B(\Delta_a, \Delta_b) &&\text{ha } Biz_\Gamma(a, b),\\ &\Gamma \models \neg B(\Delta_a, \Delta_b) &&\text{egyébként.}\end{aligned}$$

Rekurzív még a kétváltozós $Helyettesítve(a, \alpha_0(x_0), Szám(b))$ függvény is (megszorítjuk magunkat arra az esetre, mikor a helyettesítendő változójel x_0), legyen ennek reprezentációja a háromváltozós $H(x_0, x_1, x_2) \in F(t)$ formula. A B és a H formulákat konkrétan fel tudjuk írni, mindössze egy kis kitartásra van szükség. A Biz_Γ és a *Helyettesítve* definícióját ugyanis visszagöngyölhetjük egészen addig, míg csupán a rekurzív függvények 10.1. definíciójában szereplő alapfüggvényeket és operációkat használjuk a felírásukhoz. Ebből a megfelelő reprezentáló formulákat lépésről lépésre felépíthetjük.

Definiáljuk a $\Phi(x) \in F(t)$ formulát a következőképpen:

$$\Phi(x) \equiv \forall z \, \big(H(x, x, z) \to \neg\exists y \, B(y, z)\big) \, .$$

Ezt a következőképpen lehetne szavakba önteni: „ha az x Gödel-számú formulában az x_0 változójelet lecseréljük Δ_x-re, az adódó formula nem levezethető." Legyen Φ Gödel-száma $\alpha(\Phi) = m \in \omega$, ezzel $\ulcorner\Phi\urcorner = \Delta_m$. Nézzük a $\varphi \equiv \Phi(\Delta_m) \in F(t)$ zárt formulát, ennek Gödel-száma nyilván

$$\mathit{Helyettesítve}\big(\alpha(\Phi), \alpha_0(x), \mathit{Szám}(m)\big)\,.$$

Mivel H a *Helyettesítve* függvény reprezentációja és $\Delta_{\alpha(\varphi)} = \ulcorner\varphi\urcorner$, azért

$$\Gamma \models \forall z\ \big(H(\Delta_m, \Delta_m, z) \leftrightarrow z = \ulcorner\varphi\urcorner\big)\,.$$

Így a $\Phi(\Delta_m) \equiv \varphi$ formulára $\Phi(x)$ definíciája alapján

$$(*) \qquad \Gamma \models \varphi \leftrightarrow \neg\exists y\, B(y, \ulcorner\varphi\urcorner).$$

Tehát φ az állítja: „én nem vagyok levezethető.” Megkaptuk Gödel nevezetes, önmagáról beszélő formuláját. Ráadásul φ az igazat állítja, vagyis $\Gamma \not\models \varphi$. Ha ugyanis ez nem így volna, akkor legyen $a \in \omega$ a φ egy levezetésének Gödel-száma. A Biz_Γ reláció definíciója szerint ekkor $\mathit{Biz}_\Gamma(a, \alpha(\varphi))$, tehát $\Gamma \models B(\Delta_a, \ulcorner\varphi\urcorner)$, és így

$$\Gamma \models \exists y\, B(y, \ulcorner\varphi\urcorner).$$

A fenti $(*)$ állítás $\Gamma \models \varphi$-vel együtt viszont azt adja, hogy $\Gamma \models \neg\exists y\, B(y, \ulcorner\varphi\urcorner)$. Ezek szerint Γ ellentmondásos, ellentétben Γ-ra tett feltételünknek. Így valóban $\Gamma \not\models \varphi$, és a $\varphi \in F(t)$ formulát konkrétan fel is tudtuk írni.

Még azt kellene megmutatnunk, hogy $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Mindenesetre φ nem vezethető le Γ-ból, ezért

$$\Gamma \models \neg B(\Delta_i, \ulcorner\varphi\urcorner) \qquad \text{minden} \ \ i \in \omega\text{-ra.}$$

Ha most mégis $\Gamma \models \neg\varphi$ volna, akkor $(*)$ szerint $\Gamma \models \exists y\, B(y, \ulcorner\varphi\urcorner)$ is állna, ami mindenesetre elég furcsa, de sajnos nem lehetetlen. Innen tovább menni nem tudunk, a Γ-ra tett egyéb feltételek nélkül bizony előfordulhat, hogy $\Gamma \models \neg\varphi$.

Magát a konstrukciót úgy menthetjük meg, hogy a Φ formula helyett egy annál bonyolultabbat használunk. Rendelje a *Tagadás* függvény minden $\varphi \in F(t)$ formula Gödel-számához a $\neg\varphi$ Gödel-számát. Ez persze rekurzív és legyen a kétváltozós $T(x_0, x_1) \in F(t)$ egy reprezentáló formulája. Definiáljuk a Φ-t helyettesítő egyváltozós $\Psi(x) \in F(t)$ formulát a következőképpen:

$$\begin{aligned}\Psi(x) \equiv \forall z_0 \forall z_1\ \big(&H(x, x, z_0) \wedge T(z_0, z_1) \to \\ &\neg\exists y\, [B(y, z_0) \wedge \forall y_0\, (y_0 \leq y \to \neg B(y_0, z_1))]\big)\,.\end{aligned}$$

Természetesen $y_0 \leq y$ most is a $\exists z\, (z + y_0 = y)$ formula helyett áll. Legyen $\alpha(\Psi) = m \in \omega$ és $\psi \equiv \Psi(\Delta_m) \in F(t)$. Azonnal adódik, hogy

$$\Gamma \models \forall z_0 \forall z_1\ \big(H(\Delta_m, \Delta_m, z_0) \wedge T(z_0, z_1) \leftrightarrow z_0 = \ulcorner\psi\urcorner \wedge z_1 = \ulcorner\neg\psi\urcorner\big)\,,$$

s innen ugyanúgy mint az előbb kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \Gamma \models \psi \leftrightarrow \neg\exists y\, [B(y, \ulcorner\psi\urcorner) \wedge \forall y_0\ \big(y_0 \leq y \to \neg B(y_0, \ulcorner\neg\psi\urcorner)\big)].$$

Ha most $\Gamma \models \psi$ volna, akkor volna olyan $a \in \omega$ is, amivel $\mathit{Biz}_\Gamma(a, \alpha(\psi))$, és ekkor $\Gamma \models B(\Delta_a, \ulcorner\psi\urcorner)$. Feltevés szerint Γ ellentmondástalan, tehát $\Gamma \models \neg B(\Delta_i, \ulcorner\neg\psi\urcorner)$

tetszőleges $i \in \omega$-ra, s így speciálisan az $i = 0, \ldots, a$ értékekre. A 12.3. tétel szerint

$$\Gamma \models y_0 \leq \Delta_a \to y_0 = \Delta_0 \vee y_0 = \Delta_1 \vee \ldots \vee y_0 = \Delta_a,$$

tehát

$$\Gamma \models B(\Delta_a, \ulcorner\psi\urcorner) \wedge \forall y_0 \left(y_0 \leq \Delta_a \to \neg B(y_0, \ulcorner\neg\psi\urcorner)\right).$$

Márpedig ψ-ből $(*)$ szerint épp ennek tagadása következik, ellentmondásban azzal, hogy Γ ellentmondástalan.

Ha pedig $\Gamma \models \neg\psi$ volna, akkor ismét válasszunk olyan $a \in \omega$-t amivel *Biz*$_\Gamma(a, \alpha(\neg\psi))$, azaz $\Gamma \models B(\Delta_a, \ulcorner\neg\psi\urcorner)$. Persze tudjuk, hogy ψ nem vezethető le Γ-ból, azért tetszőleges $i \in \omega$-ra $\Gamma \models \neg B(\Delta_i, \ulcorner\psi\urcorner)$. Így ha y olyan, amire $B(y, \ulcorner\psi\urcorner)$ akkor $y \leq \Delta_a$ nem állhat fönn. Következésképp a 12.3. tétel (v) pontja szerint $\Delta_a \leq y$, tehát az $y_0 = \Delta_a$ választás mutatja, hogy az alábbi formula Γ minden modelljén igaz:

$$B(y, \ulcorner\psi\urcorner) \to \exists y_0 \left(y_0 \leq y \wedge B(y, \ulcorner\neg\psi\urcorner)\right).$$

Így ez levezethető Γ-ból, márpedig $\Gamma \models \neg\psi$ esetén $(*)$ szerint ennek tagadása is levezethető – ismét ellentmondásba kerültünk. Tehát a zárt $\psi \in F(t)$ formula valóban független Γ-tól, és ψ-t ha nem is teljes részletességgel, de konkrétan megadtuk.

Gödel nem-teljességi tétele kicsit sarkosan így is fogalmazható: az axiomatikus módszer nem alkalmas arra, hogy az összes igaz állítást megkapjuk vele. Az alábbi, *A. Tarskitól* származó tétel pedig a következőképpen: a formális rendszeren belül az „igaz állítás” fogalma nem definiálható. Egy ilyen definíció ugyanis azt jelentené, hogy meg tudnánk adni olyan $\chi(x)$ formulát, amely tetszőleges (zárt) φ-re megmondaná, φ igaz-e vagy sem, azaz $\chi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ igaz, ha φ igaz, és hamis, ha φ is az.

12.9. Tétel (Tarski tétele) *Legyen $t \supset q$ véges típus és $\Gamma \subset F(t)$ tetszéleges ellentmondástalan elmélet, amire $\Gamma \models$ Q. Ekkor nincs olyan egyváltozós $\chi(x) \in F(t)$, amire minden zárt $\varphi \in F(t)$ mellett $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \chi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ állna.*

Bizonyítás Olyan zárt φ formulát fogunk konstruálni, amire $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \neg\chi(\ulcorner\varphi\urcorner)$. Erre a φ-re a fenti ekvivalencia nem állhat fenn, mert feltétel szerint Γ ellentmondástalan. φ elkészítéséhez ugyanazt az utat követjük, amit a Gödel tétel második bizonyításában kétszer is. Legyen tehát $\Phi(x_0) \in F(t)$ a következő:

$$\Phi(x) \equiv \forall z \left(H(x, x, z) \to \neg\chi(z)\right).$$

Vegyük a Φ Gödel-számát, $\alpha(\Phi) = m$-et, és definiáljuk φ-t mint a zárt $\Phi(\Delta_m) \in F(t)$ formulát. Mivel

$$\alpha(\varphi) = \textit{Helyettesítve}\left(\alpha(\Phi), \alpha_0(x_0), \textit{Szám}(m)\right)$$

és H ennek a függvénynek reprezentációja, azért

$$\Gamma \models \forall z \left(H(\Delta_m, \Delta_m, z) \leftrightarrow z = \ulcorner\varphi\urcorner\right),$$

s így $\Phi(x)$ definíciója alapján valóban

$$\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \neg\chi(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

■

Azt szerettük volna, hogy $\chi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ azt fejezze ki: „φ igaz," s olyan φ-t találtunk, ami ekvivalens $\neg\chi(\ulcorner\varphi\urcorner)$-vel. Így ez a φ valami olyasmit mond, hogy „én nem vagyok igaz," hasonlóan ahhoz, ahogyan a nem-teljességi tétel bizonyításában előállított formula állította magáról: „én nem vagyok bizonyítható." Mindkét állítás a *hazug paradoxonra* emlékeztet. Mikor valaki azt állítja: „én most hazudok," igazat sem mondhat, de ugyanakkor nem is hazudhat. Míg ilyen, saját lehetetlenségét állító mondatot a beszélt nyelv nem túlságosan precíz nyelvtani szabályaival és pontosan talán nem is definiálható szemantikájával minden további nélkül megenged, addig egy pontosan definiált formális rendszerben ez nem fordulhat elő.

Visszatérve Church tételére, az egy elégséges feltételt ad arra, hogy egy elmélet eldönthetetlen legyen. S ha már van egy eldönthetetlen elméletünk, abból egy sor más elmélet eldönthetetlenségére következtethetünk. Kezdjük egy egyszerű állítással.

12.10. Lemma *Tegyük fel, hogy a $\Gamma \subset F(t)$ elméletnek van olyan véges bővítése, ami eldönthetetlen. Ekkor Γ is eldönthetetlen.*

Bizonyítás Legyen a $\Delta = \Gamma \cup \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ elmélet eldönthetetlen, természetesen feltehetjük, hogy a $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in F(t)$ formulák mind zártak. A 9.2. dedukció tétel és a teljességi tétel miatt tetszőleges $\vartheta \in F(t)$ formulára

$$\Gamma \cup \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\} \vdash \vartheta$$

akkor és csak akkor, ha

$$\Gamma \vdash (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \to \vartheta.$$

Így ha a $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \in F(t)$ zárt formulát φ-vel jelöljük, akkor $\alpha(\vartheta) \in \mathit{Lev}_\Delta$ és $\alpha(\varphi \to \vartheta) \in \mathit{Lev}_\Gamma$ ekvivalensek.

Tegyük fel a lemma állításával ellentétben, hogy Γ eldönthető, vagyis, hogy Lev_Γ rekurzív. Mivel $\varphi \in F(t)$ rögzített, azért rekurzív az a függvény is, ami $\vartheta \in F(t)$ Gödel-számához $\varphi \to \vartheta$ Gödel-számát rendeli, hiszen erre

$$f(a) = \ulcorner\langle \alpha_0(\vee), \alpha(\neg\varphi), a\rangle\urcorner$$

nyilván megfelel. Ezért rekurzív a $\mathit{Lev}_\Gamma\big(f(a)\big)$ reláció is, ami az előzőek szerint éppen Lev_Γ-val esik egybe, ellentmondásban azzal, hogy Δ eldönthetetlen. ■

A $\mathrm{Q} \subset F(q)$ elmélet véges sok formulából áll, eldönthetetlen, tehát a lemmából közvetlenül adódik az alábbi meglepő állítás.

12.11. Következmény *Legyen $t \supset q$ tetszőleges véges típus. Ekkor a t típusú üres elmélet eldönthetetlen.*

Ezek szerint a t típusú igaz formulák, vagyis a logikai igazságok egy nem rekurzív halmazt alkotnak. Ezt a tényt még úgy is szokás fogalmazni, hogy a függvénykalkulus eldönthetetlen. Az, hogy a $q = \langle 0, 1, +, \cdot\rangle$ hasonlósági típusban szereplő jelek hogyan néznek ki, az eldönthetőség szempontjából nyilván lényegtelen. Ezért elég megkövetelnünk, hogy a t véges típusban legalább két konstansjel és legalább két kétváltozós függvényjel legyen, már abból következik, hogy a t típusú üres elmélet eldönthetetlen.

Ezzel szemben például az üres típusú (azaz függvény- és relációjel nélküli, csak $=$ jelet tartalmazó) üres elmélet eldönthető. Ezért anélkül, hogy az elméletet változtatnánk, csak a hasonlósági típus módosításával ez elmélet eldönthetősége megváltozhat.

Eddigi eredményeink nem alkalmasak arra, hogy adott típusú elmélet eldönthetetlenségéből egy egészen más típusú elmélet eldönthetetlenségére következtessünk. E célt szolgálja A. *Tarski* módszere, melynek ismertetését két definícióval kezdjük.

Egy $\Gamma \subset F(t)$ elméletről azt mondjuk, hogy *lényegesen eldönthetetlen*, ha nem csak Γ, hanem annak minden ellentmondástalan bővítése is eldönthetetlen. Church tétele szerint Q lényegesen eldönthetetlen. A másik definíció kissé bonyolultabb. Legyen t és t' két hasonlósági típus, $\Gamma \subset F(t)$ és $\Gamma' \subset F(t')$ ellentmondástalan elméletek. Azt mondjuk, hogy Γ' *szemantikusan interpretálható* Γ-ban létezik olyan t típusú egyváltozós $\varphi(x_0) \in F(t)$ formula, továbbá minden $f \in t'$ n-változós függvényjelhez egy $(n+1)$-változós $\varphi_f(\vec{x}, y) \in F(t)$ és minden $r \in t'$ n-változós relációjelhez egy n-változós $\varphi_r(\vec{x}) \in F(t)$ formula úgy, hogy Γ tetszőleges $\mathfrak{A}$ modelljében a következőképpen definiált t' típusú $\mathfrak{B}$ struktúra Γ' elmélet modellje: $\mathfrak{B}$-nek alaphalmaza A-nak a φ formulát kielégítő elemeiből áll:

$$B = \{a \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[a]\};$$

az $f \in t'$ függvényjel interpretáltja a φ_f formulát kielégíthető B-beli $(n+1)$-esek halmaza, végül az $r \in t'$ relációjel interpretáltja legyen a φ_r formulát kielégítő B-beli n-esek halmaza. Természetesen megköveteljük, hogy a függvényjelek interpretáltjai valóban függvények legyenek, azaz

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash \varphi(x_0) \wedge \ldots \wedge \varphi(x_{n-1}) \to \\ \exists y \ \left[\varphi(y) \wedge \varphi_f(\vec{x}, y) \wedge \forall z \ \left(\varphi(z) \wedge \varphi_f(\vec{x}, z) \to z = y\right)\right].\end{aligned}$$

Ha adottak a φ, φ_f és $\varphi_r \in F(t)$ formulák, akkor ezekkel Γ tetszőleges $\mathfrak{A}$ modelljében elkészíthetjük a fent definiált $\mathfrak{B}$ struktúrát. Ezen felül minden $\psi \in F(t')$ formulához lehet találni ψ-nek olyan $\psi^* \in F(t)$ „fordítását,” hogy minden $\mathfrak{B}$ fölötti e értékelésre $\mathfrak{B} \models \psi[e]$ és $\mathfrak{A} \models \psi^*[e]$ ekvivalensek. Ezt legkönnyebben a kifejezések és formulák felépítésére vonatkozó rekurzióval adhatjuk meg, ahogyan azt az 5.12. tétel bizonyításánál tettük. Elsőként válasszunk olyan y változójelet, ami nem fordul elő sem ψ-ben, sem a ψ-ben szereplő függvényjeleket definiáló φ_f formulákban, majd a ψ-ben előforduló $k \in K(t')$ kifejezésekre definiáljuk a $k^* \in F(t)$ formulákat a következőképpen

(i) ha k az x_i változójel, akkor $k^* \equiv x_i = y$;

(ii) ha $k \equiv f(k_0, \ldots, k_{n-1})$ ahol $f \in t'$ n-változós függvényjel, akkor legyenek $y_0, \ldots, y_{n-1}$ olyan y-tól különböző változójelek, melyek sem φ_f-ben sem a $k_0^*, \ldots, k_{n-1}^*$-ban nem fordulnak elő, és ekkor

$$k^* \equiv \exists y_0 \ldots \exists y_{n-1} \ \left(k_0^*[y/y_0] \wedge \ldots \wedge k_{n-1}^*[y/y_{n-1}] \wedge \varphi_f(y_0, \ldots, y_{n-1}, y)\right).$$

Az y-ra tett feltevésünk szerint minden helyettesítés megengedett.

Most már rátérhetünk a formulák fordítására:

(i) ha $\psi \equiv r(k_0, \ldots, k_{n-1})$ ahol $r \in t'$ n-változós relációjel, akkor válasszunk ismét olyan $y_0, \ldots, y_{n-1}$ melyek sem φ_r-ben sem $k_0^*, \ldots, k_{n-1}^*$-ben nem fordulnak elő, ezekkel

$$\psi^* \equiv \exists y_0 \ldots \exists y_{n-1} \left(k_0^*[y/y_0] \wedge \ldots \wedge k_{n-1}^*[y/y_{y-1}] \wedge \varphi_r(y_0, \ldots, y_{n-1})\right).$$

(ii) Ha $\psi \equiv k_0 = k_1$ és y_0, y_1 nem fordulnak elő k_0^*-ban és k_1^*-ban, akkor

$$\psi^* \equiv \exists y_0 \exists y_1 (k_0^*[y/y_0] \wedge k_1^*[y/y_1] \wedge y_0 = y_1).$$

(iii) Végül $(\psi_0 \vee \psi_1)^* \equiv \psi_0^* \vee \psi_1^*$, $(not \psi)^* \equiv \neg\psi^*$ és

$$(\exists x_i\, \psi)^* \equiv \exists y_0 \left(\varphi(y_0) \wedge \psi^*[x_i/y_0]\right),$$

ahol y_0 sem φ-ben sem ψ^*-ban nem fordul elő.

Szintén formulaindukcióval bizonyítható, hogy az így definiált φ^* valóban rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

12.12. Lemma *Tegyük fel, hogy t és t' véges típusok és rögzítsük a $\varphi \in F(t)$ és $f, r \in t'$-re a $\varphi_f, \varphi_r \in F(t)$ formulákat. Van olyan rekurzív függvény, mely tetszőleges $\psi \in F(t')$-re $\alpha(\psi)$-hez $\alpha(\psi^*)$-ot rendeli.*

Bizonyítás A lemma igazolása meglehetősen fáradságos és hosszadalmas, de lényegében semmi új ötletet nem igényel. Így a bizonyítást elhagyjuk. ■

12.13. Tétel *Legyenek t és t' véges típusok és $\Gamma \subset F(t)$, $\Gamma' \subset F(t')$ ellentmondástalan elméletek. Ha Γ' szemantikusan interpretálható Γ-ban és Γ' lényegesen eldönthetetlen, akkor Γ is lényegesen eldönthetetlen.*

Bizonyítás Először is megjegyezzük, hogy ha Γ' interpretálható Γ-ban és Δ ellentmondástalan bővítése Γ-nak, akkor Γ' a Δ-ban is interpretálható. Így a tétel feltételei mellett elegendő belátnunk, hogy Γ eldönthetetlen. Tegyük fel, hogy Γ mégis eldönthető, vagyis hogy a $Lev_\Gamma \subset \omega$ reláció rekurzív. Jelölje $\overline{\psi}$ a ψ lezártját és legyen

$$\Delta' = \{\psi \in F(t') : \Gamma \vdash \overline{\psi}^*\}.$$

Mivel az a függvény, ami $\alpha(\psi)$-hez $\alpha(\overline{\psi})$-t rendeli rekurzív, továbbá az előző lemma szerint az is rekurzív, ami az $\alpha(\overline{\psi})$ helyen $\alpha(\overline{\psi}^*)$-ot vesz fel értékül, azért indirekt feltevésünk folytán $\Delta' \subset F(t')$ rekurzív elmélet.

Az, hogy Γ' szemantikusan interpretálható Γ-ban azt jelenti, hogy Γ minden $\mathfrak{A}$ modelljében az ott definiált $\mathfrak{B}$ struktúra modellje Γ'-nek, vagyis minden $\psi \in \Gamma'$-re $\mathfrak{A} \models \overline{\psi}^*$, tehát $\Gamma \vdash \overline{\psi}^*$. Így $\Gamma' \subset \Delta'$, s mivel Γ' lényegesen eldönthetetlen, azért Δ' következményeinek halmaza, vagyis

$$\{\psi \in F(t') : \Delta' \vdash \psi\}$$

nem rekurzív elmélet.

A keresett ellentmondást megkapjuk, ha megmutatjuk, hogy ez egybeesik Δ'-vel. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $\psi \in F(t')$-re $\Delta' \vdash \psi$. Az igazság tétel miatt ekkor $\Delta' \models \psi$ tehát Δ' összes modelljében igaz ψ és így $\overline{\psi}$ is, speciálisan azokban a modellekben is, melyeket Γ modelljeiből kaptunk. De ez azt jelenti, hogy Γ minden modelljén igaz a $\overline{\psi}^*$ formula, s így a teljességi tétel miatt $\Gamma \vdash \overline{\psi}^*$. Ebből Δ' definíciója alapján $\psi \in \Delta'$, ahogy állítottuk. ■

12.14. Következmény *A halmazelmélet axiómarendszere, ZFC lényegesen eldönthetetlen.*

Bizonyítás A Q elmélet szemantikusan interpretálható ZFC-ben, hiszen a formulával definiálható legkisebb limesz rendszám, az ω elemein ugyancsak formulával definiálható rendszám-összeadás és rendszám-szorzás teljesíti a Q1–Q7 formulákat. ■

A bizonyításból egy erősebb állítás is kiolvasható. Az ω-t definiáló formula, azok a formulák, melyek a rendszám-összeadásról és -szorzásról kimondják hogy ezek függvények; végül a Q1–Q7 formulák fordításai mind következményei ZFC-nek. Mivel itt véges sok formuláról van szó, azért ezek a kompaktsági tétel miatt következményei a ZFC egy véges Γ részének is, tehát Q már Γ-ban is szemantikusan interpretálható. Így van a ZFC-nek olyan véges része, ami lényegesen eldönthetetlen. A ZFC nyelve az egyetlen ϵ kétváltozós relációjelből áll, tehát a 12.10. lemma szerint a következőket kapjuk.

12.15. Következmény *Ha a t típus tartalmaz olyan relációjelet, ami legalább kétváltozós, akkor a t típusú üres elmélet eldönthetetlen.*

Bizonyítás Ha az $r \in t$ relációjel kettőnél több változós, csak azokat a formulákat nézzük, melyekben r második, harmadik, stb argumentuma egyforma. Az ilyen formulák halmaza nyilván rekurzív, s bennük r úgy viselkedik, mintha kétváltozós lenne. Ezért ha ez az elmélet eldönthető lenne, eldönthető lenne az is, mely egyetlen kétváltozós relációjelet tartalmaz. ■

Következőként azt mutatjuk meg, hogy a 4. fejezetben definiált gráfelmélet eldönthetetlen. Emlékeztetünk rá, hogy egy $\langle \acute{E} \rangle$ típusú struktúrát, ahol $\acute{E}$ kétváltozós relációjel, *gráfnak* nevezünk, ha benne a következő két formulából álló $G \subset F(\langle \acute{E} \rangle)$ elmélet igaz:

$$G = \{ \neg \acute{E}(x, x), \quad \acute{E}(x, y) \to \acute{E}(y, x) \}.$$

Az első azt fejezi ki, hogy a gráf hurokmentes, a második azt, hogy irányítatlan.

12.16. Tétel *Az $\langle \acute{E} \rangle$ típusú G elmélet eldönthetetlen.*

Bizonyítás Legyen R egy kétváltozós relációjel, az előzőek szerint van olyan véges $\Gamma' \subset F(\langle R \rangle)$ elmélet, ami lényegesen eldönthetetlen. Ha most a

$$\Gamma' \cup \{ \neg R(x, x), \quad R(x, y) \to R(y, x) \}$$

konzisztens lenne, akkor a 12.10. lemma alapján készen lennénk. Ezt azonban nem remélhetjük, s inkább a 12.13. tételhez fordulunk segítségül. Az állítás bizonyításához elgendő volna belátni, hogy Γ' szemantikusan interpretálható a gráfelmélet egy véges bővítésében. Azonban bizonyítani csak egy ennél gyengébb állítást tudunk:

Legyen c_0, c_1 két konstansjel (nullváltozós függvényjel), ekkor Γ' interpretálható G-nek egy $\langle \acute{E}, c_0, c_1 \rangle$ típusú véges bővítésében.

Valóban, Γ' nem lehet ellentmondásos, mert akkor eldönthető lenne. Így van modellje, legyen $\mathfrak{A}$ ilyen: $\mathfrak{A} \models \Gamma'$. Ebből G-nek egy $\langle \acute{E}, c_0, c_1 \rangle$ típusú modelljét készítjük a következőképpen. Minden $a \in A$-ra felveszünk három új elemet, a_0-t, a_1-et és a_2-t;

továbbá mindezek mellé még két elemet: u_0-t és u_1-et. Ezek együtt alkotják $\mathfrak{B}$ alaphalmazát. A c_0 elem interpretáltja legyen u_0, a c_1-é u_1, továbbá $\mathfrak{B}$-nek a következő elempárjai között vezessen él (vagyis álljon fenn az $É$ reláció): a_0 és a_1, a_1 és a_2, u_0 és a_0, valamint u_1 és a_1 között minden $a \in A$-ra; továbbá $a, b \in A$ esetén ha $\langle a, b\rangle \in R_{\mathfrak{A}}$ akkor a_0 és b_2 között. Nyilvánvaló, hogy az így definiált struktúra gráf, azaz $É$ irreflexív és szimmetrikus, továbbá az is világos, hogy a $\Delta = \{\varphi \in F(\langle É, c_0, c_1\rangle) : B \models \varphi\}$ elméletben a $\Delta' = \{\psi \in F(\langle R\rangle) : \mathfrak{A} \models \psi\}$ elmélet szemantikusan interpretálható. Valóban, ezt az alábbi definíciók mutatják: az alaphalmazt a

$$\neg É(x, c_0) \wedge \neg É(x, c_1)$$

formulát kielégítő elemek alkotják, és két ilyen x, y elem álljon R relációban, ha

$$\exists x_1\, \exists x_2\, \big(É(x, x_1) \wedge É(x, c_1) \wedge É(x_1, x_0) \wedge É(x_0, c_0) \wedge É(x_0, y)\big)\,.$$

Mivel $\mathfrak{A}$ a Γ' egy modellje volt, azért $\Gamma' \subset \Delta'$ és így Γ' is interpretálható a Δ elméletben. Ám Γ' véges, ezért egy korábbi gondolatmenetet megismételve van Δ-nak is olyan Γ véges része, amiben Γ' már interpretálható. A 12.13. tétel szerint ekkor Γ lényegesen eldönthetetlen, s mivel $\mathfrak{B}$-ben igazak voltak a gráfokat definiáló formulák, azért $\Gamma \cup G$ is része Δ-nak, tehát ellentmondástalan és így (lényegesen) eldönthetetlen is.

Tehát G-nek van eldönthetetlen $\langle É, c_0, c_1\rangle$ típusú véges Γ bővítése. Innen már könnyen adódik, hogy G is eldönthetetlen. Nyilván föltehetjük, hogy Γ-ban csupa zárt formula szerepel, legyen $\Phi(x, y) \in F(\langle É\rangle)$ az a formula, amire $\Phi(c_0, c_1)$ éppen a Γ-beli formulák konjunkciója. Ezzel a 9.2. dedukció-tétel (és a teljességi tétel) alapján tetszőleges $\varphi(x, y) \in F(\langle É\rangle)$-re a következők ekvivalensek:

$$G \cup \Gamma \vdash \varphi(c_0, c_1)\,; \quad G \cup \{\Phi(c_0, c_1)\} \vdash \varphi(c_0, c_1)\,; \quad G \vdash \Phi(c_0, c_1) \to \varphi(c_0, c_1).$$

Mivel G-ben a c_0, c_1 konstansjelek nem fordulnak elő, a 9.1. tétel szerint ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy

$$G \vdash \forall x\, \forall y\, \big(\Phi(x, y) \to \varphi(x, y)\big)\,.$$

Ha most G következményeinek halmaza rekurzív elméletet alkotna, akkor (lévén Φ rögzített) rekurzív volna az

$$\{\alpha(\varphi(x, y)) : G \vdash \forall x\, \forall y\, \big(\Phi(x, y) \to \varphi(x, y)\big)\} \subset \omega$$

reláció is. Az a függvény, ami egy $\langle É, c_0, c_1\rangle$ típusú $\varphi(c_0, c_1)$ formula Gödel-számából a megfelelő $\langle É\rangle$ típusú $\varphi(x, y)$ formula Gödel-számát állítja elő, nyilván rekurzív. Ezért az

$$\{\alpha(\varphi(c_0, c_1)) : G \vdash \forall x\, \forall y\, \big(\Phi(x, y) \to \varphi(x, y)\big)\} \subset \omega$$

reláció is rekurzív, noha ez a fentiek szerint éppen $G \cup \Gamma$ következményeinek Gödel-számaiból áll, és $G \cup \Gamma$ eldönthetetlen volt. A kapott ellentmondás mutatja, hogy G tényleg eldönthetetlen, a tételt igazoltuk. ■

A bizonyítás első felében tulajdonképpen egy általános tételt igazoltunk, melyet explicite is kimondunk:

12.17. Tétel *Legyenek t és t' véges típusok, továbbá $\Gamma' \subset F(t')$ véges lényegesen eldönthetetlen elmélet. Tegyük fel, hogy a $\Gamma \subset F(t)$ elméletnek van olyan modellje, melyben Γ'-nek egy modelljét tudjuk definiálni. Ekkor Γ eldönthetetlen, sőt Γ-nak van lényegesen eldönthetetlen véges bővítése.* ■

A tétel *A. Tarskitól* származik, ezt felhasználva bizonyítjuk *A. Grzegorczyk* következő ereményét.

12.18. Tétel *Az alábbi elméletek eldönthetetlenek:*
(i) *parciális valamint hálószerű rendezés;*
(ii) *hálók, moduláris valamint disztributív hálók elmélete.*

Bizonyítás A 12.10. lemma szerint elegendő a legbővebb elméletekről igazolni, hogy eldönthetetlenek. Legyen $\Gamma' \subset F(\langle \acute{E} \rangle)$ a gráfelméletnek olyan véges bővítése, ami eldönthetetlen (a 12.16. tétel szerint ez létezik), továbbá $\mathfrak{B}$ modellje Γ'-nek, és E a $\mathfrak{B}$-beli élek halmaza:

$$E = \big\{ \{a, b\} \subset B : \langle a, b \rangle \in \acute{E}_{\mathfrak{B}} \big\}.$$

Olyan hálószerű rendezést illetve disztributív hálót szeretnénk megadni, mleyben egy $\mathfrak{B}$-vel izomorf struktúra található. Ha ez sikerül, a 12.17. tétel szerint készen vagyunk.

Álljon a definiálandó $\mathfrak{A}$ struktúra alaphalmaza a $\mathfrak{B}$-beli élek és pontok bizonyos részhalmazaiból, egészen pontosan

$$A = \big\{ F \subset E \cup B : \text{ tetszőleges } a,\ b \in B\text{-re} \\ \{a, b\} \in F \text{ esetén } a \in F \text{ és } b \in F \big\}.$$

A $\leq$ kétváltozós relációjel valamint a $\cap$ és $\cup$ függvényjelek interpretáltja legyen a következő: F_0, $F_1 \in A$ esetén $F_0 \leq_{\mathfrak{A}} F_1$ ha $F_0 \subset F_1$; $F_0 \cap_{\mathfrak{A}} F_1$ és $F_0 \cup_{\mathfrak{A}} F_1$ az F_0 és F_1 metszete illetve egyesítése (uniója). Könnyű látni, hogy a műveletek nem vezetnek ki A-ból; $\mathfrak{A}$-n a $\leq$ relációt megtartva hálószerű rendezést kapunk, a $\cap$ és $\cup$ műveletekkel egy disztributív hálót. Azt kell még látnunk, hogy $\mathfrak{A}$-ban definiálható egy $\mathfrak{B}$-vel izomorf $\mathfrak{B}'$ struktúra. Először is F_0, $F_1 \in A$ esetén $F_0 \leq F_1$ pontosan akkor, ha $F_0 \cap F_1 = F_0$, így a $\leq$ reláció definiálható a $\cap$ művelettel. $\mathfrak{A}$-ban van legkisebb elem, nevezetesen az üres halmaz, álljon B' a közvetlenül e fölötti elemekből, vagyis az atomokból. Ezeket persze formulával is kijelölhetjük. Az atomok éppen B egyelemű részhalmazai, így természetes módon izomorfizmus létesíthető B' és B között. Legyen x_0, $x_1 \in B'$, ekkor $x_0 = \{b_0\}$ és $x_1 = \{b_1\}$ valamely b_0, $b_1 \in B$-re. Most b_0 és b_1 között pontosan akkor fut él, ha a $\big\{b_0, b_1, \{b_0, b_1\}\big\}$ háromelemű halmaz A-ban van. Ezt az elemet viszont – ha egyátalán létezik – egyértelműen jellemzi, hogy nagyobb x_0 és x_1 legkisebb felső korlátjánál, $\{b_0, b_1\}$-nél, de x_0 és x_1-en kívül nincs más atom alatta. Az, hogy ilyen elem létezik-e szintén egy alkalmasan választott formula teljesülésével ekvivalens. Ezzel a tétel állítását beláttuk. ■

Hasonló módszerrel de lényegesen nagyobb technikai nehézségek árán bizonyítható, hogy a csoportok valamint a testek elmélete is eldönthetetlen. Az első eredmény *A. Tarskitól*, a másik *Julia Robinsontól* származik. A 11.9. tétel szerint egy rekurzív teljes elmélet eldönthető. Nem teljes eldönthető elméletre példa az Abel-csoportok elmélete, ezt *W. Szmielew* igazolta 1955-ben.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy Q ellentmondástalan, továbbá független (vagyis a Q1–Q7 formulák közül semelyik sem következménye a többi hatnak).
2. Mutassuk meg, hogy a fejezet összes eredménye érvényben marad, ha a t típusról nem azt kötjük ki, hogy véges, hanem hogy legfeljebb megszámlálható.
3. Legyen t véges vagy megszámlálható és $\Gamma \subset F(t)$ ellentmondástalan rekurzív elmélet. Igazoljuk, hogy minden Γ-ban reprezentálható függvény rekurzív.
4. Egy $\Gamma \subset F(t)$ elmélet *lényegesen nem teljes*, ha nincs Γ-nak olyan ellentmondástalan rekurzív bővítése, ami teljes is volna. Bizonyítsuk be, hogy a Peano axiómarendszer és a *ZFC* lényegesen nem-teljes.
5. (Fixpont tétel) Legyen $t \supset q$ véges vagy megszámlálható típus és $\mathrm{Q} \subset \Gamma \subset F(t)$ tetszőleges elmélet. Mutassuk meg, hogy minden egyváltozós $\Phi(x) \in F(t)$ formulához található olyan zárt $\varphi \in F(t)$, amivel $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \Phi(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
6. Legyen $\mathfrak{N}$ a természetes számok sztenderd modellje, továbbá $I = \{\alpha(\varphi) \in \omega : \varphi \in F(t^{PA})$ és $\mathfrak{N} \models \varphi\}$, valamint $F = \{\alpha(\varphi) \in \omega : \varphi \in F(t^{PA})$ és $\mathfrak{N} \models \neg\varphi\}$. Igazoljuk, hogy sem I sem F nem rekurzív. Mutassuk meg azt is, hogy nincs olyan $A \subset \omega$ rekurzív reláció, amire $I \subset A$ és $F \cap A = \emptyset$ (azaz I és F rekurzívan nem választható szét). Útmutatás: használjuk a fixpont-tételt.
7. Igazoljuk *ZFC* eldönthetetlenségét (12.14. következmény) úgy is, hogy közvetlenül megmutatjuk: minden rekurzív függvény reprezentálható *ZFC*-ben.
8. Tartalmazzon a t típus legalább két egyváltozós függvényjelet. Igazoljuk, hogy a t típusú üres elmélet eldönthetetlen. Útmutatás: Legyen Γ', $\mathfrak{B}$ és E mint a 12.18. tétel bizonyításában. Most az $\langle f, g\rangle$ típusú $\mathfrak{A}$ struktúra alaphalmaza legyen $E \cup B$ és $a \in B$ esetén $f_{\mathfrak{A}}(a) = g_{\mathfrak{A}}(a) = a$, $\{a, b\} \in E$ esetén pedig $f_{\mathfrak{A}}(\{a, b\}) = a$, $g_{\mathfrak{A}}(\{a, b\}) = b$.
9. Álljon t csupa egyváltozós relációjelből. Mutassuk meg, hogy a t típusú üres elmélet eldönthető. Útmutatás: legyen $t = \langle R_0, \ldots, R_{k-1}\rangle$, akkor $\vdash \varphi$ akkor és csak akkor, ha minden olyan t típusú $\mathfrak{A}$ struktúrára, melynek alaphalmaza legfeljebb 2^k elemű, $\mathfrak{A} \models \varphi$.