11. fejezet

A levezethetőség aritmetizálása

Aritmetizálás az a tevékenység, melynek során különböző jelsorozatokhoz természetes számokat rendelünk azért, hogy a sorozatok közötti manipulációkat a természetes számokon végzendő rekurzív műveletekre vezessük vissza. Az az ötlet, hogy a függvény- és relációjeleket, kifejezéseket, sőt magukat a levezetéseket is egy-egy természetes számmal kódoljuk, K. Gödeltől származik még az 1930-as évek elejéről. Ezzel a *Gödel-számozásnak* nevezett kódolással lehetővé válik, hogy a különféle szintaktikus kapcsolatok helyett a természetes számok között fennálló bizonyos rekurzív összefüggésekről beszéljünk. Ezeknek az összefüggéseknek a meglétét vagy hiányát viszont ismét formulákkal fogalmazhatjuk meg. Egy természetes számokról szóló formulának így a közvetlen jelentésén kívül másfajta jelentése is lehet, mint például „ez egy kifejezés” vagy „ez egy ilyen meg olyan kódú formula levezetése.” Gödelnek ezzel a technikával sikerült olyan formulákat konstruálni, melyek bizonyos értelemben saját magukra utalnak; az ilyen „önmagukról beszélő” formulák létezésének számos fontos következménye van.

Első lépésként tehát a kifejezések, formulák, levezetések Gödel-számozását definiáljuk. Legyen ehhez $t = \langle F, R, \tau \rangle$ egy hasonlósági típus, ezt a továbbiakban rögzítjük. Ahhoz, hogy már a különböző t-beli jelekhez különböző természetes számokat tudjunk rendelni, ki kell kötnünk, hogy t legfeljebb megszámlálható. Mi azonban ennél többet teszünk fel, azt, hogy t véges. Bár a bemutatandó eljárás lényegében változatlan formában megszámlálható típusra is végigvihető, olyan technikai nehézségek lépnek föl, melyekbe nem kívánunk belebonyolódni (lásd a feladatokat). Így feltesszük, hogy a $t = \langle F, R, \tau \rangle$ hasonlósági típus véges:

$$F = \{f_0, \ldots, f_{r-1}\}, \qquad R = \{r_0, \ldots, r_{s-1}\},$$

és persze az $f \in F$ függvényjel $\tau(f) \geq 0$ változós, az $r \in R$ relációjel pedig $\tau(r) \geq 1$ változós.

Bizonyos logikai jelekhez valamint a t típus jeleihez természetes számokat rendelünk az alábbi táblázat szerint, egy j jelre a hozzárendelt számot $\alpha_0(j)$ jelöli:

j	$\neg$	$\vee$	$\exists$	$=$	f_0	$\ldots$	f_{r-1}	r_0	$\ldots$	r_{s-1}	x_0	x_1	$\ldots$
$\alpha_0(j)$	0	1	2	3	4	$\ldots$	$3+r$	$4+r$	$\ldots$	$3+r+s$	$4+r+s$	$5+r+s$	$\ldots$

Legyen $k \in K(t)$ egy tetszőleges t típusú kifejezés. A k felépítésére vonatkozó rekurzióval k-hoz egy $\alpha(k)$ természetes számot rendelünk, amit k *Gödel-számának* nevezünk.

11.1. Definíció (i) Az x változójel mint kifejezés Gödel-száma legyen $\alpha(x) = \ulcorner\langle\alpha_0(x)\rangle\urcorner$, vagyis az egyetlen $\alpha_0(x)$ elemből álló sorozat kódja;

(ii) ha a k kifejezés $f(k_0, \ldots, k_{n-1})$ alakú, ahol $f \in t$ n-változós függvényjel és a $k_0, \ldots, k_{n-1} \in K(t)$ kifejezések Gödel-számát már tudjuk, akkor

$$\alpha(k) = \ulcorner\langle \alpha_0(f), \alpha(k_0), \ldots, \alpha(k_{n-1})\rangle\urcorner.$$

Álljon a *Változó* $\subset \omega$ nevű egyváltozós reláció a változójelekhez rendelt számokból, a *Kifejezés* $\subset \omega$ reláció pedig a t típusú kifejezések Gödel-számaiból, azaz

$$\begin{aligned} \textit{Változó} &= \{\alpha_0(x) : x \text{ változójel }\}, \\ \textit{Kifejezés} &= \{\alpha(k) : k \in K(t)\}. \end{aligned}$$

11.2. Lemma *A Változó reláció rekurzív.*

Bizonyítás Valóban, $a \in$ *Változó* pontosan akkor, ha $a \geq 4 + r + s$. Itt az egyenlőtlenség jel jobb oldalán egy konkrét természetes szám áll (ne feledjük, hogy a t típust rögzítettük), a $\geq$ pedig rekurzív reláció, így a *Változó* $= \{a \in \omega : a \geq 4+r+s\}$ reláció is rekurzív. ■

Jóval nehezebb igazolni a következő állítást.

11.3. Lemma *A Kifejezés reláció rekurzív.*

Bizonyítás Emlékeztetünk arra, hogy egy R relációra $a \in R$ helyett $R(a)$-t, $a \notin R$ helyett pedig $\neg R(a)$-t írunk. A 11.1. definíció szerint tetszőleges $a \in \omega$-ra *Kifejezés*(a) pontosan akkor áll fenn, ha az alábbi feltétel tejesül:

$$(*) \quad \begin{aligned} &\textit{Sorozat}(a) \wedge \Big(\big[\textit{Hossz}(a) = 1 \wedge \textit{Változó}(\textit{Elem}(a,0))\big] \vee \\ &\quad \big[\textit{Hossz}(a) = \tau(f_0) + 1 \wedge \textit{Elem}(a,0) = \alpha_0(f_0) \wedge \\ &\qquad\qquad (\forall i < \tau(f_0))\, \textit{Kifejezés}(\textit{Elem}(a, i+1))\big] \vee \\ &\quad \ldots \vee \\ &\quad \big[\textit{Hossz}(a) = \tau(f_{r-1}) + 1 \wedge \textit{Elem}(a,0) = \alpha_0(f_{r-1}) \wedge \\ &\qquad\qquad (\forall i < \tau(f_{r-1}))\, \textit{Kifejezés}(\textit{Elem}(a, i+1))\big] \Big). \end{aligned}$$

Ilyenkor az $a \in \omega$ szám legalább egy hosszúságú sorozat kódja, ezért nem lehet 0. Tehát *Elem*$(a, i+1) \leq a \dot{-} 1 < a$, ami azt jelenti, hogy a $(*)$ feltétel a *Kifejezés* reláció $a \in \omega$ helyen felvett értékét ugyanennek a relációnak az a-nál kisebb helyeken felvett értékeivel definiálja. Most a 10.12. tételre szeretnénk hivatkozni, ami azt állítja, hogy ilyen esetben a definiált reláció rekurzív. A tételben azonban nem relációról, hanem függvényekről van szó, és a függvény kisebb argumentumokon felvett értékei is csak egészen speciális alakban fordulhatnak elő. Az első megszorítást nem nehéz kikerülni, a reláció helyett annak karakterisztikus függvényéről fogjuk igazolni, hogy rekurzív. Jelöljük ezt a függvényt a rövidség kedvéért K-val. A másik megszorítás szerint K-nak az $a \in \omega$ helyen felvett értékét a-ból és a $\langle K(0), \ldots, K(a-1)\rangle$ sorozat kódjából, $\widetilde{K}(a)$-ból kell egy rekurzív függvénnyel megadni. Mivel esetünkben *Elem*$(a, i+1) < a$, azért *Kifejezés*$(\textit{Elem}(a, i+1))$ pontosan akkor teljesül, ha $\widetilde{K}(a)$-nak az *Elem*$(a, i+1)$-edik eleme 0, azaz ha

$$\textit{Elem}\,\big(\widetilde{K}(a), \textit{Elem}(a, i+1)\big) = 0.$$

Ezt a *Kifejezés*(a) $(*)$ alatti definíciójában mind az r helyen a *Kifejezés*$(\textit{Elem}(a, i+1))$ helyére betéve olyan a-tól és $\widetilde{K}(a)$-tól függő kétváltozós relációt kapunk, ami pontosan akkor teljesül, ha $K(a) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\textit{Sorozat}(a) \wedge \Big(\big[\textit{Hossz}(a) = 1 \wedge \textit{Változó}(\textit{Elem}(a,0))\big] \vee \\
&\quad \big[\textit{Hossz}(a) = \tau(f_0) + 1 \wedge \textit{Elem}(a,0) = \alpha_0(f_0) \wedge \\
&\qquad\qquad (\forall i < \tau(f_0)\,)\,\textit{Elem}(\widetilde{K}(a), \textit{Elem}(a, i+1)) = 0\big] \vee \\
&\quad \ldots \vee \\
&\quad \big[\textit{Hossz}(a) = \tau(f_{r-1}) + 1 \wedge \textit{Elem}(a,0) = \alpha_0(f_{r-1}) \wedge \\
&\qquad\qquad (\forall i < \tau(f_{r-1})\,)\,\textit{Elem}(\widetilde{K}(a), \textit{Elem}(a, i+1)) = 0\big]\Big).
\end{aligned}$$

Ez az $R(\widetilde{K}(a), a)$ kétváltozós reláció rekurzív is, hiszen a felírásban $\tau(f_i)$ és $\alpha_0(f_i)$ kivételével csupa rekurzív függvény illetve reláció szerepel, és ezekre olyan operációkat alkalmazunk, amik a rekurzivitást megőrzik; $\tau(f_i)$ és $\alpha_0(f_i)$ pedig konkrét számok. Az R reláció karakterisztikus függvénye tehát megfelel g-nek, hiszen rekurzív és minden $a \in \omega$-ra

$$K(a) = g(\widetilde{K}(a), a).$$

Most már hivatkozhatunk a 10.12. tételre, ami szerint K rekurzív függvény. Így a *Kifejezés* reláció is rekurzív, melynek karakterisztikus függvénye éppen K volt. ■

A továbbiakban számos relációról bizonyítjuk, hogy rekurzív, ám minden esetben megelégszünk azzal, hogy a reláció $(*)$ típusú definícióját felírjuk, vagy esetleg csak utalunk rá, hogy a megfelelő definíció felírható, az azt követő okoskodást elhagyjuk.

Következő lépésként a t típusú formulákhoz rendelünk természetes számokat. A $\varphi \in F(t)$-hez rendelt számot φ *Gödel-számának* nevezzük és $\alpha(\varphi)$-vel jelöljük. A hozzárendelés természetesen a formulák felépítésére vonatkozó rekurzióval történik.

11.4. Definíció (i) Legyen $r \in t$ n-változós relációjel, $k_0, \ldots, k_{n-1} \in K(t)$ kifejezések. A $\varphi \equiv r(k_0, \ldots, k_{n-1})$ prímformula Gödel-száma $\alpha(\varphi) = \ulcorner\langle \alpha_0(r), \alpha(k_0), \ldots, \alpha(k_{n-1})\rangle\urcorner$.

(ii) Legyen k_0, $k_1 \in K(t)$ és $\varphi \equiv k_0 = k_1$. Ekkor $\alpha(\varphi) = \ulcorner\langle \alpha_0(=), \alpha(k_0), \alpha(k_1)\rangle\urcorner$.

(iii) Tegyük fel, hogy $\varphi, \psi \in F(t)$ formuláknak már ismerjük a Gödel-számát. Ekkor

$$\begin{aligned}
\alpha(\varphi \vee \psi) &= \ulcorner\langle \alpha_0(\vee), \alpha(\varphi), \alpha(\psi)\rangle\urcorner; \\
\alpha(\neg\varphi) &= \ulcorner\langle \alpha_0(\neg), \alpha(\varphi)\rangle\urcorner; \\
\alpha(\exists x_i\, \varphi) &= \ulcorner\langle \alpha_0(\exists), \alpha_0(x_i), \alpha(\varphi)\rangle\urcorner.
\end{aligned}$$

Álljon a *Formula* $\subset \omega$ egyváltozós reláció a formulák Gödel-számaiból:

$$\textit{Formula} = \{\, \alpha(\varphi) : \varphi \in F(t) \,\}.$$

11.5. Lemma *A Formula reláció rekurzív.*

Bizonyítás A 11.3. lemma bizonyításában használt utat követjük. Elsőként a definíció pontjait sorra véve láthatjuk, hogy *Formula*(a) pontosan akkor áll fenn, ha az alábbi hatalmas méretű reláció teljesül:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Sorozat}(a) \wedge \Big(\big[\mathit{Hossz}(a) = \tau(r_0) + 1 \wedge \mathit{Elem}(a,0) = \alpha_0(r_0) \wedge \\
&\qquad\qquad (\forall i < \tau(r_0))\,\mathit{Kifejez\acute{e}s}(\mathit{Elem}(a, i+1))\big] \vee \\
&\ldots \vee \\
&\big[\mathit{Hossz}(a) = \tau(r_{s-1}) + 1 \wedge \mathit{Elem}(a,0) = \alpha_0(r_{s-1}) \wedge \\
&\qquad\qquad (\forall i < \tau(r_{s-1}))\,\mathit{Kifejez\acute{e}s}(\mathit{Elem}(a, i+1))\big] \vee \\
&\big[\mathit{Hossz}(a) = 3 \wedge \mathit{Elem}(a,0) = \alpha_0(=) \wedge (\forall i < 2)\,\mathit{Kifejez\acute{e}s}(\mathit{Elem}(a, i+1))\big] \vee \\
&\big[\mathit{Hossz}(a) = 3 \wedge \mathit{Elem}(a,0) = \alpha_0(\vee) \wedge (\forall i < 2)\,\mathit{Formula}(\mathit{Elem}(a, i+1))\big] \vee \\
&\big[\mathit{Hossz}(a) = 2 \wedge \mathit{Elem}(a,0) = \alpha_0(\neg) \wedge \mathit{Formula}(\mathit{Elem}(a, 1))\big] \vee \\
&\big[\mathit{Hossz}(a) = 3 \wedge \mathit{Elem}(a,0) = \alpha_0(\exists) \wedge \mathit{V\acute{a}ltoz\acute{o}}(\mathit{Elem}(a, 1)) \wedge \\
&\qquad\qquad \mathit{Formula}(\mathit{Elem}(a, 2))\big] \Big)
\end{aligned}
$$

Mivel a *Formula* reláció elemei legalább kettő hosszúságú sorozatok, azért itt is csak a reláció korábban felvett értékeire hivatkozunk, mégpedig jól láthatóan rekurzív módon. Innen a reláció rekurzivitása hasonlóan következik mint a 11.3. lemmában. ■

Mind a *Kifejezés* mind a *Formula* reláció nem üres sorozatok kódjaiból áll. De egy ilyen sorozatnak már az első eleme megmondja, melyik relációhoz tartozik. Az első esetben ez vagy változójel vagy függvényjel kódja, míg a másodikban vagy relációjel vagy a $\neg$, $\vee$, $\exists$, $=$ jelek valamelyikének kódja. Ezek szerint ez a két reláció diszjunkt. Az hogy a relációk rekurzívak többek között azt is jelenti, hogy tetszőleges természetes számról effektív módon el tudjuk dönteni, hogy egy kifejezés vagy formula Gödel-száma-e. Ennél azonban több is igaz. Ha adott egy formula (kifejezés), annak Gödel-számát mechanikusan ki tudjuk számítani. És fordítva is: egy formula Gödel-számából magát a formulát egy effektív eljárással megkaphatjuk.

Legyen $\Gamma \subset F(t)$ tetszőleges elmélet. Amint várható, $\alpha(\Gamma)$ jelöli azt a relációt, aminek elemei Γ elemeinek Gödel-számai, és Lev_Γ a Γ-ból levezethető formulák Gödel-számainak halmaza (ez utóbbi Gödel teljességi Tétele értelmében megegyezik Γ következményeivel):

$$
\begin{aligned}
\alpha(\Gamma) &= \{\alpha(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}, \\
\mathit{Lev}_\Gamma &= \{\alpha(\varphi) : \Gamma \vdash \varphi\}.
\end{aligned}
$$

11.6. Definíció A $\Gamma \subset F(t)$ elmélet *rekurzív* vagy másképpen *axiómarendszer*, ha az $\alpha(\Gamma)$ reláció rekurzív. Γ *eldönthető* ha Lev_Γ rekurzív reláció, egyébként Γ-ról azt mondjuk, hogy *eldönthetetlen*.

A Church-tézis értelmében egy Γ elmélet akkor rekurzív – vagyis axiómarendszer – ha létezik olyan eljárás, ami minden formuláról véges sok lépésben megmondja, eleme-e

Γ-nak vagy sem. Kicsit szabadabban fogalmazva, axiómarendszer az olyan elmélet, melynek elemeit pontosan ismerjük. Mivel ω véges részhalmazai rekurzívak, azért a véges elméletek egyúttal axiómarendszerek is.

Ilyen például a rendezés, a csoportok, testek, Boole algebrák axiómarendszere. Nem véges rekurzív elméletre példa az algebrailag vagy a valósan zárt testek axiómarendszere, vagy a két legfontosabb példa: a Peano axiómarendszer és a *ZFC*.

A Γ elmélet eldönthetősége pedig azt jelenti, hogy valamely effektív eljárás minden formuláról meg tudja mondani, levezethető-e az Γ-ból vagy sem. Így az ellentmondásos elméletek – függetlenül attól, hogy rekurzívak-e vagy sem – eldönthetők, hiszen azokból minden formula levezethető. Ellentmondástalan eldönthető Γ elméletre példa a végpontok nélküli sűrű rendezés elmélete. Ez ugyanis a 7.8. tétel szerint kvantoreliminálható, s a bizonyításban nem csak ezt igazoltuk, hanem egyúttal egy effektív eljárást is megadtunk, amivel tetszőleges φ formulához egy vele ekvivalens kvantorok nélküli φ' formulát kaphatunk. Most φ pontosan akkor vezethető le Γ-ból, ha lezártja levezethető, vagyis ha a φ lezártjához rendelt kvantormentes $\overline{\varphi}'$ levezethető. De ekkor $\overline{\varphi}'$ vagy azonosan igaz vagy azonosan hamis; az előző esetben φ levezethető, a másodikban nem. Ezzel egy effektív eljárást találtunk annak eldöntésére, hogy φ levezethető-e Γ-ból vagy sem, így a Church-tézis miatt Lev_Γ rekurzív, azaz Γ eldönthető. Később ezt a Church-tézisre való hivatkozás nélkül is bizonyítani fogjuk.

Végezetül a $\Gamma \subset F(t)$ elméletből való levezetésekhez is természetes számokat rendelünk. Emlékeztetünk rá, hogy formuláknak egy $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ sorozatát levezetésnek hívjuk ha minden $i < n$-re φ_i vagy logikai axióma, vagy egyenlőség axióma, vagy Γ-nak egy eleme, vagy pedig valamelyik következtetési szabály konklúziója, melynek premisszái $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$ között megtalálhatók (6.1. definíció). Logikai és egyenlőség axiómának a 6.3. definícióban szereplő A1–A5 illetve E1–E5 formulákat tekintjük, a levezetési szabályokat pedig a 6.5. definícióban adtuk meg. Egy levezetés egyúttal a formulasorozat utolsó formulájának a bizonyítása is.

A $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ levezetéshez rendelt szám, a levezetés *Gödel-száma* természetesen annak az n hosszúságú sorozatnak a kódja, melynek i-edik eleme éppen $\alpha(\varphi_i)$. Álljon a $Biz_\Gamma \subset \omega^2$ kétváltozós reláció mindazokból az $\langle a, b\rangle$ párokból, melyekre $a \in \omega$ egy levezetés kódja, $b \in \omega$ pedig a levezetés utolsó formulájának Gödel-száma:

$$\begin{aligned} Biz_\Gamma = \{ &\langle \ulcorner\langle \alpha(\varphi_0), \ldots, \alpha(\varphi_{n-1})\rangle\urcorner, \alpha(\varphi_{n-1})\rangle : \\ &\varphi_i \in F(t) \text{ és } \varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \text{ egy } \Gamma\text{-ból való levezetés}\}. \end{aligned}$$

11.7. Tétel *Tegyük fel, hogy a $\Gamma \subset F(t)$ elmélet rekurzív. Ekkor a Biz_Γ reláció is rekurzív.*

Bizonyítás Egy sor függvényt és relációt definiálunk, melyekről megmutatjuk, hogy rekurzívak. Ezekből tesszük majd össze Biz_Γ egy olyan definícióját, amiből a reláció rekurzivitása már kiolvasható.

Az elsőként definiálandó *Helyettesítve*(a, b, c) háromváltozós függvény értékét a következőképpen kaphatjuk meg. Ha a és c egy-egy kifejezés Gödel-száma, b pedig egy változójel kódja, mondjuk $a = \alpha(k')$, $b = \alpha_0(x)$ és $c = \alpha(k)$, akkor a függvényérték legyen annak a kifejezésnek a Gödel-száma, amit k'-ből úgy kapunk, hogy benne x összes előfordulását k-ra kicseréljük. Ha b és c olyan mint előbb és a egy formula Gödel-száma, mondjuk $a = \alpha(\varphi)$, akkor *Helyettesítve*(a, b, c) értéke legyen $\alpha(\varphi[x/k])$; végül az összes többi esetben ez az érték legyen 0. Mivel egy természetes szám nem lehet egyszerre egy kifejezés és egy formula Gödel-száma is, azért ezzel valóban függvényt definiáltunk.

11.8. Lemma *A Helyettesítve függvény rekurzív.*

Bizonyítás Tekintsük a függvény második és harmadik argumentumát paraméternek. Most is azt mutatjuk meg, hogy a függvény $a \in \omega$ helyen felvett értékét valamilyen rekurzív módon lehet definiálni az a-nál kisebb helyeken felvett értékeiből. A helyettesítés 3.12. definíciója valamint a kifejezések és formulák Gödel-számainak definíciója alapján ez ugyan kissé fáradságos, de semmi nehézséget nem okoz. A *Helyettesítve*(a, b, c) értékének definícióját rekurzív feltételekkel több esetre vágjuk szét, ezt a 10.5. lemma utáni megjegyzésünk értelmében tehetjük meg.

Ha az alábbi rekurzív reláció nem teljesülne:

$$\big(\mathit{Formula}(a) \vee \mathit{Kifejezés}(a)\big) \wedge \mathit{Változó}(b) \wedge \mathit{Kifejezés}(c),$$

akkor a függvény értéke legyen 0. A továbbiakban feltesszük, hogy ez a reláció igaz. Ha most *Kifejezés*(a) állna, akkor ismét több esetet különböztetünk meg. Ha $a = \alpha(x)$ valamilyen x változójelre, vagyis ha a *Változó*$(\mathit{Elem}(a, 0))$ rekurzív reláció teljesül és még $b \in \omega$ éppen az x kódja is, azaz $\mathit{Elem}(\mathit{Elem}(a, 0), 0) = b$, akkor $\mathit{Helyettesítve}(a, b, c) = c$; ha pedig a fenti érték $\neq b$, akkor a függvény értéke a.

Ha a nem egy változójel Gödel-száma, vagyis $\neg\, \mathit{Változó}(\mathit{Elem}(a, 0))$, akkor

$$a = \alpha\big(f(k_0, \dots, k_{n-1})\big) = \ulcorner\langle \alpha_0(f), \alpha(k_0), \dots, \alpha(k_{n-1})\rangle\urcorner$$

ahol $f \in t$ valamely n-változós függvényjel és $k_0, \dots, k_{n-1} \in K(t)$ kifejezések. Ekkor a függvény értékét úgy kaphatjuk meg, hogy $i < n$-re a fenti sorozatban $\alpha(k_i)$ helyébe a *Helyettesítve*$(\alpha(k_i), b, c)$ értéket tesszük. $\alpha(k_i) = \mathit{Elem}(a, i + 1) < a$ miatt ezt az értéket már tudjuk, tehát a *Helyettesítve*(a, b, c) értéke ekkor

$$\begin{aligned}&\mu u\, \big[\mathit{Sorozat}(u) \wedge \mathit{Hossz}(u) = \mathit{Hossz}(a) \wedge \mathit{Elem}(u, 0) = \mathit{Elem}(a, 0) \wedge \\ &(\forall i < \mathit{Hossz}(a \dot{-} 1))\, \mathit{Elem}(u, i + 1) = \mathit{Helyettesítve}(\mathit{Elem}(a, i + 1), b, c)\big]\,.\end{aligned}$$

A szögletes zárójelben rekurzív reláció áll és a 10.6. tétel szerint található olyan $u \in \omega$, amivel a reláció teljesül, a μ operációt joggal alkalmaztuk.

Az az eset maradt hátra, mikor a egy formula Gödel-száma, vagyis *Formula*(a) teljesül. A függvény értékét a fentihez hasonlóan lehet definiálni az eseteket aszerint megkülönböztetve, hogy a-nak az első eleme micsoda. Például ha $\mathit{Elem}(a, 0) = \alpha_0(\exists)$, akkor az $\mathit{Elem}(a, 1) = \alpha_0(y)$ és $\mathit{Elem}(a, 2) = \alpha(\varphi)$ jelölésekkel a függvényérték

$$\begin{cases} a & \text{ha } \mathit{Elem}(a, 1) = b, \\ \ulcorner\langle \alpha_0(\exists), \alpha_0(y), \mathit{Helyettesítve}(\alpha(\varphi), b, c)\rangle\urcorner & \text{egyébként} \end{cases}$$

attól függően, hogy a $(\exists y\, \varphi)[x/k]$ helyettesítésben x és y azonos vagy különböző.

Mindezeket az eseteket egy óriási méretű definícióba összeszedve a keresett felírást megkapjuk, amivel a lemmát bizonyítottuk. ∎

Következő relációnk, melynek rekurzivitását igazolni fogjuk, a kétváltozós *Szabad* $\subset \omega^2$. Ez azokból az $\langle a, b\rangle$ párokból áll, melyekre a vagy egy kifejezés vagy egy formula Gödel-száma, b egy változó kódja: $b = \alpha_0(x)$, és ha $a = \alpha(k)$, akkor x előfordul k-ban, ha pedig $a = \alpha(\varphi)$, akkor x szabadon fordul elő φ-ben. A reláció rekurzivitását úgy igazoljuk, hogy rögzített b mellett *Szabad*(a, b)-t az a-nál kisebb helyeken felvett értékeiből definiáljuk. Ezt a 3.8. definíció alapján egy kicsit szabadabb jelölésmóddal a következőképpen tehetjük meg. *Szabad*(a, b) pontosan akkor, ha a következő esetek valamelyike fennáll:

(i) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(x)\rangle\urcorner$ és $b = \alpha_0(x)$;

(ii) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(f), \alpha(k_0), \ldots, \alpha(k_{n-1}\rangle\urcorner$ és $(\exists i < \mathit{Hossz}(a) \mathbin{\dot{-}} 1)\,\mathit{Szabad}\big(\alpha(k_i), b\big)$;

(iii) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(=), \alpha(k_0), \alpha(k_1)\rangle\urcorner$ és $\mathit{Szabad}\big(\alpha(k_0), b\big) \vee \mathit{Szabad}\big(\alpha(k_1), b\big)$;

(iv) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(r), \alpha(k_0), \ldots, \alpha(k_{n-1})\rangle\urcorner$ és $\big(\exists i < \mathit{Hossz}(a) \mathbin{\dot{-}} 1\big)\,\mathit{Szabad}\big(\alpha(k_i), b\big)$;

(v) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(\vee), \alpha(\varphi_0), \alpha(\varphi_1)\rangle\urcorner$ és $\mathit{Szabad}\big(\alpha(\varphi_0), b\big) \vee \mathit{Szabad}\big(\alpha(\varphi_1), b\big)$;

(vi) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(\neg), \alpha(\varphi)\rangle\urcorner$ és $\mathit{Szabad}\big(\alpha(\varphi), b\big)$;

(vii) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(\exists), \alpha_0(y), \alpha(\varphi)\rangle\urcorner$ és $b \neq \alpha_0(y) \wedge \mathit{Szabad}(\alpha(\varphi), b)$.

Az első két sor a kifejezésekre definiálja a relációt, a következő kettő a prímformulákra, az utolsó három pedig a többire. Ezek formalizálása majd a reláció (pontosabban a karakterisztikus függvény) megfelelő definíciójának felírása s annak ellenőrzése, hogy az valóban rekurzív, nem okozhat gondot.

Álljon a *Megengedett_helyettesítés* $\subset \omega^3$ háromváltozós reláció mindazokból az $\langle\alpha(\varphi),\ \alpha_0(x),\ \alpha(k)\rangle$ hármasokból, melyekre a $\varphi[x/k]$ helyettesítés megengedett. Ennek 3.13. definíciójából a relációt a következőképpen írhatjuk fel. Az $\langle a, b, c\rangle \in \omega^3$ hármasra a reláció pontosan akkor áll, ha $\mathit{Formula}(a) \wedge \mathit{Változó}(b) \wedge \mathit{Kifejezés}(c)$, továbbá az alábbi feltételek valamelyike igaz:

(i) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(=), \alpha(k_0), \alpha(k_1)\rangle\urcorner$ vagy $a = \ulcorner\langle\alpha_0(f), \alpha(k_0), \ldots, \alpha(k_{n-1})\rangle\urcorner$;

(ii) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(\vee), \alpha(\varphi_0), \alpha(\varphi_1)\rangle\urcorner$ és
$$(\forall i < 2)\,\mathit{Megengedett\_helyettesítés}\big(\alpha(\varphi_i), b, c\big);$$

(iii) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(\neg), \alpha(\varphi)\rangle\urcorner$ és $\mathit{Megengedett\_helyettesítés}\big(\alpha(\varphi), b, c\big)$;

(iv) $a = \ulcorner\langle\alpha_0(\exists), \alpha_0(x), \alpha(\varphi)\rangle\urcorner$ és vagy $\alpha_0(x) = b$, vagy
$$\mathit{Megengedett\_helyettesítés}\big(\alpha(\varphi), b, c\big) \wedge \big(\neg\,\mathit{Szabad}(\alpha(\varphi), b) \vee \neg\,\mathit{Szabad}(c, b)\big).$$

Mivel a *Szabad* relációról már tudjuk hogy rekurzív, a felírásból adódik, hogy a *Megengedett_helyettesítés* reláció is az.

A *Logikai_axióma* $\subset \omega$ reláció mindazon formulák a Gödel-számaiból áll, melyek a 6.3. definícióban szereplő A1–A5 logikai axiómák valamelyikének példányai. Természetesen ez is rekurzív, példaként csak az A5 axióma formuláinak rekurzivitását mutatjuk meg. Ebbe a csoportba a $\varphi[x/k] \to \exists x\,\varphi$ alakú formulák tartoznak, ahol $\varphi[x/k]$ megengedett helyettesítés. Ez tulajdonképpen a $\neg(\varphi[x/k]) \vee (\exists x\,\varphi)$ formula rövidítése, és persze egy ilyen formula Gödel-számánál mind $\alpha(\varphi)$, $\alpha_0(x)$, mind $\alpha(k)$ kisebb, hiszen ezek a formula Gödel-számának (mint sorozatnak) elemeinek elemeinek ... elemei, s mikor egy sorozatról annak egy elemére térünk át, *Elem*$(a, i) \leq a \dot{-} 1$ miatt kisebb számot kapunk. Ezért $u \in \omega$ akkor és csak akkor Gödel-száma egy A5 csoportba tartozó formulának, ha

$$(\exists a < u)(\exists b < u)(\exists c < u)\big(\mathit{Formula}(a) \wedge \mathit{Változó}(b) \wedge \mathit{Kifejezés}(c) \wedge \\ \mathit{Megengedett\_helyettesítés}(a, b, c) \wedge \\ u = \ulcorner\langle\alpha_0(\vee), \ulcorner\langle\alpha_0(\neg), \mathit{Helyettesítve}(a, b, c)\rangle\urcorner, \ulcorner\langle\alpha_0(\exists), b, a\rangle\urcorner\rangle\urcorner\big).$$

Ez a reláció pedig a 10.5. lemma értelmében rekurzív.

Az *Egyenlőség_axióma* $\subset \omega$ reláció természetesen az E1–E5 egyenlőség axiómák Gödel-számaiból áll. Ennek rekurzivitása azonnal következik abból, hogy ez véges formulahalmaz, hiszen a t típusról feltettük, hogy véges.

Végezetül a *Köv_szabály* $\subset \omega^3$ háromváltozós reláció a 6.5. definícióban leírt két következtetési sémát írja le:

$$\mathit{Köv\_szabály} = \{\ulcorner\langle\alpha(\varphi \to \psi), \alpha(\varphi), \alpha(\psi)\rangle\urcorner : \varphi, \psi \in F(t)\} \cup \\ \{\ulcorner\langle\alpha(\varphi \to \psi), \alpha(\varphi \to \psi), \alpha(\exists x\, \varphi \to \psi)\rangle\urcorner : \varphi, \psi \in F(t) \text{ és} \\ x \text{ nem fordul elő szabadon } \psi\text{-ben}\}.$$

Ennek rekurzivitása ugyanúgy igazolható, mint például a *Logikai_axióma* reláció rekurzivitása.

Most már fel tudjuk írni a Biz_Γ relációnak egy olyan definícióját, amiből annak rekurzivitása közvetlenül kiolvasható. Tetszőleges a, $b \in \omega$-ra $\mathit{Biz}_\Gamma(a, b)$ akkor és csak akkor áll, ha

$$\mathit{Sorozat}(a) \wedge \mathit{Hossz}(a) \geq 1 \wedge \\ (\forall i < \mathit{Hossz}(a))\, \mathit{Formula}(\mathit{Elem}(a, i)) \wedge \\ b = \mathit{Elem}(a, \mathit{Hossz}(a) \dot{-} 1) \wedge \\ (\forall i < \mathit{Hossz}(a))\big[\\ \mathit{Logikai\_axióma}(\mathit{Elem}(a, i)) \vee \mathit{Egyenlőség\_axióma}(\mathit{Elem}(a, i)) \vee \\ \mathit{Elem}(a, i) \in \alpha(\Gamma) \vee \\ (\exists j < i)(\exists k < i)\, \mathit{Köv\_szabály}\big(\mathit{Elem}(a, j), \mathit{Elem}(a, k), \mathit{Elem}(a, i)\big)\big].$$

A 11.7. tétel kikötése az volt, hogy Γ rekurzív elmélet, azaz $\alpha(\Gamma)$ rekurzív reláció. Következésképp *Elem*$(a, i) \in \alpha(\Gamma)$ arra kérdez rá, hogy egy szám eleme-e egy rekurzív relációnak. Így a definícióban szereplő összes függvény és reláció rekurzív, tehát Biz_Γ is rekurzív. Ezzel a 11.7. tétel igazoltuk. ■

Ha a $b \in \omega$ Gödel-számú formulát le tudjuk vezetni a Γ elméletből, s a levezetés egy papírlapra fel van írva, akkor (legalábbis elvileg) semmi nehézséget nem okoz a levezetés Gödel-számát kiszámítani. Ezzel olyan $a \in \omega$ számot kapunk, amivel $\mathit{Biz}_\Gamma(a, b)$ fennáll. S fordítva, ha $\mathit{Biz}_\Gamma(a, b)$ valamilyen $a \in \omega$-ra, akkor ebből az a-ból kicsit fáradságosan ugyan, de elvi nehézség nélkül megkaphatjuk a levezetést jelentő formulasorozatot. Így ha $b = \alpha(\varphi)$, akkor $\Gamma \vdash \varphi$ pontosan akkor áll, ha van olyan $a \in \omega$ természetes szám, amire $Biz_\Gamma(a, b)$:

$$Lev_\Gamma = \{\, b \in \omega : (\exists a \in \omega\,) Biz_\Gamma(a, b)\,\}.$$

Ha $\Gamma \subset F(t)$ axiómarendszer, akkor Biz_Γ rekurzív, és ekkor a 10.5. lemma szerint tetszőleges $f(b)$ rekurzív függvényre a

$$\{\, b \in \omega : (\exists a < f(b)\,) Biz_\Gamma(a, b)\,\}$$

reláció rekurzív. Tehát Γ-ról azonnal beláttuk, hogy eldönthető, mihelyst mutattunk olyan f rekurzív függvényt, amely tetszőleges $\varphi \in F(t)$ formulára felső korlátot ad φ legrövidebb bizonyítására. Vagyis ha φ egyátalán bizonyítható Γ-ból, akkor van φ-nek olyan bizonyítása is, melynek Gödel-száma kisebb $f(\alpha(\varphi))$-nél. Ezt aknázzuk ki a következő tétel bizonyításában.

11.9. Tétel *Ha a $\Gamma \subset F(t)$ elmélet rekurzív és teljes, akkor eldönthető is.*

Bizonyítás Jelölje a $\varphi \in F(t)$ formula lezártját $\overline{\varphi}$, természetesen $\Gamma \vdash \varphi$ és $\Gamma \vdash \overline{\varphi}$ ekvivalensek. Az, hogy Γ teljes azt jelenti, hogy tetszőleges $\varphi \in F(t)$ formulára vagy $\Gamma \models \overline{\varphi}$ vagy $\Gamma \vdash \neg\overline{\varphi}$ (esetleg mindkettő, ha Γ ellentmondásos).

Legyen *Lezár* $: \omega \to \omega$ függvény az, ami tetszőleges $\varphi \in F(t)$ formula Gödel-számához $\overline{\varphi}$ Gödel-számát rendeli. Ezzel a jelöléssel $a \in Lev_\Gamma$ pontosan akkor, ha $Lezár(a) \in Lev_\Gamma$, s ez akkor, ha van olyan $u \in \omega$, amivel $Biz_\Gamma(u, Lezár(a))$.

Természetesen a *Lezár* függvény rekurzív. Legyenek ugyanis a $\varphi \in F(t)$ formula szabad változói éppen $x_0, \ldots, x_{m-1}$, akkor $\overline{\varphi}$ a következő formula:

$$\forall x_0 \ldots \forall x_{m-1}\, \varphi,$$

és ennek a Gödel-számát kell előállítanunk. Definiáljuk ehhez az $L(i, a)$ kétváltozós függvény primitív rekurzióval a következő módon:

$$L(0, a) = a$$

valamint

$$L(i+1, a) = \begin{cases} a & \text{ha } \neg\, Formula(a) \vee \neg\, Szabad(\alpha_0(x_i), a), \\ \alpha(\neg\exists x_i\, \neg\varphi) & \text{ha } Szabad(\alpha_0(x_i), a) \text{ és } a = \alpha(\varphi), \end{cases}$$

Ezek itt tényleg rekurzív függvények, hiszen $\alpha_0(x_i) = i + (4 + r + s)$ és

$$\alpha(\neg\exists x_i\, \neg\varphi) = \ulcorner\langle \alpha_0(\neg), \ulcorner\langle \alpha_0(\exists), \alpha_0(x_i), \ulcorner\langle \alpha_0(\neg), \alpha(\varphi)\rangle\urcorner\rangle\urcorner\rangle\urcorner,$$

tehát L valóban rekurzív függvény. Világos, hogy az $L(i, a)$ Gödel-számú formulának nincs i-nél kisebb indexű szabad változója, tehát ha i nagyobb mint a φ-ben előforduló változójelek indexeinek maximuma, akkor $L(i, a)$ éppen $a = \alpha(\varphi)$ lezártjának Gödel-száma. De ha x előfordul φ-ben, akkor $\alpha_0(x)$ az $\alpha(\varphi)$ valamelyik elemének elemének $\ldots$ eleme, s így $i < \alpha_0(x) < \alpha(\varphi)$, tehát felső korlátnak φ Gödel-száma megfelel. Ezért $Lezár(a) = L(a, a)$, s így *Lezár* valóban rekurzív függvény.

Visszatérve a tétel bizonyítására, különböztessünk meg két esetet. Ha Γ azért teljes, mert ellentmondásos, akkor Lev_Γ az összes t típusú formula Gödel-számából áll, és így persze rekurzív. Ha Γ ellentmondástalan és teljes, akkor minden $a \in \omega$-ra az alábbi három lehetőség közül pontosan az egyik teljesül:

(i) $\neg\, \mathit{Formula}(a)$,

(ii) $\mathit{Formula}(a) \wedge \mathit{Biz}_\Gamma(u, \mathit{Lezár}(a))$ valamely $u \in \omega$-ra,

(iii) $\mathit{Formula}(a) \wedge \mathit{Biz}_\Gamma\big(u, \ulcorner\langle \alpha_0(\neg), \mathit{Lezár}(a)\rangle\urcorner\big)$ valamely $u \in \omega$-ra.

Ezért minden $a \in \omega$-hoz található olyan $u \in \omega$, amivel az $R(a,u) = \text{(i)} \vee \text{(ii)} \vee \text{(iii)}$ reláció teljesül. Γ rekurzív elmélet, ezért Biz_Γ rekurzív reláció, tehát R is rekurzív, és így rekurzív az

$$f(a) \overset{\text{def}}{=} \mu u\, R(a,u)$$

függvény is. Ha az $a \in \omega$ Gödel-számú formula levezethető Γ-ból, akkor lezártjának van egy $f(a)$ Gödel-számú levezetése is, ezért $\mathit{Lev}_\Gamma(a)$ akkor és csak akkor, ha

$$\mathit{Formula}(a) \wedge \mathit{Biz}_\Gamma\big(f(a), \mathit{Lezár}(a)\big)\,.$$

Ez rekurzív reláció, ezért Γ eldönthető, ahogyan állítottuk. ■

11.10. Következmény *Az alábbi elméletek eldönthetők:*

(i) *végpontok nélküli sűrű rendezés,*
(ii) *kezdőponttal rendelkező, végpont nélküli diszkrét rendezés,*
(iii) *osztható torziómentes Abel-csoportok,*
(iv) *végtelen Abel-csoportok, melyben minden elem rendje egy adott p prímszám,*
(v) 0 *valamint p karakterisztikájú algebrailag zárt testek,*
(vi) *valósan zárt testek,*
(vii) *atommentes Boole algebrák.*

Bizonyítás Ezek az elméletek nyilván rekurzívak, és a 9.9. tétel szerint teljesek. ■

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az alább elméletek valóban rekurzívak (azaz axiómarendszerek): osztható torziómentes Abel-csoportok, algebrailag zárt testek, valósan zárt testek.
2. Igazoljuk, hogy a Peano axiómarendszer és a *ZFC* is rekurzív.
3. Adjunk meg olyan nem rekurzív elméletet, amely a) ellentmondástalan; b) ellentmondásos.
4. Adjunk meg olyan elméletet, amely nem rekurzív, de eldönthető. Útmutatás: legyen R egyváltozós relációjel, $\forall x\, R(x)$ eleme az elméletnek, és vegyünk az elmélethez $R(k)$ alakú formulákat különböző k kifejezésekre. Adjunk meg olyan elméletet is, ami eldönthető, de nem teljes.
5. Bizonyítsuk be, hogy az $\{\,\alpha(\varphi) : \varphi$ kvantormentes$\,\}$ valamint $\{\,\alpha(\varphi) : \varphi$ prenex alakú$\,\}$ egyváltozós relációk rekurzívak.
6.* Mutassuk meg, hogy vannak olyan rekurzív függvények, melyek minden kvantor nélküli formula Gödel számához annak egy a) diszjunktív normál formájú, b) konjunktív normál formájú ekvivalensét rendeli. Keressünk olyan rekurzív függvényt is, mely minden formula Gödel-számához annak prenex alakú ekvivalensének Gödel-számát rendeli. (Figyelmeztetés: Ha az 5.7. és 5.8. tételek bizonyításában leírt eljárást használjuk, akkor a fellépő formulák Gödel-számai növekedhetnek, így a 10.12. tétel nem alkalmazható.)
7. Adjunk meg olyan ellentmondástalan $\Gamma \subset F(t)$ elméletet, amire $\alpha(\Gamma)$ nem rekurzív, de Biz_Γ igen.

8. Keressünk olyan $f(a,b,c)$ háromváltozós rekurzív függvényt, hogy tetszőleges $\Gamma \subset F(t)$ elméletre és $\varphi,\psi \in F(t)$ formulákra ha $\mathit{Biz}_\Gamma(a,\alpha(\varphi))$, $\mathit{Biz}_\Gamma(b,\alpha(\neg\varphi))$ és $c=\alpha(\psi)$, akkor $\mathit{Biz}_\Gamma(f(a,b,c),c)$, azaz ha $a \in \omega$ a φ formula egy bizonyításának Gödel-száma, $b \in \omega$ pedig a $\neg\varphi$ formuláé, akkor $f(a,b,\alpha(\psi))$ a ψ formula egy Γ-ból való bizonyítása.

9.* Tegyük fel, hogy a $t = \langle F,R,\tau\rangle$ hasonlósági típusban minden $n \geq 0$-ra megszámlálhatóan sok n-változós függvényjel és minden $n \geq 1$-re megszámlálhatóan sok n-változós relációjel fordul elő. Legyen az i-edik n-változós függvény illetve relációjel $f_{n,i}$ és $r_{n,i}$. Tekintsük a jeleknek a következő kódolását: $\alpha_1(j) = \alpha_0(j)$ ha j a $\neg$, $\vee$, $\exists$, $=$ jelek valamelyike, továbbá

$$\alpha_1(x_i) = 3i+4, \quad \alpha_1(f_{n,i}) = 3\pi(n,i)+5, \quad \alpha_1(r_{n,i}) = 3\pi(n,i)+6$$

ahol π az előző fejezetben definiált párzó függvény. Bizonyítsuk be, hogy az összes rekurzívnak bizonyult függvény és reláció ezzel a kódolással is rekurzív lesz. Lehet-e α_1 helyett olyan kódolást választani, amivel például a *Formula* nem lesz rekurzív? Mi a helyzet ha bizonyos függvény- vagy relációjelekből csak véges sok van?