10. fejezet

Rekurzív függvények

A fejezetben kizárólag természetes számokon értelmezett függvényekkel és relációkkal dolgozunk, ezt a tényt külön nem fogjuk említeni. Az n-változós f függvényről azt mondjuk, hogy *teljes* ha értelmezési tartománya, $\mathrm{Dom}(f) = \omega^n$. Ha f-ről ezt nem kötjük ki, akkor f-et *parciális* függvénynek nevezzük. Ha egy függvényről nem mondjuk külön, hogy parciális, akkor azon mindig teljes függvényt értünk. Az ω^n elemeit nyíllal felülhúzott ki betűkkel jelöljük, így $\vec{x}$-et írunk $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ helyett. Egy n-változós parciális függvény értékkészletét $\mathrm{Range}(f)$ jelöli:

$$\mathrm{Range}(f) = \{f(\vec{x}) \in \omega : \ \vec{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Az $R \in \omega^n$ reláció *karakterisztikus függvénye* az a K_R-rel jelölt teljes függvény, amire $\mathrm{Dom}(K_R) = \omega^n$, és $\vec{a} \in \omega^n$ mellett $K_R(\vec{a}) = 0$ ha $\vec{a} \in R$ és $K_R(\vec{a}) = 1$ ha $\vec{a} \notin R$. Így például

$$K_<(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a < b, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Gyakran használjuk az $R(\vec{a})$ jelölést $\vec{a} \in R$ helyett, ilyenkor azt mondjuk, hogy $R(\vec{a})$ *igaz*, $R(\vec{a})$ teljesül; ha pedig $\vec{a} \notin R$, akkor azt, hogy $R(\vec{a})$ *hamis*. A logikai műveleti jeleket relációkra értelemszerűen használjuk, ezek egy vagy két relációból egy újabbat csinálnak. Például R, $Q \subset \omega^n$-re $\neg R = \omega^n \setminus R$, $R \vee Q = R \cup Q$, stb. Vegyük észre, hogy $\neg R$ pontosan azokra az n-esekre igaz, amikre R nem igaz; $R \vee Q$ akkor igaz, ha R vagy Q igaz.

Legyen $i < n$. Az $I_i^n : \omega^n \to \omega$ függvény értelmezési tartománya, $\mathrm{Dom}(I_i^n) = \omega^n$, és $I_i^n(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}) = x_i$ az argumentumok minden értékére. Ezt a függvényt az i-edik koordinátára való *projekciónak* nevezik. Azokat a teljes kétváltozós függvényeket, melyek argumentumaikhoz azok összegét illetve szorzatát rendelik, a $+$ illetve a $\cdot$ jelzi, és persze $+(a,b)$ helyett $(a+b)$-t, $\cdot(a,b)$ helyett $(a \cdot b)$-t vagy egyszerűen ab-t fogunk írni.

10.1. Definíció Legyen $\mathcal{R}$ a természetes számokon értelmezett teljes függvényeknek az a legszűkebb részhalmaza, melyre az alábbi három feltétel teljesül. $\mathcal{R}$ elemeit nevezzük *rekurzív függvényeknek.*

(i) $I_i^n \in \mathcal{R}$ minden $n \in \omega$-ra és $i < n$-re, továbbá
$K_< \in \mathcal{R}$, $+ \in \mathcal{R}$, és $\cdot \in \mathcal{R}$.

(ii) Ha az m-változós $g(y_0, \ldots, y_{m-1})$ valamint $i < m$-re az n-változós $h_i(\vec{x})$ függvények mind elemei $\mathcal{R}$-nek, akkor a belőlük helyettesítéssel adódó n-változós $f(\vec{x}) = g\big(h_0(\vec{x}), \ldots, h_{m-1}(\vec{x})\big)$ függvény ugyancsak eleme $\mathcal{R}$-nek.

(iii) Ha az $n+1$-változós $g(\vec{x},u)$ eleme $\mathcal{R}$-nek, továbbá minden $\vec{x}\in\omega^n$-hez található olyan $u\in\omega$ amivel $g(\vec{x},u)=0$, akkor az a függvény, mely minden $\vec{x}$-hez a legkisebb ilyen u-t rendeli: $\mu u\,\big(g(\vec{x},u)=0\big)\stackrel{\text{def}}{=}\min\{u\in\omega:\ g(\vec{x},u)=0\}$ ugyancsak eleme $\mathcal{R}$-nek.

Világos, hogy $\mathcal{R}$ elemeit az (i) alatti alapfüggvényekből az (ii)-beli *helyettesítés* és az (iii)-ben definiált *μ-operáció* véges sokszori alkalmazásával kaphatjuk meg. Így rekurzív függvényekre egy állítást úgy bizonyíthatunk, hogy belátjuk azt az alapfüggvényekre, továbbá megmutatjuk, hogy megőrződik az (ii) és (iii) alatti operációkra Ennek alapján könnyű meggyőződni például arról, hogy a rekurzív függvények *kiszámíthatók*, vagyis minden rekurzív függvényhez megadható olyan „mechanikus” eljárás, amely tetszőleges argumentumra megadja a függvény értékét. Az alapfüggvényekre ez nyilván igaz. Ha most $g:\omega^m\to\omega$ és $i<m$-re $h_i:\omega^n\to\omega$ kiszámítható függvények, akkor a belőlük helyettesítéssel kapott függvény is az: adott $\vec{x}=\langle x_0,\dots,x_{n-1}\rangle$ argumentumra először kiszámítjuk az $y_i=h_i(\vec{x})$ értéket, majd pedig $g(y_0,\dots,y_{m-1})$ értéket. Végül $\mu u\,\big(g(\vec{x},u)=0\big)$ értéket adott $\vec{x}$-re úgy számíthatjuk ki, hogy sorban kiszámítjuk a $g(\vec{x},0)$, $g(\vec{x},1)$, $g(\vec{x},2)$, $\dots$ értékeket – ezeket g-re tett indukciós föltevésünk alapján meg tudjuk tenni –, s az első $u\in\omega$, amire $g(\vec{x},u)=0$, lesz a függvény értéke. Az (iii)-ben tett kikötés biztosítja, hogy ez az eljárás véges sok lépésben biztosan véget ér.

Minden rekurzív függvény kiszámítható, most számos intuitíve kiszámíthatónak tekintett függvényről megmutatjuk, hogy rekurzív. Ezt azzal kezdjük, hogy $\mathcal{R}$-ről egy sor apró állítást bizonyítunk, melyeket később minden hivatkozás nélkül fogunk használni.

Először is felhívjuk a figyelmet arra, hogy az a kétváltozós függvény, ami két argumentumához azok összegét rendeli, az a háromváltozós, mely értékül az első és második argumentumának összegét veszi fel, valamint az a háromváltozós függvény, melynek értéke a második és a harmadik változó összege, három különöző függvény. Így minden esetben pontosan meg kellene mondani, mik az argumentumok és mi a sorrendjük. Annak oka, hogy ezt mégsem tesszük a következő: $\mathcal{R}$-beli függvény argumentumait tetszőlegesen cserélgethetjük illetve bővíthetjük új változójelekkel, továbbra is $\mathcal{R}$-beli függvényt kapunk. Valóban, ha $f(x_0,\dots,x_{m-1})\in\mathcal{R}$, $n\le m$ és $i_0,\dots,i_{n-1}$ a $0,1,\dots,n-1$ indexek valamilyen permutációja, akkor a $g(x_0,\dots,x_{n-1})=f(x_{i_0},\dots,x_{i_{m-1}})$ függvény is rekurzív, hiszen $\vec{x}\in\omega^n$-re

$$g(\vec{x})=f(I^n_{i_0}(\vec{x}),\dots,I^n_{i_{m-1}}(\vec{x})),$$

azaz g helyettesítéssel áll elő f-ből és az ugyancsak $\mathcal{R}$-beli $I^n_{i_j}$ projekciófüggvényekből.

10.2. Definíció Az $R\subset\omega^n$ reláció *rekurzív*, ha karakterisztikus függvénye,

$$K_R=\begin{cases}0 & \text{ha } \vec{x}\in R,\\ 1 & \text{egyébként}\end{cases}$$

rekurzív függvény.

Mivel a rekurzív függvények zártak a helyettesítésre, ezért ha $R\subset\omega^m$ rekurzív reláció, $g_0,\ \dots,\ g_{m-1}$ pedig n-változós rekurzív függvények, akkor az $R\big(g_0(\vec{x}),\ \dots,\ g_{m-1}(\vec{x})\big)\subset\omega^n$ reláció is rekurzív.

10.3. Lemma *Legyen $P(\vec{x}, u) \subset \omega^{n+1}$ rekurzív reláció és tegyük fel, hogy minden $\vec{x} \in \omega^n$-hez van olyan $u \in \omega$, amire $P(\vec{x}, u)$. Ekkor a*

$$\mu u\, P(\vec{x}, u) = \min \{u \in \omega :\ \langle \vec{x}, u \rangle \in P\}$$

függvény rekurzív.

Bizonyítás Az, hogy a $P(\vec{x}, u)$ reláció rekurzív, azt jelenti, hogy K_P karakterisztikus függvénye rekurzív. De ekkor

$$\mu u\, P(\vec{x}, u) = \{\min\ u \in \omega :\ K_P(\vec{x}, u) = 0\,\}. \qquad \blacksquare$$

Legyen $n \geq 1$-re F_k^n az az n-változós függvény, mely az argumentumok értékétől függetlenül a $k \in \omega$ értéket veszi fel. Állítjuk, hogy $F_k^n \in \mathcal{R}$, ezt k-ra vonatkozó indukcióval látjuk be. Először is

$$F_0^n(\vec{x}) = \mu u\ \left(I_n^{n+1}(\vec{x}, u) = 0\right).$$

Itt a jobb oldalon szereplő függvény a 10.1. definíció értelmében $\mathcal{R}$-beli, így valóban $F_0^n \in \mathcal{R}$. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \in \omega$-ra már tudjuk, hogy $F_k^n \in \mathcal{R}$. Ekkor az $F_k^n(\vec{x}) < u$ reláció $K_< \in \mathcal{R}$ miatt rekurzív, következésképp

$$F_{k+1}^n(\vec{x}) = \mu u\ \left(F_k^n(\vec{x}) < u\right)$$

rekurzív függvény, hiszen minden $\vec{x}$-hez van olyan $u \in \omega$ (nevezetesen $u = k+1$), amire az itt álló reláció teljesül.

Az ω elemeit azonosíthatjuk a megfelelő sok-változós F_k^n függvényekkel, így ezeket rekurzív függvényekbe és relációkba beírva továbbra is rekurzívakat kapunk. Így például $k \in \omega$-ra a $\{0, 1, \ldots, k-1\} \subset \omega$ rekurzív reláció, mert karakterisztikus függvénye $K_<(x, k) = K_<\big(x, F_k^1(x)\big)$, és ez utóbbi tényleg rekurzív.

10.4. Lemma *Tegyük fel, hogy $P, Q \subset \omega^n$ rekurzív relációk. Ekkor rekurzívok a következő relációk is: $\neg P\, (= \omega^n - P)$, $P \vee Q\, (= P \cup Q)$, $P \wedge Q\, (= P \cap Q)$ stb.*

Bizonyítás Azt kell belátnunk, hogy ezek karakterisztikus függvénye rekurzív, és ezt is nyilván elég az első kettőre. Ezek viszont

$$\begin{aligned} K_{\neg P} &= \begin{cases} 0 & \text{ha } \neg P(\vec{x}) \\ 1 & \text{ha } P(\vec{x}) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{ha } K_P(\vec{x}) = 1 \\ 1 & \text{ha } K_P(\vec{x}) = 0 \end{cases} \\ &= K_<\big(0, K_P(\vec{x})\big) = K_<\big(F_0^n(\vec{x}), K_P(\vec{x})\big); \end{aligned}$$

és

$$K_{P \vee Q}(\vec{x}) = \left.\begin{cases} 0 & \text{ha } K_P(\vec{x}) = 0 \text{ vagy } K_Q(\vec{x}) = 0 \\ 1 & \text{ha } K_P(\vec{x}) = 1 \text{ és } K_Q(\vec{x}) = 1 \end{cases}\right\} = K_P(\vec{x}) \cdot K_Q(\vec{x}).$$

A jobb oldalon szereplő függvények a feltételek és az előbbiek alapján rekurzívak, a lemmát bizonyítottuk. $\blacksquare$

Innen már könnyen adódik, hogy a $<, \leq, =, \neq, \geq, >$ kétváltozós relációk is mind rekurzívak. Ezek közül a $<$ definíció szerint az, azután

$$K_{>}(a,b) = K_{<}(b,a) = K_{<}\left(I_1^2(a,b), I_0^2(a,b)\right).$$

A jobb oldali függvény rekurzív, tehát $K_{>}$ is az. A többi esetre a 10.4. lemmát használjuk a következő ekvivalens átírásokkal:

$$\begin{array}{ll} u \leq v \Leftrightarrow \neg(u > v), & u \geq v \Leftrightarrow \neg(u < v) \\ u \neq v \Leftrightarrow (u < v) \vee (u > v), & u = v \Leftrightarrow \neg(u \neq v). \end{array}$$

A 10.4. lemma egy másik következménye, hogy a véges relációk és azok komplementerei is mind rekurzívak. Ezt persze elég az egyelemű relációkra belátni, mert a véges relációk ilyenekből a $\vee$ művelettel állíthatók elő, azok komplementerei pedig negálással. Az alábbi n-változós, a korábban mondottak szerint rekurzív reláció pedig az egyetlen $\vec{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$ elemből áll:

$$I_0^n(\vec{x}) = F_{a_0}^n(\vec{x}) \wedge I_1^n(\vec{x}) = F_{a_1}^n(\vec{x}) \wedge \dots \wedge I_{n-1}^n(\vec{x}) = F_{a_{n-1}}^n(\vec{x}).$$

Legyen $P(\vec{x}, u) \subset \omega^{n+1}$ tetszőleges reláció, és legyen az $(n+1)$-változós, $\vec{x}$-től és v-től függő $(\mu u < v)P(\vec{x}, u)$ függvény értéke az $\langle \vec{x}, v\rangle \in \omega^{n+1}$ helyen az a legkisebb $u < v$, amire $P(\vec{x}, u)$ igaz, feltéve, hogy ilyen u van, egyébként pedig v:

$$(\mu u < v)P(\vec{x}, u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \min\{u < v : \ P(\vec{x}, u)\} & \text{ha van ilyen,} \\ v & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Definiáljuk még a $(\exists u < v)P(\vec{x}, u)$ valamint $(\forall u < v)P(\vec{x}, u)$ $(n+1)$-változós relációkat a következőképpen. Az $(\vec{x}, u) \in \omega^{n+1}$ eleme az első relációnak, ha van olyan $u < v$, amire $P(\vec{x}, u)$ igaz, és eleme a másodiknak, ha minden $u < v$-re $P(\vec{x}, u)$ fennáll.

10.5. Lemma *Tegyük fel, hogy $P(\vec{x}, u) \subset \omega^{n+1}$ rekurzív reláció. Ekkor $(\mu u < v)$ $P(\vec{x}, u)$ rekurzív függvény, $(\exists u < v)P(\vec{x}, u)$ valamint $(\forall u < v)P(\vec{x}, u)$ rekurzív relációk.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy

$$(\mu u < v)P(\vec{x}, u) = \mu u \ \left(P(\vec{x}, u) \vee u = v\right).$$

Itt $P(\vec{x}, u) \vee u = v$ rekurzív reláció, és persze minden $(\vec{x}, v) \in \omega^{n+1}$-hez található olyan $u \in \omega$, amire ez teljesül. Így a 10.3. lemma szerint $(\mu u < v)P(\vec{x}, u)$ valóban rekurzív függvény. De ekkor a

$$\begin{gathered} (\exists u < v)P(\vec{x}, u) \Leftrightarrow (\mu u < v)P(\vec{x}, u) < v \\ (\forall u < v)P(\vec{x}, u) \Leftrightarrow (\mu u < v)\neg P(\vec{x}, u) = v \end{gathered}$$

ekvivalenciák miatt a relációk is rekurzívak. ■

Rekurzív függvényben illetve relációban tetszőleges argumentum helyébe rekurzív függvényt téve továbbra is rekurzív függvényt illetve relációt kapunk. Így van ez az

$$f(\vec{x}, v) = (\mu u < v) P(\vec{x}, u)$$

esetén is. Ha v-t helyettesítjük az $(n+1)$-változós rekurzív $g(\vec{x}, v)$-vel, akkor az adódó rekurzív $f(\vec{x}, g(\vec{x}, v))$ függvényt úgy rövidítjük, hogy

$$\big(\mu u < g(\vec{x}, v)\big)\ P(\vec{x}, u),$$

és $\big(\mu u \leq g(\vec{x}, u)\big)\ P(\vec{x}, u)$-t írunk $\big(\mu u < g(\vec{x}, v) + 1\big)\ P(\vec{x}, u)$ helyett. Hasonló értelemben használjuk a $\big(\exists u \leq g(\vec{x}, v)\big)\ P(\vec{x}, u)$ stb. jelöléseket is.

Végül még egy operációt mutatunk be, ami rekurzív függvényekből rekurzív függvényt, rekurzív relációkból pedig rekurzív relációt csinál: az esetszétválasztással történő definíciót. Legyenek $P_0, \ldots, P_{r-1}$ olyan n-változós rekurzív relációk, hogy minden $\vec{x} \in \omega^n$-re pontosan egy teljesüljön közülük. Legyenek még $f_0, \ldots, f_{r-1}$ n-változós rekurzív függvények és $Q_0, \ldots, Q_{r-1}$ n-változós rekurzív relációk. Ekkor az

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} f_0(\vec{x}), & \text{ha } P_0(\vec{x}), \\ \vdots & \\ f_{r-1}(\vec{x}), & \text{ha } P_{r-1}(\vec{x}) \end{cases}$$

n-változós függvény is rekurzív, valamint a

$$Q(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} Q_0(\vec{x}), & \text{ha } P_0(\vec{x}), \\ \vdots & \\ Q_{r-1}(\vec{x}), & \text{ha } P_{r-1}(\vec{x}) \end{cases}$$

n-változós reláció is rekurzív. Valóban, az első következik abból, hogy

$$f(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) \cdot K_{\neg P_0}(\vec{x}) + \ldots + f_{r-1}(\vec{x}) \cdot K_{\neg P_{r-1}}(\vec{x}),$$

míg a második abból, hogy

$$K_Q(\vec{x}) = K_{Q_0}(\vec{x}) \cdot K_{\neg P_0}(\vec{x}) + \ldots + K_{Q_{r-1}}(\vec{x}) \cdot K_{\neg P_{r-1}}(\vec{x}).$$

Az eddig felsorakoztatott fegyverzetünkkel már egy sor függvényről és relációról be tudjuk látni, hogy rekurzívak. Lássunk néhány példát!

• A kivonás művelete kivezet a természetes számok köréből, ezért helyette a következő függvényt szokás használni:

$$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b & \text{ha } a \geq b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Hogy ez rekurzív, rögtön adódik abból, hogy

$$a \dot{-} b = \mu u\ \big[a < b \vee (b + u = a)\big]\,.$$

a szögletes zárójelben álló (nyilván rekurzív) reláció olyan, hogy bármely a, b párra található olyan $u \in \omega$, amire teljesül.

• Az „osztójának lenni” kétváltozós reláció azokból az $\langle a, b\rangle \in \omega^2$ párokból áll, melyekben a osztója b-nek. Az alábbi ekvivalencia szerint ez is rekurzív:

$$a|b \Leftrightarrow (\exists u \leq b)(a \cdot u = b).$$

• Egy szám négyzetgyökének egész részét szolgáltató függvény is rekurzív, hiszen

$$[\sqrt{a}] = (\mu u \leq a)(u \cdot u + 1 > a).$$

• Ugyanígy két szám hányadosának egész részét megadó kétváltozós függvényre

$$\left[\frac{a}{b}\right] = (\mu u \leq a)(b = 0 \vee b \cdot (u + 1) > a).$$

Vegyük észre, hogy ha $b = 0$, akkor az a értékétől függetlenül a kifejezés értéke is nulla.

• Az „osztás maradéka” kétváltozós függvény is rekurzív:

$$\text{rem}\,(a, b) = a \dot{-} (b \cdot \left[\frac{a}{b}\right]),$$

és persze a maradékra $\text{rem}\,(a, b) \leq a$ mindig teljesül.

Definiáljuk az a, b számokból alkotott $\pi(a, b)$ „rendezett párt” a következőképpen:

$$\pi(a, b) = (a + b + 1)^2 + a.$$

Ez a kétváltozós függvény nyilván rekurzív, ami kevésbé nyilvánvaló, hogy tényleg rendezett párként viselkedik, azaz $\pi(a, b) = \pi(c, d)$ esetén $a = c$ és $b = d$. Valóban, ha $a + b = c + d$ és $\pi(a, b) = \pi(c, d)$, akkor persze $a = c$ és ebből $b = d$ is következik. Ha pedig mondjuk $a + b < c + d$, akkor

$$(a+b+1)^2+a < (a+b+1)^2+a+b+1 \leq (c+d)^2+(c+d) < (c+d+1)^2 \leq (c+d+1)^2+c$$

és így $\pi(a, b) < \pi(c, d)$, egyenlők nem lehetnek.

Legyenek még a K és L egyváltozós függvények a következők:

$$K(a) = a \dot{-} [\sqrt{a}]^2, \qquad L(a) = [\sqrt{a}] \dot{-} K(a) \dot{-} 1.$$

Ezek persze rekurzívak, és könnyen láthatóan a rendezett pár inverz függvényei: tetszőleges a, $b \in \omega$-ra

$$K\big(\pi(a, b)\big) = a, \qquad L\big(\pi(a, b)\big) = b.$$

Ezen kívül még a következő könnyen ellenőrizhető tulajdonságuk is megvan:

$$K(a) \leq a \dot{-} 1, \quad L(a) \leq a \dot{-} 1.$$

Az ún. *Gödel-féle β függvény* az alábbi kétváltozós függvény:

$$\beta(a, i) = \text{rem}\left(K(a), 1 + (i + 1) \cdot L(a)\right).$$

A korábban mondottak szerint ez rekurzív, és $\beta(a, i) \leq K(a) \leq a \dot{-} 1$ minden a, $i \in \omega$ számra.

10.6. Tétel (Gödel) *Minden $n \in \omega$-ra és $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ sorozathoz van olyan $a \in \omega$, melyre*

$$\beta(a,0) = n \quad \textit{és} \quad \beta(a,i) = a_{i-1}, \;\; i = 1,2,\ldots,n.$$

Bizonyítás Legyen $b \in \omega$ olyan természetes szám, ami nagyobb mindegyik a_i-nél, osztható az 1, 2, ..., n számok mindegyikével; legyen továbbá $b_i = 1 + (i+1)\cdot b$. Ekkor $i < j \leq n$ esetén b_i és b_j relatív prímek. Ha ugyanis egy p prímszám mindkettőnek osztója volna, akkor

$$p|(b_j - b_i) = (j-i)\cdot b$$

alapján p vagy $(j-i)$-nek, vagy b-nek is osztója volna. De $j - i \leq n$ és így b választása miatt $(j-i)|b$, következésképp $p|(j-i)$ esetén $p|b$ is fennáll. Tehát p mindenképpen osztója b-nek, és ezért osztója $b_i - (i+1)\cdot b = 1$-nek is, ami lehetetlen.

Ezzel igazoltuk, hogy a b_0, b_1, ..., b_n számok páronként relatív prímek. A kínai maradéktétel értelmében ekkor van a következő szimultán kongruenciarendszernek megoldása:

$$\begin{aligned}
x &\equiv n \pmod{b_0}\\
x &\equiv a_0 \pmod{b_1}\\
&\vdots\\
x &\equiv a_{n-1} \pmod{b_n}.
\end{aligned}$$

A b-t úgy választottuk, hogy a jobb oldalak mind kisebbek legyenek a megfelelő modulusoknál, így azok x-nek a modulusokkal való osztásakor adódó maradékai. Ha tehát x a kongruenciarendszer tetszőleges megoldása, akkor az $a = \pi(x,b)$ rendezett párra a tétel feltételei tejesülnek. ∎

A tétel feltételeit kielégítő $a \in \omega$ számok közül a minimálisat az $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ sorozat *kódjának* vagy *Gödel-számának* nevezzük, és $\ulcorner\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle\urcorner$-ként jelöljük. Definiáljuk most a *Hossz* egyváltozós, az *Elem* kétváltozós függvényt valamint a *Sorozat* egyváltozós relációt a következőképpen:

$$\begin{aligned}
\mathit{Hossz}(a) &= \beta(a,0)\\
\mathit{Elem}(a,i) &= \beta(a,i+1)\\
\mathit{Sorozat}(a) &\Leftrightarrow a = (\mu u < a)\,\big[\mathit{Hossz}(a) = \mathit{Hossz}(u) \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad \big(\forall i < \mathit{Hossz}(a)\big)\,\mathit{Elem}(a,i) = \mathit{Elem}(u,i)\big]\,.
\end{aligned}$$

Ezek mind rekurzívak, és persze $\mathit{Elem}(a,i) \leq a \dot{-} 1$ minden a, $i \in \omega$-ra. Megállapodunk még abban, hogy a nulla hosszúságú, azaz üres sorozat Gödel-számának a 0-t tekintjük, erre mindenesetre $\mathit{Hossz}(0) = 0$ teljesül.

Legyen egy sorozat Gödel-száma mondjuk $a \in \omega$. Annak a sorozatnak a Gödel-számát, amit az a sorozatból egy tetszőleges $z \in \omega$ hozzáfűzésével kapunk, így jelöljük: $a \frown z$. A 10.6. tétel egyik legfontosabb következménye, hogy ez a kétváltozós függvény is rekurzív.

10.7. Tétel *Az $a \frown z$ kétváltozós függvény rekurzív.*

Bizonyítás Jelöljük az alábbi rekurzív relációt $P(a,z,b)$-vel:

$$\begin{aligned}&\mathit{Sorozat}(b) \wedge \mathit{Hossz}(b) = 1 + \mathit{Hossz}(a) \wedge \\ &\quad \big(\forall i < \mathit{Hossz}(a)\big)\, \mathit{Elem}(a,i) = \mathit{Elem}(b,i) \wedge \mathit{Elem}\big(b, \mathit{Hossz}(a)\big) = z.\end{aligned}$$

A 10.6. tétel szerint minden a-hoz és z-hez található (mégpedig egyértelműen) olyan $b \in \omega$, amivel $P(a,z,b)$ fennáll; ekkor viszont a 10.4. lemma szerint $\mu b\, P(a,z,b) = a \frown z$ rekurzív függvény. ■

10.8. Következmény *Minden $n \in \omega$-ra az a függvény, ami $\vec{x} \in \omega^n$-hez az $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ sorozat kódját rendeli, rekurzív.*

Bizonyítás Az $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ sorozat kódja nem más, mint

$$(\ldots((0 \frown x_0) \frown x_1) \frown \ldots) \frown x_{n-1},$$

ez mint rekurzív függvények kompozíciója maga is rekurzív. ■

A továbbiakban a *Hossz* és *Elem* függvényekről nem fogjuk kihasználni, hogy hogyan is definiáltuk őket, hanem csak azt, hogy rekurzívak és teljesül rájuk a 10.7. tétel. Sorozatok Gödel-számozása hatékony és igen erős eszköz, a következőkben gyakran építünk erre. Bemelegítésként igazoljuk, hogy a hatványfüggvény rekurzív.

10.9. Példa A 2^n függvény rekurzív.

Bizonyítás Legyen $R(x,u)$ a következő kétváltozós reláció:

$$\mathit{Hossz}(u) = x + 1 \wedge \mathit{Elem}(u,0) = 1 \wedge (\forall i < x)\big(\mathit{Elem}(u,i+1) = 2 \cdot \mathit{Elem}(u,i)\big)\,.$$

A felírásból nyilvánvaló, hogy $R(x,u)$ rekurzív, a feltétel azt mondja ki, hogy u olyan $x+1$ hosszúságú kódja, melynek első tagja 1, minden további tag pedig a megelőzőnek kétszerese. A 10.7. tétel szerint $R(0, 0 \frown 1)$ igaz, hiszen $\mathit{Hossz}(0) = 0$, így $0 \frown 1$ olyan egy hosszúságú sorozat kódja, amelynek egyetlen eleme az egy. Ha valamilyen $x \geq 0$-ra már találtunk olyan $u \in \omega$-t, amivel $R(x,u)$ fennáll, akkor $(x+1)$-hez jó az a sorozat, amit u-ból úgy kapunk, hogy utolsó elemének kétszeresét hozzáfűzzük: $R\big(x+1, u \frown 2 \cdot \mathit{Elem}(u,x)\big)$. Innen teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $x \in \omega$-hoz van olyan $u \in \omega$, amivel $R(x,u)$ igaz, és ekkor a 10.3. lemma alapján az

$$f(x) = \mathit{Elem}\big(\mu u\, R(x,u), x\big)$$

rekurzív függvény. Erre az R reláció definíciója szerint $f(0) = 1$ és $f(x+1) = 2 \cdot f(x)$ minden x-re, így valóban $f(x) = 2^x$ rekurzív függvény. ■

10.10. Példa Legyen p_n az n-dik prímszám: $p_0 = 2$, $p_1 = 3$ stb. Ekkor az $f(n) = p_n$ függvény rekurzív.

Bizonyítás Az előző példában bemutatott módszert követjük. Állítsa az $R(x,u)$ reláció azt, hogy az u $x+1$ hosszúságú sorozatban az egymás utáni prímek állnak. Az, hogy egy szám prím-e, a

$$\mathit{Prím}(x) \Leftrightarrow x \geq 2 \wedge (\forall i < x\,)(i|x \rightarrow i \leq 1)$$

felírásából láthatóan rekurzív. Így például, a következő definíció megfelelő R-et ad:

$$\mathit{Hossz}(u) = x+1 \wedge \mathit{Elem}(u,0) = 2 \wedge$$
$$(\forall i < x\,)\left[\mathit{Prím}\left(\mathit{Elem}(u,i+1)\right) \wedge \left(\forall s < \mathit{Elem}(u,i+1)\,\right)\left(\mathit{Prím}(s) \rightarrow s \leq \mathit{Elem}(u,i)\right)\right].$$

A szögletes zárójelben álló második feltétel azt mondja ki, hogy nincsen prím a sorozat i-edik és $i+1$-edik tagja között. R persze rekurzív reláció, és minden számnál van nagyobb prím, ezért a $p_n = \mathit{Elem}\left(\mu u\, R(n,u), n\right)$ valóban rekurzív. ■

A példánkban szereplő eljárás általában is működik. Legyenek $g : \omega^n \rightarrow \omega$ és $h : \omega^{2+n} \rightarrow \omega$ tetszőleges függvények. Azt mondjuk, hogy az $n+1$ változós f függvényt *primitív rekurzióval* kaptuk g-ből és h-ból, ha

$$f(0,\vec{y}) = g(\vec{y}),$$
$$f(x+1,\vec{y}) = h\left(f(x,\vec{y}), x, \vec{y}\right).$$

Ezzel a két feltétel f-et egyértelműen meghatározza.

10.11. Tétel *Legyenek g és h rekurzív függvények. Ekkor a belőlük primitív rekurzióval definiált függvény is rekurzív.*

Bizonyítás Legyen $R(x,\vec{y},u) \subset \omega^{1+n+1}$ a következő reláció:

$$\mathit{Hossz}(u) = x+1 \wedge \mathit{Elem}(u,0) = g(\vec{y}) \wedge$$
$$(\forall i < x\,)\,\mathit{Elem}(u,i+1) = h\left(\mathit{Elem}(u,i,\vec{y})\right).$$

Ez nyilván rekurzív, továbbá x-re vonatkozó indukcióval láthatjuk, hogy minden x és $\vec{y}$-hoz van u, amire $R(x,\vec{y},u)$ igaz. Így az

$$f(x,\vec{y}) = \mathit{Elem}\left(\mu u\, R(x,\vec{y},u), x\right)$$

is rekurzív. ■

Sokkal általánosabb „rekurzív függvénydefiníciók” sem vezetnek ki $\mathcal{R}$-ből. Kicsit pongyolán fogalmazva, ha egy függvény vagy reláció $u \in \omega$ helyen felvett értékét nem csak a közvetlenül megelőző, hanem az összes korábban felvett értékeiből határozzuk meg (persze rekurzív módon), akkor az adódó függvény vagy reláció szintén rekurzív lesz. A precízebb megfogalmazáshoz legyen $f(u,\vec{x})$ tetszőleges $(n+1)$-változós függvény, $\tilde{f}(u,\vec{x})$ jelöli az $\langle f(0,\vec{x}), f(1,\vec{x}), \ldots, f(u-1,\vec{x})\rangle$ u hosszúságú sorozat kódját. Persze $\tilde{f}(0,\vec{x}) = 0$ hiszen az üres sorozat kódja 0. Az is világos, hogy $\tilde{f}$-ot primitív rekurzióval kaphatjuk meg f-ből és az egymás után fűzés műveletéből.

$$\tilde{f}(0,\vec{x}) = 0,$$
$$\tilde{f}(u+1,\vec{x}) = \tilde{f}(u,\vec{x}) ^\frown f(u,\vec{x}).$$

Így ha f rekurzív, $\tilde{f}$ is az az előző tétel alapján.

10.12. Tétel *Legyen* $g : \omega^{2+n} \to \omega$ *rekurzív függvény,* $f : \omega^{1+n} \to \omega$ *pedig olyan* $(n+1)$*-változós függvény, hogy minden* $u \in \omega$*-ra*

$$(*) \qquad f(u, \vec{x}) = g\big(\tilde{f}(u, \vec{x}), u, \vec{x}\big)\,.$$

Ekkor f *rekurzív.*

Bizonyítás Elsőként megjegyezzük, hogy adott g-re pontosan egy olyan f függvény létezik, amire $(*)$ teljesül. Valóban, $\tilde{f}(0, \vec{x}) = 0$ függetlenül $\vec{x}$ értékétől, így $(*)$ miatt $f(0, \vec{x}) = g(0, 0, \vec{x})$. Innen $\tilde{f}(1, \vec{x})$ értékét tudjuk, ami nem más mint $0 \frown f(0, \vec{x})$, s így $f(1, \vec{x}) = g\big(\tilde{f}(1, \vec{x}), 1, \vec{x}\big)$ is ismert stb. A tétel ezek szerint azt mondja, hogy ez a függvény rekurzív lesz. Vegyük észre, hogy $\tilde{f}$-ot most is tudjuk primitív rekurzióval definiálni:

$$\tilde{f}(0, \vec{x}) = 0,$$
$$\tilde{f}(u+1, \vec{x}) = \tilde{f}(u, \vec{x}) \frown g\left(\tilde{f}(u, \vec{x}), u, \vec{x}\right).$$

Feltevés szerint g rekurzív, azért a 10.11. tétel szerint $\tilde{f}$ is rekurzív. de ekkor

$$f(u, \vec{x}) = \mathit{Elem}\left(\tilde{f}(u+1, \vec{x}), u\right)$$

alapján f is rekurzív, amit állítottunk. ■

A teljes $f : \omega^n \to \omega$ függvényt „effektíve kiszámíthatónak” nevezzük, ha van valamiféle mechanikus eljárás arra, hogyan kell tetszőleges $\vec{x} \in \omega^n$ argumentumra az $f(\vec{x})$ értékét meghatározni. „Mechanikus eljárás” alatt olyan módszert értünk, amit minden gondolkodás, ötlet, töprengés nélkül végre lehet hajtani. Ilyen például a tízes számrendszerben felírt számok összeadására vagy szorzására szolgáló eljárás, vagy kevésbé triviális példaként a nem-negatív egészek legnagyobb közös osztóját megkereső euklideszi algoritmus. Intuitíve világos, hogy ezek valóban egy-egy effektíve kiszámítható függvényt definiálnak, és általában is ez a helyzet, mikor leírjuk egy függvény kiszámítására szolgáló eljárásunkat.

Egyre-másra kerültek elő azonban olyan függvények, melyekre nem sikerült kiszámító eljárást találni, s felmerült a gyanú, hogy azért nem, mert ilyen nincs is. Ezt viszont csak azután lehet bizonyítani, miután pontosan definiáltuk, mit is értünk effektív kiszámíthatóság alatt. Az elmúlt fél évszázadban a kiszámítható függvényeknek sok, alapvetően különböző definícióját adták meg. Kiderült, hogy ezek mind ugyanazt a függvényosztályt, a rekurzív függvények osztályát határozták meg. Ezen felül mindazok a függvények, melyeket valamilyen értelemben kiszámíthatónak tekintettek, $\mathcal{R}$-belinek bizonyultak. Ezért indokoltnak látszik az alábbi állítás:

Az effektíve kiszámítható függvények azonosak a rekurzív függvényekkel.

Ezt a kijelentést elsőként *Alonzo Church* fogalmazta meg még a 30-as évek végén, ezért Church-tézis néven ismert. Bizonyítani természetesen nem tudjuk, hiszen ahhoz előbb azt kellene definiálnunk, mit is értünk „effektíve kiszámíthatóság” alatt. A Church-tézis nem matematikai állítás, hanem tapasztalati tény, s jelentősége éppen abban van, hogy egy fontos intuitív fogalomnak precíz matematikai értelmet ad.

A rekurzív függvények elmélete a 30-as években alakult ki és indult fejlődésnek többek között *K. Gödel*, *A. Church*, *S. Kleene*, *A. Turing* munkássága nyomán. Ugyancsak ennek a diszciplinának voltak világhírű képviselői *Kalmár László* és *Péter Rózsa*.

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy megszámlálhatóan sok rekurzív függvény van.
2. Mutassuk meg, hogy van olyan $h : \omega \to \omega$, ami minden egyváltozós rekurzív függvényt majorál, azaz tetszőleges $f \in \mathcal{R}$-hez van olyan $n_0 \in \omega$, hogy $n > n_0$ esetén $f(n) < h(n)$.
3. Rekurzív-e az alábbi függvény:
$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{ha van olyan } u\text{-nál nagyobb } p \text{ prím, amire } p+2 \text{ is prímszám,} \\ & \qquad \text{vagyis van } u\text{-nál nagyobb ikerprím;} \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
4. Bizonyítsuk be, hogy egy rekurzív függvény értékét véges sok helyen megváltoztatva továbbra is rekurzív függvényt kapunk.
5. Igazoljuk, hogy az n-változós $f : \omega^n \to \omega$ akkor és csak akkor rekurzív, ha az egyváltozós
$$f\left(K(x), KL(x), KLL(x), \dots, KL^{n-1}(x)\right) \in \mathcal{R}.$$
6. Álljon az $R \subset \omega^2$ reláció azokból az $\langle a, b\rangle$ párokból, melyek első tagja olyan $\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$ sorozatnak a kódja, amire az $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ polinomnak a pár második tagja, vagyis b gyöke. Igazoljuk, hogy R rekurzív.
7. Álljon $Q \subset \omega$ azoknak az $\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$ sorozatoknak a kódjaiból, amikre az $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ polinomnak van egész gyöke. Igazoljuk, hogy Q rekurzív.
8.* Definiáljuk az F_0, F_1, F_2, stb függvényeket a következőképpen. $F_0(k) = k^k$, $F_1(k) = F_0(\dots F_0(k)\dots)$ (k darab F_0 függvény), általában $F_{n+1}(k) = F_n(\dots F_n(k)\dots)$ ahol az F_n függvényt öszesen k-szor iteráljuk. Legyen még $F(k) = F_k(k)$. Becsüljük meg $F(5)$ értékét. Bizonyítsuk be, hogy $F(x)$ rekurzív függvény.