1. fejezet

Bevezetés

Az egyik, legszélesebb körben elfogadott meghatározás szerint a logika a gondolkodás törvényszerűségeit, módszereit vizsgálja, vagyis azt, mi módon, hogyan következtetünk bizonyos állításokból másokra. Ezekben a vizsgálatokban a fő hangsúly nem az állítások konkrét tartalmán, hanem azok formai viszonyain van. Az alábbi példa jól illusztrálja, hogy ez az elvonatkoztatás jogos, egy–egy következtetés helyességét nem a benne szereplő fogalmak értelme, sokkal inkább szerkezete, struktúrája határozza meg.

(i) A pő mindegegy ha vildagár.
(ii) A bégahúr pő, és most éppen vildagár.

(iii) Következésképp ez a bégahúr most mindegegy.

A „pő," „mindegegy," „vildagár" és „bégahúr" szavak* jelentésétől függetlenül (feltéve persze, hogy a mondatok nyelvtanilag helyesek) a fenti okoskodást helyesnek érezzük. Ez azt jelenti, hogy bármit helyettesítünk ezeknek a szavaknak a helyébe (a szófaji megkötöttségeket figyelembe véve), *ha* (i) és (ii) igaz, *akkor* (iii) is teljesül. Tehát nem egyedi, egyetlen alkalomra szóló következtetéssel állunk szemben, hanem általános *sémával* vagy *szabállyal*, melyből helyettesítéssel egy sor helyes következtetést kaphatunk.

A logika egyik feladata éppen az ilyen (helyes) következtetési sémák formalizálása, összegyűjtése és rendszerezése. Ha ehhez elsősorban matematikai módszereket használ és főleg „matematikai" vagyis a matematikában előforduló következtetések, bizonyítások leírására szorítkozik, akkor nagyjából körülírtuk, mi is a „matematikai logika" tárgya.

Bár a következtetési módszerek helyes alkalmazása minden tudományág alapvető követelménye, a logikai módszerek matematikai elemzése egészen a múlt század közepéig váratott magára. Addig a logikát egyértelműen a filozófia kizárólagos részének tekintették, s a következtetési szabályok összefoglaló rendszerét, melyet még Arisztotelész állított össze, oly tökéletesnek tartották, hogy közel 2000 évig semmit sem fűztek hozzá. Csak a XVII. században *G. W. Leibniz* vetette fel a logika modernizálásának gondolatát, de tervei megvalósulatlanok maradtak. A XIX. század derekán a nem-euklideszi geometriák megjelenése, valamint az analízis (a „végtelen kis mennyiségek analízise") megnyugtató megalapozására tett kísérletek újból előtérbe hozták a logikai módszerek tanulmányozását (*G. Boole*, *A. deMorgan* és mások). Ezek azonban mindaddig periférikus jelenségek maradtak, míg a századfordulón elő nem kerültek a matematikai világot alapjaiban megrázó *paradoxonok*, vagyis olyan következtetések, melyek ellentmondásra vezetnek. Ezek nagyjából két csoportra oszthatók. Az első csoport paradoxonjai az akkor ki-

* Lásd *Karinthy Frigyes*: *Mint vélgaban* c. írását

alakult „naiv” halmazelmélet fogalmainak ellentmondásosságát mutatták; a másikba tartozók pedig általában matematikai definíciók, következtetési szabályok hézagjaira hívták föl a figyelmet. Lássunk néhányat ez utóbbi csoportból.

(i) (*A hazug paradoxona*) Egy ember azt állítja: „én most hazudok.” Hazudik-e az illető vagy sem? Ha igen, akkor amit állít, nem igaz, vagyis nem hazudik. Ha viszont nem hazudik, akkor állítása igaz, tehát hazudik. Tehát hazudik is, meg nem is.

A paradoxon emlékeztet a jól ismert „hazug krétai” paradoxonjára. A krétai Epimenidész egyszer kiállt a piac közepére és világgá kürtölte: „Minden krétai hazudik!” Ha igaz volna, amit mondott, akkor lévén ő is krétai, ő is hazudna, tehát nem mondott volna igazat. Így amit állított nem igaz — következtetésképp van olyan krétai, aki nem hazudik. Bár ez logikailag nem lehetetlen, így tulajdonképpen ez nem is paradoxon, mégis meglepő, hogy Epimenidész hamis állításából egy igazmondó krétai létezésére lehessen következtetni.

(ii) (*Richard 1905*) Vannak bizonyos magyar nyelvű mondatok, amelyek egy-egy valós számot definiálnak. Ilyen például a következő: „a kör kerületének és átmérőjének hányadosa,” ami a π számot adja meg. A magyar nyelv mondatait (értelmeset és értelmetlent, kimondhatót és kimondhatatlant egyaránt) fel lehet sorolni például úgy, hogy először az egy jelből, majd a kettőből, háromból stb. állókat írjuk le, azután egy csoporton belül a sorozatokat ábc-be rendezzük. Ebből a felsorolásból vegyük ki mindazokat, melyek valós számot definiálnak. Legyen az n-edik Richard-szám az, amit a kivettek közül az n-edik definiál. Tekintsük a következő meghatározást: „az a valós szám, mely 0 és 1 közé esik, továbbá az n-edik tizedesjegye 1, ha az n-edik Richard-szám n-edik jegye nem 1 és az n-edik tizedesjegye 2, ha az n-edik Richard-szám n-edik jegye 1.” Ez nyilván egy valós számot definiál, tehát ez valahányadik Richard-szám is, mondjuk a k-adik. Ám a definíció szerint ez a k-adik jegyben különbözik a k-adik Richard-számtól.

(iii) (*Berry 1906*) Csak véges sok, legfeljebb 100 írásjellel leírható mondat van, így ezek között is csak véges sok olyan található, ami egy természetes számot határoz meg. Így van olyan természetes szám, ami nem definiálható 100 írásjelnél kevesebbel (a betűközöket is beleértve), és az ilyen számok között van legkisebb is. Nézzük a következő definíciót: „A legkisebb, legfeljebb száz írásjellel (a betűközt is beleértve) nem definiálható természetes szám.” Ez a fenti számot definiálja és száznál kevesebb írásjelet tartalmaz.

(iv) (*Grelling 1908*) Egy jelzőről azt mondjuk, hogy *autologikus*, ha a jelző által mondott tulajdonság, magára a jelzőre is fennáll, és *heterologikus*, ha nem. Így például a „magyar” vagy „vegyeshangrendű” szavak autologikusak, a „kék,” „angol” vagy „egyszótagú” szavak heterologikusak. Nézzük most a „heterologikus” jelzőt. Ha ez heterologikus, akkor saját magára igazat mond, tehát autologikus; ha pedig autologikus, akkor saját magára nem mond igazat, tehát heterologikus. Mindenesetre a „heterologikus” egyszerre heterologikus is meg nem is.

Bár ezek a paradoxonok nem a szokásos matematikai közegről (egész, valós vagy komplex számok, függvények, görbék stb.) szólnak, az ellentmondásra vezető szituáció nagyon is matematikai. Ha a mesterkélt szituációt valamilyen „valódi” matematikai rendszerben utánozni lehetne, az is ellentmondásos és így használhatatlan lenne! A paradoxonok elkerülésének egyik módja, hogy körülbástyázzuk azokat a lehetőségeket, ahogyan egy új fogalmat definiálni lehet. Ezzel elérhetjük, hogy olyan önmagukra (is) utaló definíciókat, melyek fentebb ellentmondásra vezettek, egyszerűen nem lehet felírni. Ennek megvalósításához elsőként a fogalmak, állítások, bizonyítások leírására egy formalizmust kellett kialakítani. Az első, igaz még visszhangtalan kisérlet, *G. Frege*-től származik. Az a formalizmus, ami a mai matematikát jellemzi, már a századforduló idején, *G. Peano*, *B. Russell*, *A. N. Whitehead* és mások munkássága nyomán jött létre. Ugyanakkor hirdette meg programját *D. Hilbert* a matematika alapjainak lerakásáról, ami szerint „az így létrehozott formalizmussal írjuk le a matematikát (vagy mutassuk meg, hogy leírható minden matematikai állítás, bizonyítás), és igazoljuk, hogy ezen a formális rendszeren belül már nem juthatunk ellentmondásra.” Russell és Whitehead nagy művükben, a *Principia mathematica*-ban (1910-1913) Hilbert programjának jelentős részét megvalósítják és az ellentmondástalanságot is tudják igazolni bizonyos speciális esetekben. Már úgy tünt, csak a pontot kell feltenni az i-re, mikor egy fiatal osztrák matematikus, *K. Gödel* egy váratlan tétellel állt elő: az ellentmondástalanságot a formális rendszer saját eszközeivel nem lehet bizonyítani (ez Gödel II. nem-teljességi tétele). Ezt követően vált *K. Gödel*, *A. Tarski*, *A. Church*, *S. C. Kleene* és sok más kiváló matematikus munkája nyomán a matematikai logika a matematika egy önálló ágává.

A matematikai logika tehát a matematikai okoskodásokat, következtetéseket és definíciókat vizsgálja. Ezek leírására egy speciális nyelv fejlődött ki, amely a hétköznapi beszélt nyelvnek, különleges szókapcsolatoknak és formuláknak keveréke, melyet minden gyakorló matematikus „beszél.” Ám még ebben is hemzsegnek a (beszélt nyelvből örökölt) kivételek és kétértelműségek, szórendi kötöttségek és főleg kötetlenségek, melyek nehézzé, néha egyenesen lehetetlenné teszik egy-egy mondat pontos jelentésének, a mondatban foglalt logikai állítás formájának, vázának megkeresését. Célunk azonban nem is ennek a nyelvnek, hanem kizárólag az „okoskodásnak” a vizsgálata. Ezért olyan „abszolút formális” nyelvet fogunk megadni, melyben az „okoskodások” leírhatók, de a nyelv szerkezete egyszerű, mondatai könnyen és főleg egyértelműen elemezhetők. Ez a nyelv szigorú nyelvtani szabályaival és kötött jelentésével természetesen nem adhatja vissza a „matematikai nyelv” nem túl gazdag értelmi–érzelmi árnyalatait sem. De a tapasztalat azt mutatja, hogy egy matematikai állítás, bizonyítás csak akkor tekinthető valóban állításnak vagy bizonyításnak, ha lefordítható erre a nyelvre, azaz ha *formalizálható*. Ez persze nem jelenti azt, hogy a fordítást el is kellene végzeni. A formális nyelv nem az emberi szemnek és értelemnek készült, hanem hasznos segédeszköz arra, hogy a „matematikai bizonyítás” fogalmát matematikai módszerekkel kezelni tudjuk. Egy kicsit is bonyolultabb tétel bizonyítását abszolút formalizálva márcsak helyszűke miatt sem lehetne leírni, az olyan óriási méretű volna. Nem szólva arról, hogy az érthetetlen, kusza jelsorozatban az „ötletek” összekeverednek a technikai részletekkel, elrejtőznek közöttük. Ilyen bizonyítás olvasója legfeljebb ellenőrizheti, s nem *megértheti* a bizonyítást.

A matematikai logika a matematika egészének része. Ha eltekintünk attól, hogy tárgyának mi is az intuitív tartalma (mint ahogyan számelméleti bizonyításoknál is elfeledkezünk arról, hogy a számok tulajdonképpen kavicshalmazok), akkor egy formalizált nyelv marad vissza, melynek különféle tulajdonságait vizsgáljuk. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a matematikai logika nem indul „tiszta lappal,” hanem a matematika egyéb ágainak – különösen az algebra, halmazelmélet és számelmélet – módszereit, tételeit felhasználja.

Ugyanakkor a matematikai logika mégiscsak a matematikai bizonyításokkal foglalkozik. Így használható arra is, hogy saját bizonyítási módszereit, következtetéseit vizsgáljuk vele. Erre azonban csak az elmélet egy részének kiépítése után van lehetőség, hiszen ha nem tudom, miről fogok beszélni, akkor arról sem tudok beszélni, hogy miről fogok beszélni.

Végezetül néhány szót kell ejtenünk arról is, hogy mi *nem* a matematikai logika. Minthogy része a matematika egészének, matematikai módszereket, bizonyításokat használ, ezért nem azonos a filozófia logikájával. Eredete és céljai, módszerei mind a matematikában gyökereznek. Ezen felül tételei nem csak a matematika megalapozásánál használhatók, hanem a matematika sok más ágában, például az algebrában, topológiában, halmazelméletben, nem szólva a számítógéptudományról. A tételek is matematikai és nem filozófiai jellegűek, bár kár volna tagadni egyes tételek jelentős filozófiai vonatkozásait. Persze különböző filozófiai pártállásból esetleg homlokegyenest ellenkező filozófiai következtetések is levonhatók ugyanabból a tételből, ami nem változtat annak *matematikai* igazságán: ha ez meg az a feltétel teljesül, akkor ez meg az igaz is.

A matematikai logika nem azonos „gondolkodtató," „logikai" feladatok gyűjteményével sem, noha ezek megoldásához egy sor segédeszközt tud rendelkezésre bocsátani. Hasonlóan ahhoz, ahogyan a számelmélet, algebra vagy geometria sem gyakorló példák összessége. Végül a matematikai logika nem foglalkozik azzal sem, hogyan lehet egy leírt vagy kimondott állítást formalizálni, hogyan lehet egy bizonyítást megérteni vagy új bizonyításokat „kitalálni." Az, hogy tulajdonképpen mi is a matematikai logika, egyetlen mondatba összesűrítve jobb híján így fogalmazható meg: matematikai logika az, amivel ennek a könyvnek a hátralevő részében foglalkozunk.