Kiegészítés a halmazelméleti anyaghoz

Definíció T egy *Aronszajn-fa*, ha ω_1 magas, minden szintje megszámlálható és nincs benne ω_1 hosszú ág.

Tétel *Létezik Aronszajn-fa.*

Biz. A fát indukcióval építjük fel. A fa minden csúcsába egy racionális számot írunk úgy, hogy egy ágon felfelé menve ezek a számok nőjenek. Ezzel garantáljuk azt, hogy a fában nincs ω_1 hosszú ág, hiszen az ág minden csúcsához más racionális számot írtunk.

A fa "emeleteit" egyeséve építjük fel. Tegyük fel, hogy a fa már az α-adik szintig elkészült és most akarjuk az α-adik szintet rátenni. Feltesszük még, hogy a fa az alábbi feltételeket is teljesíti:

(i) Minden eddigi szint megszámlálható, tehát az egész fa is megszámlálható.

(ii) Minden csúcshoz egy racionális számot írtuk úgy, hogy ha c-hez írt szám q, akkor a c fölötti csúcsokhoz q-nál nagyobb számokat írtunk.

(iii) Ha a c csúcs a β-adik szinten van és hozzá a q számot írtuk, akkor minden $\beta < \gamma < \alpha$ szintre és $q < r$ racionális számra a c csúcsból fel tudunk menni a γ-adik szinten egy olyan d csúcsba, ahová r-et írtunk.

Ha most α rákövetkező, vagyis az eddig megkonstruált fának van "teteje", akkor a legfelső szinten minden csúcsra ráteszünk megszámlálható sok új csúcsot, és azokat a csúcshoz írt racionális számnál nagyobb racionális számokkal megcimkézzük. Ezzel a fenti indukciós feltételek továbbra is teljesülnek.

Ha pedig α limesz, akkor vegyük sorra az eddig elkészített fa összes csúcsát. Mondjuk ez a csúcs c és a hozzá írt szám q. Most vegyünk az összes lehetséges módon egy q-nál nagyobb r racionális számot. c fölött az α-adik emeleten teszünk egy csúcsot, amihez az r számot írjuk. Ezt megtehetjük, mert válasszunk egy q-nál nagyobb racionális számokból álló, szigorúan növő és r-hez tartó r_n sorozatot, valamint egy α-hoz tartó α_n rendszámsorozatot. Válasszunk c fölött az α_1 szinten olyan csúcsot, amihez írt szám r_1 (az indukciós feltevés szerint ilyen van). Majd c_1 fölött az α_2-edik szinten olyan c_2 csúcsot, amihez írt szám r_2, stb. Végül a c, $c_1, \ldots,$ csúcsok által meghatározott ág tetejére tegyünk fel az α-adik szinten egy pontot.

Mivel az α-adik szint alatt megszámlálható sok csúcs volt, és minden csúcshoz megszámlálható sok másikat rendeltünk az α-adik szinten, azért az α-adik szintre is megszámlálható sok csúcs került. A többi indukciós feltétel is nyilván teljesül. ∎

Definíció A λ számosság *gyengén kompakt* ha $\lambda \to (\lambda)^2_2$.

Állítás *Ha λ gyengén kompakt, akkor erősen elérhetetlen.*

Biz. Ha $\mathrm{cf}(\lambda) = \mu < \lambda$, akkor legyen $\lambda = \sum_{\xi<\mu} \lambda_x i$, ahol $\lambda_x i < \lambda$. Legyen α és β szine 0 ha ugyanabba az intervallumba esnek, és 1 ha különbözőbe. Minden 0 színben homogén halmaz számossága λ_ξ, és minden 1 színben homogén halmaz számossága μ.

Ha $\kappa < \lambda$ és $2^\kappa \geq \lambda$, akkor $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$ miatt 2^κ párjait, és így λ párjait is lehet úgy színezni, hogy ne legyen benne κ-s homogén, és így λ-s homogén sem lehet. ∎

Állítás *Ha λ gyengén kompakt, akkor nincs κ-Aronszajn fa.*

Biz. Legyen T egy ellenpélda, azaz T egy λ magas fa amiben minden szint λ-nál kisebb, és nincs benne végig ág. Rendezzük a fa csúcsait minden szinten tetszőlegesen, továbbá definiáljunk a T fa teljes ágain egy rendezést a következőképpen: ha a b és c ágak az α-adik szinten válnak el, akkor b kisebb mint c ha az $\alpha+1$-edik szinten levő pontjaik közül az ezen a szinten érvényes rendezés szerint a b-hez tartozó csúcs a kisebb. (Ezt hívják a fa préselésének – squash.) Mivel T-nek λ teljes ága van, így kapunk egy λ számosságú halmazon egy teljes rendezést, amiben nincs sem λ-s növő, sem λ-s csökkenő sorozat.

Tegyük fel ugyanis, hogy b_α mondjuk egy λ-s növő, ebből definiálunk egy λ hosszú ágat T-ben. Tegyük fel hogy már definiáltuk T-beli csúcsok egy növő c_ξ sorozatát úgy, hogy minden ξ-hez van olyan β_ξ, hogy $\alpha > \beta_\xi$ esetén a b_α ág átmegy c_ξ-n. Most a $\xi+1$-edik szinten λ-nál kevesebb csúcs van, és a β_ξ-nél nagyobb indexű ágak erre a szintre eső pontjai egy (nem feltétlenül monoton) sorozatot határoznak meg. A sorozatnak kell maximális elemének lennie, egyébként egy λ-val kofinális részt adnának (pedig λ reguláris). A maximális elemen az ágak közül egy végszelet megy át. Ha pedig ξ limesz, akkor a korábbi $\{c_\eta : \eta < \xi\}$ csúcsokhoz tartozó β_η indexek szuprémumával mondhatjuk el a fenti gondolatmenetet.

Másrészt megmutatjuk, hogy minden λ-s rendezésben van vagy λ-s növő vagy λ-s csökkenő. Legyen ez a rendezés $<$, és legyen $\succ$ az alaphalmaz egy jólrendezése. Legyen az (α, β) pár színe 0 ha a kétféle rendezésben ugyanúgy vannak rendezve, és 1 egyébként. Egy λ-s homogén a $<$ rendezésben vagy egy λ-s csökkenő (ha 1 színű) vagy egy λ-s növő (ha az 0 színű) részt ad meg. ■

Állítás *Legyen $\lambda > \omega$ reguláris és $n \in \omega$-ra f_n olyan függvények, melyek λ véges részeihez rendelnek λ-beli elemet. Ekkor van olyan $C \subset \lambda$ kof. zárt, hogy minden $\alpha \in C$ zárt az összes f_n függvényre.*

Biz. Álljon $C \subset \lambda$ az összes olyan $\alpha < \lambda$ rendszámból, ami zárt az összes f_n függvényre. Először is C zárt. Valóban, ha c_ξ egy növő C-beli elemekből álló sorozat és limesze $c < \lambda$, akkor a c is zárt az összes f_n-re. Ha kiveszünk véges sok c-nél kisebb argumentumot, akkor azok már valamennyien egy c_ξ-nél is kisebbek, tehát az ezen a helyen felvett f_n értékek is kisebbek c_ξ-nél, tehát c-nél is.

Másrészt C kofinális. Ha adott α_0, akkor nézzük az összes f_n értékét az α_0-nál kisebb helyeken. Ezekből λ-nál kevesebb van, λ reguláris, ezért a függvényértékek korlátosak, mondjuk mind kisebb mint α_1. Most ha az argumentumokat csak α_1 alatt vesszük, a függvényértékek minden α_2 alatt maradnak, stb. Végül legyen α az α_i sorozat limesze, ez zárt mindegyik f_n-re. ■

Definíció Az $S \subset \lambda$ halmaz *nem tükröző*, ha S stacionárius, de minden $\alpha < \lambda$ limesz rendszámra $S \cap \alpha$ nem stacionárius.

Tétel (Stevo Todorčević, 1984) *Tegyük fel, hogy $\lambda > \omega$ reguláris és van $S \subset \lambda$ nem tükröző halmaz. Ekkor $\lambda \not\to (\lambda)^2_\lambda$.*

Biz. Feltehetjük, hogy $0 \notin S$. Minden $\alpha < \lambda$ limesz rendszámhoz a feltétel szerint van olyan C_α (α-ban) kofinális zárt halmaz, hogy $C_\alpha \cap S = \emptyset$. Ezek segítségével definiáljuk minden $\alpha < \beta < \lambda$-ra a β-ból α-ba menő sétát a következőképpen.

Definíció A séta kezdőpontja $\beta_0 = \beta$, és tegyük fel, hogy már eljutottunk az $\alpha < \beta_i$ pontba. Ha

- Ha β_i rákövetkező, akkor *lépünk* a közvetlenül megelőző rendszámba; ilyenkor a séta bal oldali eleme a 0.
- Ha β_i limesz, akkor *ugrunk*. Ha $\alpha \in C_{\beta_i}$, akkor a séta következő és egyben utolsó eleme α. Ha nem, akkor megkeressük a C_{β_i} (kof. zárt) sorozatban azt az intervallumot, amely α-t tartalmazza. Ennek jobb oldali vége lesz β_{i+1}, bal oldali vége pedig a "bal oldali" elem.

Egy β-ból induló séta szigorúan csökkenő rendszámokon megy át, mindig α fölött marad, és csak α-ban fejeződik be. Mivel rendszámoknak nincs végtelen csökkenő sorozata, azért minden séta véges. A séta *hossza* az a természetes szám, ami megmondja, hogy hányadik lépésben érünk β-ból α-ba.

Most a séta néhány elemi tulajdonságát soroljuk fel.

Állítás *Ha $\xi \in S$, akkor egy séta folyamán ξ-be csak lépéssel $\xi + 1$-ből juthatunk el.*

Biz. Valóban, hiszen ekkor $\xi \notin C_{\beta_i}$. ■

Állítás *Ha az β-ból α-ba való séta első n lépésénél a bal oldalak $b_0, \ldots, b_{n-1}$, továbbá ε kisebb mint α de nagyobb mint az összes b_i, akkor β-ból ε-ba való séta első n lépése ugyanaz.*

Biz. Definíció szerint ilyenkor α és ε a C_{β_i} sorozatnak mindig ugyanabba az intervallumába esik. ■

Állítás *Legyen $\varepsilon < \alpha$ és nagyobb, mint az β-ból α-ba való séta bal oldalainak maximuma. Ha még $\alpha \notin S$, akkor β-ból ε-be menő séta átmegy α-n is.*

Biz. Az előzőek szerint a $\beta \to \varepsilon$ séta α előtt megegyzik a $\beta \to \alpha$ sétával. Láttuk, hogy α-ba csak lépni lehet, tehát a $\beta \to \alpha$ séta utolsó előtti pontja $\alpha + 1$, ezért a $\beta \to \varepsilon$ sétának is pontja $\alpha + 1$. ■

Ezek után definiáljuk a $d : [\lambda]^2 \to \lambda$ szinezést, ami mutatni fogja, hogy $\lambda \not\to (\lambda)^2_\lambda$, azaz λ-nak nincs λ számosságú homogén része. Ennél erősebbet igazolunk: λ-nak minden λ számosságú A részhalmazában *minden* szinnek elő kell fordulnia.

Legyen tehát $\beta' < \beta$ két λ-nál kisebb rendszám, meg akarjuk tudni, mi lesz ennek a párnak a színe. Solovay tétele értelmében az S stacionárius halmaz felbomlik λ darab diszjunkt S_ξ stacionárius halmaz uniójára, ezt a felbontást rögzítjük.

Tekintsük a β-ból β'-be menő sétát, legyen α ennek egy (közbülső), mondjuk k-adik eleme. Most α *jó*, ha a séta első $k-1$ bal oldali elemének maximumát ε-nal jelölve a β-ból ε-ba menő séta első $k-1$ bal oldali eleme és a β'-ből ε-ba menő séta első $k-1$ bal oldali eleme megegyezik (persze ez megegyezik a β-ból β'-be menő séta első $k-1$ bal oldali elemével).

Ha a sétának nincs jó eleme, akkor legyen a (β', β) pár színe 0. Ha van jó eleme, akkor nézzük a sétában legutolsó (azaz legkisebb) jó elemet, legyen ez α. Ha $\alpha \in S_\xi$ valamilyen $\xi < \lambda$ értékkel, akkor legyen $d(\beta', \beta) = \xi$, egyébként (azaz ha $\alpha \notin S$) legyen ismét $d(\beta', \beta) = 0$.

Legyen tehát $A \subset \lambda$ egy λ számosságú halmaz és $\xi \in \lambda$ adott, keresnünk kell A-ban két β' és β elemeket, melyek színe éppen ξ. Ehhez definiálunk két tulajdonságot.

Definíció Azt mondjuk, hogy az $\langle c_1, \ldots, c_n, y, x\rangle$ rendezett $(n+2)$-es Φ tulajdonságú, ha x eleme A-nak, az x-ből y-ba menő séta pontosan n hosszú, és a séta bal oldali elemei rendre $c_1, \ldots, c_n$.
Azt mondjuk, hogy a $\langle c_1, \ldots, c_n, y\rangle$ rendezett $(n+1)$-es Ψ tulajdonságú, ha a λ-nak az $\{x \in \lambda : \Phi(c_1, \ldots, c_n, y, x)\}$ részhalmaza nem korlátos λ-ban.

Definiálunk még négy függvényt is:

$$f(c_1, \ldots, c_n, y, \gamma) = \begin{cases} \min\{x \in A : x > \gamma \text{ és } \Phi(c_1, \ldots, c_n, y, x)\} & \text{ha van ilyen } x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f^*(c_1, \ldots, c_n, y) = \begin{cases} \sup\{x \in A : x > y \text{ és } \Phi(c_1, \ldots, c_n, y, x)\} & \text{ha ez korlátos } \lambda\text{-ban} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$g(c_1, \ldots, c_n, \gamma) = \begin{cases} \min\{y \in \lambda : y > \gamma \text{ és } \Psi(c_1, \ldots, c_n, y)\} & \text{ha van ilyen } y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$g^*(c_1, \ldots, c_n) = \begin{cases} \sup\{y \in \lambda : \Psi(c_1, \ldots, c_n, y)\} & \text{ha ez korlátos } \lambda\text{-ban} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Előző megjegyzésünk szerint van olyan $C \subset \lambda$ kof. zárt halmaz, hogy ennek minden eleme zárt az f, f^*, g és g^* függvényekre, továbbá az $\alpha \mapsto \alpha \dot{+} 1$ függvényre is. Vegyük észre, hogy ez utóbbi feltétel miatt C elemei mind limeszpontok. Mivel S_ξ stacionárius halmaz volt, azért van $\alpha \in C \cap S_\xi$. Mivel C kofinális, van α-nál nagyobb eleme, mondjuk η, és mivel A λ számosságú, azért van A-nak η-nál nagyobb eleme, legyen ez β.

Tekintsük a β-ból α-ba menő sétát. Legyen ez éppen n hosszú, és a séta bal oldali elemei legyenek $\overline{c} = \langle c_1, \ldots, c_n\rangle$. Most $\Phi(\overline{c}, \alpha, x)$ azt jelenti, hogy az x-ből α-ba menő séta pontosan n hosszú és bal oldali elemeit $\overline{c}$ adja meg: $c_1, \ldots, c_n$.

Tudjuk, hogy $c_1, \ldots, c_n$ valamint α kisebb mint η, ami zárt az f^* függvényre. Így ha nincs akármilyen nagy $x \in A$, amiből α-ba sétálva a séta bal oldala éppen $\overline{c}$, akkor az ilyen x-ekre $f^*(\overline{c}, \alpha) < \eta$ felső korlát, vagyis ilyen x egyátalán nincs η fölött. Ám az általunk választott β nagyobb mint η, vagyis a megfelelő x-ek nem korlátosak, ezért $\Psi(\overline{c}, \alpha)$ teljesül.

Ha most $g^*(\overline{c})$ nem nulla, akkor lévén mindegyik $c_i < \alpha$ és α zárt g^*-ra, az értéke is kisebb α-nál. Ekkor viszont nem lehet olyan $y \geq \alpha$, amire $\Psi(\overline{c}, y)$ állna – noha láttuk, hogy $\Psi(\overline{c}, \alpha)$ igaz. Így $g^*(\overline{c}) = 0$, vagyis $g(\overline{c}, \gamma)$ soha nem 0. Legyen $\max\{c_1, \ldots, c_n\} = \varepsilon < \alpha$. Mivel α zárt a g függvényre is, ezért például $\alpha' = g(\overline{c}, \varepsilon) < \alpha$, és ezzel $\Psi(\overline{c}, \alpha')$. Ez pedig azt jelenti, hogy az $f(\overline{c}, \alpha', \gamma)$ függvény soha nem nulla; mindig ad egy olyan értéket, hogy onnan α'-be sétálva a bal oldal éppen $\overline{c}$.

Az α-hoz tartozó C_α kof. zárt halmaznak vegyünk egy α'-nél nagyobb γ elemét, és legyen $\beta' = f(\overline{c}, \alpha', \gamma)$. Ez azt teszi, hogy $\beta' < \alpha$, $\beta' \in A$ és a β'-ből α'-be menő séta szintén n hosszú és bal oldali elemei $\overline{c} = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$.

Vannak tehát a $\overline{c} \leq \varepsilon < \alpha' < \gamma < \beta' < \alpha < \beta$ rendszámaink, és β' és β egyarán A-beli. Az állítjuk hogy a $(\beta', beta)$ pár színe éppen ξ, amivel Todorčevič tételét igazoltuk.

Először is $\alpha \notin S$ miatt α eleme a β-ból β'-be menő sétának. α ennek a sétának "jó" eleme, hiszen a $\beta \to \alpha$ séta bal oldali elemeinek maximuma éppen ε, és a $\beta \to \varepsilon$ valamint $\beta' \to \varepsilon$ séta első n bal oldali eleme megyezik (hiszen ezek ugyanazok, mint a $\beta \to \alpha$ illetve $\beta' \to \alpha'$ bal oldali elemei). Továbbá $\alpha \in S_\xi$, tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy a $\beta \to \beta'$ sétának nincs α utáni (azaz α-nál kisebb) jó eleme. A séta α utáni elemét úgy kapjuk, hogy C_α-nak megkeressük a β'-t tartalmazó legszűkebb intervallumát. Mivel $\gamma \in C_\alpha$, azért ennek az intervallumnak a bal oldala biztosan $\geq$ mint γ, és így a bal oldalak maximuma, amit most ε' jelöl, szintén $\geq \gamma > \alpha'$. Most a $\beta \to \varepsilon'$ séta első n bal oldali eleme persze még mindig $\overline{c} = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$. A $\beta' \to \varepsilon'$ séta első n bal oldali eleme között viszont lesz α'-nél nagyobb is, nevezetesen akkor, mikor a $\beta' \to \alpha'$ séta átmegy ε' fölött. Ekkor ugyanis a $\beta' \to \varepsilon'$ séta következő elemének kiszámításakor az ε'-t tartalmazó legszűkebb intervallum alsó végpontja az α'-t tartalmazó intervallum *felső* végpontjánál lesz nagyobb vagy egyenlő (illetve ha lépünk, akkor a séta itt véget is érne). Ez mutatja, hogy a $\beta \to \beta'$ sétának tényleg nincs α utáni jó eleme, amivel a tételt bizonyítottuk. ■

Vizsga tematika

1. Számosságműveletek definíciói, tulajdonságok (36)
2. Jólrendezett halmazok tulajdonságai, rendszámok definíciója; a rendszámok osztálya jólrendezett (50)
3. Transzfinit indukció és rekurzió tételek (77)
4. A kiválasztási axióma és ekvivalensei (80)
5. Kőnig tétele, hatványozás tulajdonságai, hatványfüggvény ÁKH esetén (104)
6. Kofinalitás definíciója, ekvivalensei. Hausdorff tétel (95–101)
7. Kof. zárt és stacionárius halmazok definíciója, stac halmazon regresszív függvény konstans egy stac részen (Neumer tétele)
8. κ^+-on minden stac halmaz felbonlik κ diszjunkt stac uniójára (Solovay tétel speciális esete) (164)
9. Δ-rendszeres tétel (170)
10. Ramsey-tétel: $\omega \to (\omega)^k_r$ (177)
11. Erdős-Rado-tétel: $\kappa \to (\kappa, (\lambda)_{\tau-1})^2_\tau$ (183)
12. Sierpiñski-tétel, általában $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$ (182)
13. Erdős-tétel: a kontinuum-hipotézis ekvivalens azzal, hogy van $A \subset \mathbb{R}^2$ ami minden vizszintes egyenesből csak megszámlálható sokat tartalmaz, minden függőlegesből csak megszámlálható sokat hagy ki.
14. ω-n van 2^{2^ω} különböző ultrafilter.
15. Létezik ω_1-es Aronszajn-fa.
16. Gyengén kompakt számosság, néhány tulajdonsága (227)
17. Todorčevič tétele.