1. fejezet

Bevezetés

A forszolás egy halmazelméleti módszer, aminek segítségével különböző állításoknak a „halmazelmélet szokásos axiómáitól” való függetlenségét lehet igazolni. A halmazelméletet a 19. század végén *Georg Cantor* (1845–1918) teremtette meg, tőle származnak az olyan alapfogalmak, mint rendszám vagy számosság, és ő vezette be a végtelen számosságok jelölésére az $\aleph$ szimbólumot. *David Hilbert* (1862–1943) az 1901-es Matematikai Világkongresszuson tartott előadásában azokat a matematikai problémákat sorolta fel, melyek megoldását az eljövendő huszadik századtól várta. A problémák között az egyes számú a kontinuum probléma:

> *Igaz-e hogy a valós számok számossága (a kontinuum) és a legkisebb végtelen számosság, a természetes számok számossága között nincsen más számosság?*

Már Hilbert előtt is világos volt, hogy a probléma megválaszolásához először pontosan definiálni kell, mit is értünk halmazon, mik a halmazoknak azok az alapvető tulajdonságai, amiket további okoskodásainkban elfogadunk. Vagyis a halmazelméletet *axiomatizálni kell.* Ezután bármely halmazokról szóló állítást csak akkor fogadunk el igaznak, ha az ezekből az axiómákból minden más feltevés nélkül következik. Ez különbözteti meg az *axiomatikus* halmazelméletet a korábban művelt *naív* halmazelmélettől. Az axiómák bevezetésére azért is szükség volt, mert a naív halmazelméletben még a kezdetek kezdetén ellentmondást véltek felfedezni. Hilbert úgy gondolta, hogy az axiómákat megfelelően választva egyrészt a halmazelmélet minden tételét (a formális logika szabályai szerint) bizonyítani tudjuk, másrészt pedig azt is be tudjuk bizonyítani, hogy ezen az úton sohasem kaphatunk egymásnak ellentmondó állításokat.

Az 1920-as évekre forrott ki a halmazelmélet axiómarendszere, mindjárt két változatban is. Az egyiket *Ernst Zermelo* (1871–1953) valamint *Abraham A. Fraenkel* (1891–1965) nevének kezdőbetűivel ZF-ként szoktuk emlegetni, a másikat pedig *Kurt Gödel* (1906–1978) és *Paul Isaac Bernays* (1888–1977) után GB-ként. A kétfajta axiómarendszer, bár különböző fogalmakkal operál, természetesen ekvivalens. Manapság a szokásos, hagyományos halmazelméletben szinte kivétel nélkül a ZF-et, illetve annak a kiválasztási axiómával való kibővítettjét, a ZFC-vel jelölt axiómarendszert használják. A GB rendszer főleg a logikai vizsgálatoknál bizonyult hasznosnak.

Hilbert első problémájával kapcsolatban az első sikert Gödel érte el 1940-ben, amikor is bebizonyította, hogy a kontinuum hipotézist nem lehet megcáfolni. Gödel ehhez az úgynevezett modell-módszert használta: a halmazelmélet axiómáinak olyan modelljét konstruálta meg, amiben a kiválasztási axióma, a kontinuum hipotézis (és sok más érdekes állítás) is igaz. Ha pedig ilyen modell létezik, akkor a halmazelméleti axiómákból biztosan nem lehet levezetni azoknak az állításoknak a *tagadását*, amik a modellben teljesülnek. Gödel konstrukciója után két lehetőség maradt: vagy meg tudjuk mutatni, hogy (többek között) a kontinuum hipotézis ténylegesen következménye ZFC-nek, vagy pedig *független tőle*, vagyis sem a kontinuum hipotézis, sem annak tagadása nem vezethető le ZFC-ből. Gödel konstrukcióját sajnos nem lehet úgy módosítani, hogy a kapott modellben a kontinuum hipotézis tagadása legyen igaz.

Egészen más ötletre volt szükség, amit azután Gödel cikkének megjelenése után több mint húsz évvel, 1963-ban talált *Paul Cohen* (1934–). Szintén modell-módszerről van szó, azonban ebben az esetben Cohen nem egyetlen modellt konstruált, hanem egy módszert adott, aminek segítségével a halmazelmélet számtalan különböző modelljét lehet megkonstruálni, és a modellben teljesülő állításokat nagyon finoman, szinte sebészi pontossággal lehet beállítani. A módszer a *forszolás* – kényszerítés – elnevezést kapta; benne egy parciálisan rendezett halmaz – a *kényszerképzet* (notion of forcing) – segítségével kényszerítjük az előálló modellt arra, hogy benne egyik vagy másik állítás igaz legyen.

Cohen felfedezése új lökést adott a halmazelméleti kutatásoknak, amik a hatvanas évekre ugyancsak a matematika perifériájára szorultak. Cohen megmutatta a kontinuum hipotézis függetlenségét, *E. W. Easton* pedig azt, hogy reguláris számosságokra a számossághatványozás szinte tetszőleges lehet; a (gyenge) monotonitáson kívül az egyetlen megszorítást *Kőnig Gyula* (1849–1913) tétele jelenti. Nagy meglepetést keltett 1974-ben *J. Silver* eredménye, ami szerint ugyanez szinguláris számosságokra már nem igaz: például az általános kontinuum hipotézis nem sérülhet először az ω_1-edik számosságnál (amelyik természetesen szinguláris számosság). *Fred Galvin*, *Hajnal András* és *Saharon Shelah* eredményei alapján már sokat tudunk a szinguláris számosságok hatványairól, a kép azonban még nem teljesen tisztázott.

A valós függvénytanban még az 1920-as és harmincas években előkerült és sokáig megoldatlan problémák – mint például *Luzin* halmaz vagy *Szuszlin* egyenes létezése – jelentős részéről is kiderült, hogy függetlenek a halmazelmélet szokásos axiómáitól, vagyis sem igazolni, sem cáfolni nem lehet őket. Gödel eredeti modellje is górcső alá került. A modell finomstruktúrájának vizsgálata *R. B. Jensen* nevéhez fűződik. Ennek során számos kombinatorikus elv került megfogalmazásra, mint például a $\diamondsuit$ vagy a $\square$, melyek Gödel modelljében igazak, és számos érdekes és fontos következményük van. Természetesen forszolással is előállíthatók modellek, melyekben ezeknek az elvek igazak, vagy éppen hamisak lesznek. A valós függvénytani problémákból nőtt ki a halmazelméleti topológia, melynek jelentős magyarországi iskolája van.

A forszolás mint különböző tulajdonságú modellek készítésére használható általános módszer megjelent a modellelméletben, sőt a modern kategóriaelmélet egyik legfontosabb fogalma, a *toposz* is innen származik. Az intuícionista logika is sokat köszönhet a forszolásnak, hiszen forszolással lehet természetes módon olyan világokat definiálni, melyekben az intuícionista logika érvényes (például egy állítás és kétszeres tagadása mást jelenthet).

Ez a tanulmány bevezető a forszolás művészetébe. Mindazokhoz szól, akiket a huszadik századi matematika egyik, ha nem éppen „a” legnagyobb teljesítménye érdekel. Előismeretként – talán a Martin axiómával foglalkozó ötödik fejezetet kivéve – csak némi halmazelméletre van szükség, igazán mély halmazelméleti eredményeket nem fogunk használni. Rendszámok, számosságok, transzfinit indukció és rekurzió tétele, kiválasztási axióma és ekvivalensei amire szükségünk van. Mivel axiómákkal és modellekkel foglalkozunk, némi logikai ismeret is nélkülözhetetlen. Itt az elsőrendű formulák definíciója, azok igazsága, valamint jártasság szóban megfogalmazott állítások formális leírására a minimális követelmény. Meglepő módon, különösen az ismerkedés szintjén, algebrai, azon belül is univerzális algebrai ismeretek is sokat segíthetnek. A második fejezet a parciálisan rendezett halmazokkal foglalkozik, ezek alkotják majd a „kényszerképzeteket,” ami a forszolás kiindulópontja. Azokat a fogalmakat ismertetjük és azokat a tételeket bizonyítjuk, melyekre később szükségünk lesz. Halmazelméleti, topológiai és algebrai oldalról is megvizsgáljuk a részben rendezett halmazokat.

A harmadik fejezetben a halmazelmélet ZFC axiómáit ismertetjük. Felidézzük a természetes szám, valós szám, rendszám definícióját, és megnézzük hogy ezek a ZFC formulahalmaz modelljeiben milyen objektumokat adnak meg. A halmazelmélet axiómarendszerének illetve annak véges részeinek modelljeit tekintjük át. Megmutatjuk, hogy bizonyos modellek létezését nem tehetjük fel, és azt is, hogy ennek ellenére miért tesszük fel hogy ilyen modellek vannak.

A negyedik fejezetben a forszolás alapjául szolgáló generikus modellek konstrukcióját mutatjuk be. Bevezetjük a forszolási nyelvet, igazoljuk alapvető tulajdonságait, többek között a definiálhatósági tételt.

Az ötödik fejezet a *Martin axiómája* néven ismert halmazelméleti axióma érdekes következményeit vizsgálja. Az axióma a forszolási technika melléktermékeként jelent meg. Az axióma néhány kombinatorikus, valós függvénytani, és főleg topológiai következményét igazoljuk.

A hatodik fejezetben igazoljuk, hogy a generikus bővítés a halmazelmélet modelljét adja. Megadunk modelleket, ahol a kontinuum hipotézis igaz, és olyat is, ahol hamis. Megmutatjuk, hogy a generikus bővítés számos tulajdonsága szoros összefüggésben van a kiindulási parciálisan rendezett halmaz kombinatorikus tulajdonságaival.

Végül az utolsó fejezetben a kiválasztási axióma kerül terítékre. Elsőként a kényszerképzet szimmetriáit kihasználva olyan generikus bővítéseket készítünk, melyekben „létező” matematikai objektumok konkrétan nem adhatók meg. Ilyen objektumra példa a természetes számokon egy nem triviális ultraszűrő, vagy egy Banach tér nem-korlátos lineáris operátorai. Olyan halmazelméleti modellt is konstruálunk, melyben a kiválasztási axióma nem igaz. Végül igazi csemegeként megmutatjuk, hogy ebben a modellben az analízis két elemi tétele, miszerint ha a valós számok egy részhalmaza torlódik egy ponthoz, akkor létezik a ponthoz konvergáló részsorozat, valamint hogy a folytonosság sorozatos és „epszilon–deltás” definíciója ekvivalens, hamisak.

Az anyag lefedi az ELTE negyedéves matematikus hallgatóinak egy féléves halmazelméleti előadásának anyagát. A fejezetek végén a feladatok egyrészt a tárgyalt anyag megértését segítik elő, másrészt kitekintést nyújtanak. Megoldásukhoz általában elegendő egy-egy jó ötlet, és természetesen a fejezet anyagának ismerete.

A halmazelmélet elemi fogalmait ismertnek tételezzük fel, ezek Hajnal András és Hamburger Péter kitünő könyvében megtalálhatók. A halmazelméleti fogalmak jelölésében is követjük a könyvet. Számosságokat azonosítjuk a legkisebb velük megegyező számosságú rendszámmal. Így például ω_1 egyaránt jelöli a legkisebb nem megszámlálható rendszámot és annak számosságát. Talán az egyetlen nem sztenderd jelölés, hogy a $\subset$ jelet a „része” és nem a „valódi része” értelemben használjuk, vagyis $A \subset A$ mindig igaz.

Ez a tanulmány nem jöhetett volna létre *Hajnal András* iskolateremtő munkája, nagy tudása, kedves humora és állandó bátorítása nélkül. Rajta keresztül ismertem meg a halmazelmélet fantasztikus és szép világát, és értettem meg igazán *David Hilbert* híres mondását:

Senki sem bírhat rá bennünket, hogy elhagyjuk az a Paradicsomot, melyet Cantor teremtett számunkra.