7. fejezet

Permutációmodellek

A P kényszerképzet egy *automorfizmusa* a P-nek önmagára való, kölcsönösen egyértelmű és rendezéstartó leképezése. P automorfizmusai egy csoportot alkotnak, amit *P automorfizmus csoportjának* hívunk. P-nek minden π automorfizmusa automatikusan kiterjed az összes P-névre: $\pi a = \{\langle \pi b, \pi p\rangle : \langle b, p\rangle \in a\}$. Azok a π automorfizmusok, melyek egy a nevet helybenhagynak, az automorfizmus csoport egy részcsoportját alkotják, ez az *a stabilizátora*, és $\mathrm{Stab}(a)$-val jelöljük. Könnyű látni, hogy $\mathrm{Stab}(\pi a) = \pi\, \mathrm{Stab}(a)\pi^{-1}$. Az $x \in M$ elem $\check{x}$ kanonikus nevének stabilizátora az egész automorfizmus csoport, ez például $\check{x}$ felépítésére vonatkozó indukcióval látható. A $G \subset P$ halmaznak a π szerinti képét helytelenül, de valószínűleg félre nem érthető módon πG-vel jelöljük.

7.1. Állítás *Minden $G \subset P$ filterre és a névre $i_{\pi G}(\pi a) = i_G(a)$.*

Bizonyítás Az a név felépítésére vonatkozó transzfinit indukcióval könnyen adódik. ■

Ha a P kényszerképzet π permutációja az M modellben van, akkor πG természetesen eleme $M[G]$-nek. Következésképp az $i_{\pi G}$ egy $M[G]$-beli operáció, tehát az M-beli nevek $i_{\pi G}$ szerinti kiértékeltjei is mind $M[G]$ elemei lesznek, vagyis $M[\pi G] \subset M[G]$. Ugyanezt $M[\pi G]$-re és a π^{-1} permutációra elmondva $M[G] \subset M[\pi G]$ adódik, vagyis $M[G] = M[\pi G]$.

7.2. Lemma *Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges nevek. $p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ akkor és csak akkor, ha $\pi p \Vdash \varphi(\pi a_1, \ldots, \pi a_n)$.*

Bizonyítás Tudjuk, hogy $p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ akkor és csak akkor, ha minden olyan G generikus filterre, amire $p \in G$, $M[G] \models \varphi(i_G(a_1), \ldots, i_G(a_n))$. Mivel $M[G]$ és $M[\pi G]$ ugyanaz a modell, továbbá $i_{\pi G}(\pi a) = i_G(a)$, azért ez pontosan akkor ha minden olyan πG generikus filterre, amire $\pi p \in \pi G$, $M[\pi G] \models \varphi(i_{\pi G}(\pi a_1), \ldots, i_{\pi G}(\pi a_n))$. Mivel πG ugyancsak átfut az összes generikus filteren, ez pontosan akkor áll fenn, ha $\pi p \Vdash \varphi(\pi a_1, \ldots, \pi a_n)$, ahogyan kívántuk. ■

1. Létezik, de ...

Egy ultraszűrő *triviális*, ha egyetlen elem generálja, vagyis az ultraszűrő az alaphalmaznak azokból a részeiből áll, melyek egy adott elemet tartalmaznak. Véges halmazon minden ultraszűrő triviális. Annak bizonyítása, hogy ω-n létezik nem triviális ultraszűrő, tipikus egzisztencia bizonyítás: azt mutatjuk meg, hogy minden szűrő kiterjeszthető ultraszűrővé. Ezután használva azt, hogy például ω véges komplementerű részhalmazai szűrőt alkotnak – ez az ún. *Fréchet-szűrő* –, tetszőleges ezt kiterjesztő ultraszűrő nem triviális, hiszen nem lehet benne véges halmaz. Gyakran felmerül az igény, hogy adjunk meg egy konkrét ultraszűrőt, amiről látni lehet, hogy ω mely részhalmazai tartoznak bele. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen. Egészen pontosan elkészítjük a ZFC-nek egy olyan modelljét, melyben ω-n minden definiálható ultraszűrő főszűrő.

Legyen P az a kényszerképzet, ami az M alapmodellhez egy Cohen-valóst ad, vagyis P elemei az ω-ból a $\{0,1\}$-be képező véges függvények; $p \leq q$ ha p mint függvény kiterjeszti q-t. Legyen e az ω-nak egy (M-beli) részhalmaza, és $p \in P$-re $\pi_e p$ az a feltétel, aminek értelmezési tartománya $\mathrm{Dom}(p)$, továbbá

$$(\pi_e p)(i) = \begin{cases} p(i) & \text{ha } i \notin e, \\ 1 - p(i) & \text{ha } i \in e. \end{cases}$$

Világos, hogy π_e kölcsönösen egyértelmű rendezéstartó leképezés, tehát P-nek egy automorfizmusa. Továbbá π_e idempotens, vagyis négyzete az identitás. Használni fogjuk még a π_n jelölést P-nek a $\pi_{\{n\}}$ permutációjára.

7.3. Tétel *Legyen $M[G]$ az a generikus modell, ami M-hez a fenti P-vel egyetlen Cohen-valóst ad. Ha $M[G]$-ben egy ω fölötti ultraszűrő definiálható, akkor az triviális.*

Bizonyítás Legyen $U \in M[G]$ egy definiálható ω fölötti szűrő. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varphi(x)$ halmazelméleti formula, amit $M[G]$-ben egyetlen halmaz elégít ki, nevezetesen U, vagyis

$$M[G] \models \exists! x\, \varphi(x) \wedge \varphi(U) \wedge \text{„}U \text{ ultraszűrő } \omega\text{-n”}. \tag{1}$$

Legyen $C \subset \omega$ az újonnan hozzáadott Cohen-valós, D pedig ennek komplementere; ezek (kanonikus) nevei könnyen láthatóan $c = \{\langle \check{\imath}, p\rangle : i \in \mathrm{Dom}(p) \text{ és } p(i) = 1\}$ illetve $d = \{\langle \check{\imath}, p\rangle : i \in \mathrm{Dom}(p) \text{ és } p(i) = 0\}$. Mivel U ultraszűrő, azért C és D közül pontosan az egyik eleme U-nak, mondjuk $C \in U$, a másik eset hasonlóan kezelhető. Legyen U egy neve $\dot{U}$, és $q \in G$ ami (1)-et és a $C \in U$ állítást is kiforszolja:

$$q \Vdash \exists! x\, \varphi(x) \wedge \varphi(\dot{U}) \wedge c \in \dot{U} \wedge \text{„}\dot{U} \text{ ultraszűrő } \check{\omega}\text{-n”}. \tag{2}$$

Legyen π a P kényszerképzet egy automorfizmusa, a 7.2. lemma szerint

$$\pi q \Vdash \exists! x\, \varphi(x) \wedge \varphi(\pi\dot{U}) \wedge \pi c \in \pi\dot{U} \wedge \text{„}\pi\dot{U} \text{ ultraszűrő } \check{\omega}\text{-n”}, \tag{3}$$

hiszen $\pi\check{\omega} = \check{\omega}$. Ha most π olyan permutáció, ami a q-t helybenhagyja, akkor q (2) szerint forszolja, hogy $\dot{U}$ az egyetlen halmaz, ami a $\varphi(x)$ formulát kielégíti, másrészt (3) szerint $\pi\dot{U}$ az egyetlen halmaz, ami ezt a formulát kielégíti. Ezért q azt is forszolja, hogy

$\dot{U}$ és $\pi\dot{U}$ ugyanaz a halmaz, továbbá hogy c eleme $\dot{U}$-nak, valamint hogy πc is eleme $\dot{U} = \pi\dot{U}$-nak. A q azt is forszolja, hogy $\dot{U}$ ultraszűrő, következésképp ebben az esetben

$$q \Vdash c \cap \pi c \in \dot{U}.$$

Ahhoz hogy a tételt igazoljuk, tehát elegendő P-nek olyan π automorfizmusát találni, ami egyrészt q-t helyben hagyja, másrészt amire $i_G(c) \cap i_G(\pi c)$ véges.

Legyen $e = \omega - \mathrm{Dom}(q)$, állítjuk hogy π_e ilyen. Az, hogy $\pi_e q = q$ a π_e permutáció definíciójából azonnal következik. A c név definíciója szerint $p \Vdash \check{\imath} \in c$ pontosan akkor, ha $p(i) = 1$; 7.2. lemma alapján pedig ez pontosan akkor áll, ha $\pi_e p \Vdash \check{\imath} \in \pi_e c$ (hiszen $\pi_e \check{\imath} = \check{\imath}$). Így $p \Vdash \check{\imath} \in \pi_e c$ pontosan akkor, ha $(\pi_e^{-1} p)(i) = 1$. Legyen most $i \in e$; ekkor $p(i) = 1$ és $(\pi_e^{-1} p)(i) = 1$ közül legfeljebb az egyik állhat fenn, vagyis nincs olyan p feltétel, ami *egyszerre* forszolná azt, hogy $\check{\imath} \in c$ és $\check{\imath} \in \pi_e c$. Következésképp tetszőleges G generikus filterre $e \cap i_G(c) \cap i_G(\pi_e c) = \emptyset$, vagyis

$$M[G] \models i_G(c) \cap i_G(\pi_e c) \subset \omega - e,$$

és így ez a metszet része $\mathrm{Dom}(q)$-nak, vagyis véges, ahogyan kívántuk.

Ha nem C, hanem D volna eleme U-nak, akkor az kell felhasználnunk, hogy $p \Vdash \check{\imath} \in d$ pontosan akkor, ha $p(i) = 0$, a bizonyítás többi része változatlan. ∎

A bizonyítás akkor is működik, ha az ultraszűrőt definiáló φ formulában paraméterként megengedjük az M alapmodell tetszőleges elemét. Ha ez a paraméter mondjuk $w \in M$ és az ultraszűrőt definiáló formula $\varphi(x, w)$, akkor valamilyen $q \in G$-vel

$$q \Vdash \exists! x\, \varphi(x, \check{w}) \wedge \varphi(\dot{U}, \check{w}) \wedge \ldots$$

ahol $\dot{U}$ most is az ultraszűrő egy neve. A P kényszerképzet tetszőleges π permutációjára $\pi(\check{w}) = \check{w}$ miatt

$$\pi q \Vdash \exists! x\, \varphi(x, \check{w}) \wedge \varphi(\pi\dot{U}, \check{w}) \wedge \ldots$$

ahonnan $q = \pi q$ esetén most is következik, hogy $q \Vdash \dot{U} = \pi\dot{U}$. Így például $M[G]$-ben olyan nem triviális ultraszűrő sem létezik, amit véges sok rendszám segítségével tudunk definiálni (noha a rendszámok zöme egyáltalán nem definiálható).

A 7.3. tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy nem lehet ω összes részhalmazán egy végesen additív 0–1 mértéket definiálni úgy, hogy az egy elemű halmazok mértéke 0, és az egész ω mértéke 1 legyen. Megmutatjuk, hogy megfelelő generikus bővítésben ez nem csak 0–1 mértékre, hanem tetszőleges végesen additív mértékre is igaz.

7.4. Tétel *Álljon P az ω-ból ω-ba képező véges egy–egy függvényekből; a kiterjesztés a szokásos. $M[G]$-ben nem lehet definiálni ω összes részhalmazán olyan végesen additív mértéket, ami szerint az egy elemű halmazok mértéke 0, az egész mértéke pedig pozitív.*

Bizonyítás Legyen $G \subset P$ a generikus filter, és $g = \bigcup G$. Könnyen látható, hogy g egy ω-ról ω-ra képező kölcsönösen egyértelmű függvény (vagyis g az ω egy $M[G]$-beli permutációja). Legyen még $A \subset \omega$ egy M-beli halmaz, és

$$a_A = \{\langle \check{\imath}, p\rangle \,:\, i \in \mathrm{Dom}(p) \text{ és } p(i) \in A\} \tag{4}$$

egy A-hoz rendelt M-beli név. Persze $i_G(a_A) = \{i \in \omega : g(i) \in A\} = g^{-1}(A)$.

Legyen π az ω egy M-beli permutációja. Kiterjesztjük π-t a P kényszerképzet elemeire a következőképpen: $\mathrm{Dom}(\pi p) = \mathrm{Dom}(p)$, és $(\pi p)(i) = \pi(p(i))$. Ez P-nek rendezéstartó permutációja, továbbá

$$\pi a_A = \{\langle \check{\imath}, \pi p\rangle \,:\, i \in \mathrm{Dom}(p) \text{ és } p(i) \in A\} = \{\langle iek, q\rangle \,:\, i \in \mathrm{Dom}(q) \text{ és } q(i) \in \pi A\}.$$

Ezek szerint $i_G(\pi a_A) = \{i \in \omega : g(i) \in \pi A\} = g^{-1}(\pi A)$.

Legyen $\mu \in M[G]$ egy definiálható végesen additív, nem azonosan nulla mérték az ω részhalmazain. Az ω elemeit osszuk két osztályba attól függően, hogy $g(i)$ páros vagy páratlan. A két osztály mértékének összege az egész ω mértékét adja ki, ami pozitív, így a két osztály valamelyikének mértéke is pozitív. Legyen tehát A a páros vagy a páratlan számok halmaza attól függően, hogy közülük melyik g szerinti inverz képének mértéke pozitív, továbbá r_1 és r_2 a $g^{-1}(A)$ mértékét alulról és felülről közrefogó két pozitív racionális szám, melyekre még $r_1 < r_2 < 2r_1$ is teljesül. Legyen $q \in G$ olyan, ami forszolja, hogy a μ mértéket a Φ formula definiálja, valamint hogy μ-re mindezek az állítások teljesülnek:

$$q \Vdash \exists! x\, \Phi(x) \wedge \Phi(\dot{\mu}) \wedge \dot{\mu} \text{ végesen additív mérték } \check{\omega}\text{-en} \wedge \check{r}_1 < \dot{\mu}(a_A) < \check{r}_2, \tag{5}$$

ahol a_A a $g^{-1}(A)$-nak a (4) szerinti neve, $\dot{\mu}$ pedig a μ egy neve. Legyen most π az ω-nak olyan M-beli permutációja, ami a véges q értelmezési tartományán identitás. Erre $\pi(q) = q$, vagyis (5) alapján q azt is forszolja, hogy πa_A-nak a $\dot{\mu}$ szerinti mértéke is r_1 és r_2 közé esik. Ezért ω-nak minden q-t helybenhagyó M-beli π permutációjára

$$M[G] \models r_1 < \mu(g^{-1}(\pi A)) < r_2. \tag{6}$$

Legyen A komplementere B, bontsuk fel A-t két diszjunkt C és D halmaz uniójára mondjuk annak alapján, hogy A elemei 4-gyel osztva mekkora maradékot adnak. Legyen π_1 olyan M-beli permutáció, ami a q (véges) értelmezési tartományát helyben hagyja, azon kívül pedig kölcsönösen egyértelmű leképzést létesít A és C (valamint persze B és $B \bigcup D$) további elemei között; π_2 szintén identitás q értelmezési tartományán, azon kívül A és D (valamint B és $B \bigcup C$) nem $\mathrm{Dom}(q)$-beli elemei között kölcsönösen egyértelmű. Így $\pi_1 A$ és C (valamint $\pi_2 A$ és D) legfeljebb $\mathrm{Dom}(q)$ elemeiben tér el egymástól. A g az ω egy permutációja, ezért $g^{-1}(\pi_1 A)$ és $g^{-1}(C)$ (illetve $g^{-1}(\pi_2 A)$ és $g^{-1}(D)$) véges sok hely kivételével megegyezik, tehát μ szerinti mértékük egyenlő:

$$\mu(g^{-1}(\pi_1 A)) = \mu(g^{-1}(C)); \qquad \mu(g^{-1}(\pi_2 A)) = \mu(g^{-1}(D)).$$

A $g^{-1}(C)$ és $g^{-1}(D)$ halmazok diszjunktak, uniójuk éppen $g^{-1}(A)$; ugyanakkor (6) szerint mindhárom mértéke r_1 és r_2 közé esik. Ezzel megkaptuk a keresett ellentmondást, hiszen

$g^{-1}(A)$ mértéke egyrészt nagyobb mint $r_1 + r_1$, másrészt kisebb r_2-nél, ellentétben azzal, hogy $r_2 < 2r_1$. ∎

Tudjuk, hogy végtelen dimenziós Banach térben, így például L^2-ben, van nem korlátos lineáris operátor. A bizonyítás egzisztencia bizonyítás, a tér bázisát használja. Ennél jobb példa lenne egy jól definiált operátor, amiről azután megmutatjuk, hogy nem korlátos. Ilyet azonban senkinek sem sikerült megadnia. Nem véletlenül. Az alábbi, *Ajtai Miklóstól* származó tétel szerint van a ZFC-nek olyan modellje, ahol például L^2 minden definiálható lineáris operátora korlátos.

7.5. Tétel (Ajtai Miklós) *Álljon P az ω-ból a $\{0,1\}$-be képező véges függvényekből, a kiterjesztés a szokásos. Az $M[G]$ generikus modellben a definiálható Banach terek definiálható lineáris operátorai korlátosak.*

Bizonyítás Emlékeztetünk arra, hogy a P kényszerképzet $\pi_n = \pi_{\{n\}}$ permutációja a p függvény értékét „megfordítja” az n helyen, feltéve hogy $n \in \mathrm{Dom}(p)$. Elsőként egy lemmát bizonyítunk olyan nevek létezéséről, melyek stabilizátorában a π_n-ek közül véges sok megtalálható. Legyen ehhez $\varphi(x)$ egy formula, amiben nem jelölt paraméterként az M alapmodell elemei szerepelhetnek.

7.6. Lemma *Legyen b olyan név, amire $p \Vdash \varphi(b)$, $e \subset \omega$ pedig olyan véges halmaz, ami diszjunkt p értelmezési tartományától. Ekkor van olyan b^* név, amire $p \Vdash \varphi(b^*)$, és aminek stabilizátorában minden $n \in e$-re π_n benne van.*

Bizonyítás Az e elemszámára vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Ha e üres, akkor $b^* = b$ megfelelő. Tegyük most fel, hogy a b névre $p \Vdash \varphi(b)$, a b stabilizátorának π_i eleme minden $i \in e$-re az egyetlen π_n kivételével. Feladatunk olyan b^* név konstruálása, aminek stabilizátorában még π_n is benne van.

Ha egy q feltétel értelmezési tartományában az n szám benne van, akkor legyen $q_0 = q_1 = q$; ha pedig nincs benne, akkor legyenek q_0 és q_1 a q feltételnek azok a kiterjesztései, melyek még az n helyen is értelmezve vannak, továbbá $q_0(n) = 0$, $q_1(n) = 1$. Világos, hogy q minden kiterjesztése kiterjesztése vagy q_0-nak vagy q_1-nek; q_0 és q_1 inkompatibilisek; tetszőleges q-t tartalmazó generikus filter vagy q_0-t, vagy q_1-et is tartalmazza; végül $(\pi_i q)_0 = \pi_i(q_0))$ és $(\pi_i q)_1 = \pi_i(q_1))$ ha $i \neq n$. Álljon a b' név az $\langle a, q_0\rangle$ valamint $\langle a, q_1\rangle$ párokból b-nek az összes $\langle a, q\rangle$ elemére. A fenti megjegyzésünk értelmében b-nek és b'-nek minden G generikus mellett ugyanaz az interpretációja, tehát speciálisan $p \Vdash \varphi(b')$; továbbá b' stabilizátorában $i \neq n$ miatt a π_i permutációk továbbra is benne vannak. Legyen

$$b^* = \{\langle a, q\rangle : \langle a, q\rangle \in b' \text{ és } q(n) = 0\} \cup \{\langle \pi_n a, \pi_n q\rangle : \langle a, q\rangle \in b' \text{ és } q(n) = 0\}.$$

Mivel π_n^2 az identitás, azért $\pi_n b^* = b^*$, és persze a többi π_i közül amire b' invariáns volt, arra b^* is az lesz. A b^* stabilizátorában tehát az összes π_i és π_n is benne van. A b^* definíciója miatt tetszőleges G generikus filterre $i_G(b^*) = i_G(b')$ ha $(\bigcup G)(n) = 0$, és $i_G(b^*) = i_G(\pi_n b')$ ha $(\bigcup G)(n) = 1$. Mivel n nincs p értelmezési tartományában, azért $\pi_n(p) = p$, vagyis $p \Vdash \varphi(\pi_n b')$ is teljesül. Ezért az összes G generikusra, ami p-t tartalmazza, $M[G] \models \varphi(i_G(b'))$ valamint $M[G] \models \varphi(i_G(\pi_n b'))$, vagyis mindenképpen $M[G] \models \varphi(i_G(b^*))$. Ez pedig azt mutatja, hogy $p \Vdash \varphi(b^*)$. ■

Legyen az $M[G]$ generikus bővítésben B egy Banach-tér, $N : B \to \mathbf{R}^{\geq 0}$ a norma, $F : B \to B$ pedig egy lineáris leképezés, és tegyük fel hogy mindhárom definiálható, vagyis valamilyen $\varphi(x, y, z)$ formulára (ami paraméterként tartalmazhatja M-nek véges sok elemét)

$$M[G] \models \exists! x\, \exists! y\, \exists! z\, \varphi(x, y, z) \wedge \varphi(B, N, F).$$

Legyen $\dot{B}$, $\dot{N}$ illetve $\dot{F}$ ezeknek egy–egy neve, és legyen $p \in P$ olyan, ami forszolja a fenti állítás; valamint még azt is, hogy $\dot{B}$ egy Banach tér, $\dot{N}$ benne a norma, $\dot{F}$ pedig egy nem korlátos lineáris operátor $\dot{B}$-n. A $\mathbf{z} \in B$ elem normáját $N(\mathbf{z})$ helyett a szokásoknak megfelelően $\|\mathbf{z}\|$ fogja jelölni.

Mivel F nem korlátos, azért minden $i \in \omega$-ra van olyan $\mathbf{z} \in B$, aminek normája kisebb 2^{-i}-nél, míg $F(\mathbf{z})$ normája egyenlő 4^i-nel:

$$M[G] \models \exists \mathbf{z}\, (\mathbf{z} \in B \wedge \|\mathbf{z}\| < 2^{-i} \wedge \|F(\mathbf{z})\| = 4^i). \tag{7}$$

Mivel p forszolta, hogy $\dot{F}$ nem korlátos, azért ugyanez a p forszolja a (7)-ben szereplő formulát is. A 6.4. állítás szerint ekkor van olyan b_i név is, amit $\mathbf{z}$ helyébe téve az egzisztenciális kvantor elhagyásával kapható formulát p ugyancsak forszolja:

$$p \Vdash b_i \in \dot{B} \wedge \|b_i\| < 2^{-i} \wedge \|\dot{F}(b_i)\| = 4^i, \tag{8}$$

persze itt 2^{-i}, 4^i, és a norma helyett azok kanonikus nevét illetve az $\dot{N}$ függvényt kellett volna írnunk. A (8)-ban szereplő $\dot{B}$, $\dot{N}$ illetve $\dot{F}$ persze helyettesíthető lenne az őket definiáló φ formulával, hiszen p még azt is forszolja, hogy ezeket φ definiálja. Így alkalmazható a 7.6. lemma, ami szerint a b_i nevet választhatjuk úgy is, hogy b_i stabilizátorában az összes olyan π_n benne legyen, amire $n \leq i$ és $n \notin \mathrm{Dom}(p)$. Legyen még $\mathbf{x}_i = i_G(b_i)$, ekkor (8) szerint $\mathbf{x}_i \in B$, $\mathbf{x}_i$ normája kisebb 2^{-i}-nél és $\|F(\mathbf{x}_i)\| = 4^i$.

Emlékeztetünk rá, hogy tetszőleges a és b nevekre $\mathrm{RP}(a, b)$ az $\langle i_G(a), i_G(b)\rangle$ rendezett pár kanonikus neve. Legyen

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle \mathrm{RP}(\check{\imath}, b_i), q\rangle \,:\, i \in \omega, q \in P\},$$

vagyis annak a függvénynek a (kanonikus) neve, ami az i helyen az $i_G(b_i) = \mathbf{x}_i$ értéket veszi fel. Legyen még $g = \bigcup G$ az újonnan hozzáadott Cohen valós karakterisztikus függvénye, és

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle\, \langle i, 0\rangle\check{}\,, q\rangle : i \in \omega,\ q(i) = 0\} \cup \{\langle\, \langle i, 1\rangle\check{}\,, q\rangle : i \in \omega,\ q(i) = 1\}$$

a g-nek (kanonikus) neve.

A B Banach-térben a $\sum\limits_{i=0}^{\infty} g(i)\mathbf{x}_i$ sor konvergens, hiszen $\|g(i)\mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x}_i\| < 2^{-i}$. Legyen **u** ennek a sornak összege, és $U > 1$ olyan természetes szám, ami nagyobb $F(\mathbf{u})$ normájánál: $\|F(\mathbf{u})\| < U$. Az **u** elemet az $\{\mathbf{x}_i\}$ sorozat és a g függvény, vagyis $i_G(b)$ és $i_G(a)$ definiálja. Ezek szerint van a halmazelméletnek olyan $\psi(i_G(b), i_G(a), U)$ formulája, amiben további paraméterként még legfeljebb az M elemei szerepelhetnek, ami azt fejezi ki, hogy $F(\mathbf{u})$ normája legfeljebb U. Legyen $q \in G$ a p-nek olyan kiterjesztése, ami kiforszolja, hogy ez a formula $M[G]$-ben igaz, és legyen n nagyobb, mint q értelmezési tartományának elemei. Ekkor $\pi_n q$ forszolja a $\psi(\pi_n b, \pi_n a, \check{U})$ állítást, tehát

$$M[G] \models \text{„}i_G(\pi_n b) \text{ és } i_G(\pi_n a) \text{ által definiált } \mathbf{v} \text{ összegre } \| F(\mathbf{v})\| < U\text{''}.$$

Legyen $\mathbf{y}_i \stackrel{\text{def}}{=} i_G(\pi_n b_i)$, valamint $h \stackrel{\text{def}}{=} i_G(\pi_n a)$. Persze ekkor $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} h(i)\mathbf{y}_i$, és $F(\mathbf{v})$ normája is kisebb U-nál. Mivel n a p értelmezési tartományában sincsen, azért $\pi_n p = p$, és (8) szerint $\pi_n p = p \in G$ forszolja, hogy

$$\pi_n b_i \in \dot{B} \wedge \|\pi_n b_i\| < 2^{-i} \wedge \|\dot{F}(\pi_n b_i)\| = 4^i,$$

vagyis $\mathbf{y}_i \in B$, $\|\mathbf{y}_i\| < 2^{-i}$, $\|F(\mathbf{y}_i)\| = 4^i$. Ezen kívül h szintén ω egy részhalmazának karakterisztikus függvénye, és minden helyen ugyanazt az értéket veszi fel, amit g, kivéve az n helyen, ahol is $h(n) = 1 - g(n)$. Mivel $i \geq n$ esetén π_n eleme b_i stabilizátorának, azért ilyen esetekben $b_i = \pi_n b_i$, vagyis $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i$. A háromszög-egyenlőtlenséget az F lineáris operátorra alkalmazva

$$2U > \|F(\mathbf{u})\| + \|F(\mathbf{v})\| \geq \|F(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|. \tag{9}$$

Tudjuk, hogy $i \neq n$ esetén $g(i) = h(i)$, és $i \geq n$ esetén $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i$, vagyis az $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ különbségben az n-nél nagyobb indexű tagok kiesnek:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{\infty} \big(g(i)\mathbf{x}_i - h(i)\mathbf{y}_i\big) = g(n)\mathbf{x}_n - h(n)\mathbf{y}_n + \sum_{i=0}^{n-1} \big(g(i)\mathbf{x}_i - h(i)\mathbf{y}_i\big).$$

Az F lineáris operátor, tehát a fenti véges összegre

$$F(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = g(n)F(\mathbf{x}_n) - h(n)F(\mathbf{y}_n) + \sum_{i=0}^{n-1} \big(g(i)F(\mathbf{x}_i) - h(i)F(\mathbf{y}_i)\big).$$

Tudjuk, hogy $g(n)$ és $h(n)$ közül az egyik 0, a másik 1, továbbá $F(\mathbf{x}_i)$ valamint $F(\mathbf{y}_i)$ normája egyaránt 4^i. A háromszög-egyenlőtlenség szerint a szumma jel mögött álló kifejezés normája legfeljebb $\|F(\mathbf{x}_i)\| + \|F(\mathbf{y}_i)\| = 2{\cdot}4^i$, ezért

$$\|F(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| \geq 4^n - \sum_{i=0}^{n-1} 2{\cdot}4^i > \frac{1}{3}4^n.$$

Ugyanakkor (9) szerint $F(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ normája legfeljebb $2U$, ami nem állhat fenn ha n-et elegendően nagynak választjuk. Ellentmondást kaptunk, F tehát szükségképpen korlátos, amit bizonyítani akartunk. ∎

2. A kiválasztási axióma tagadása

A halmazelmélet olyan modelljét szeretnénk elkészíteni, amiben nem igaz a kiválasztási axióma. A módszer az, hogy egy generikus bővítésben $M[G]$-nek csak azokat az elemeit tartjuk meg, melyeknek létezik „szimmetrikus” nevük. Az 1930-as években *Abraham Fraenkel* és *Andrzej Mostowski* foglalkozott a kiválasztási axióma függetlenségén. Ők a halmazelmélet *urelemekkel* való bővítésében dolgoztak. Ezek olyanok mint az üres halmaz, nincs elemük, ám egymástól és az üres halmaztól is különböznek. Urelemekből felépíthető kumulatív hierarchiából csak azokat az elemeket véve, melyek az urelemek bizonyos permutációira invariánsak a halmazelmélet olyan modelljei kaphatók, amikben a kiválasztási axióma teljes általánosságban nem teljesül. Ezt az ötletet használta azután *Paul Cohen* olyan „igazi” halmazelméleti modellek konstruálására, amiben a kiválasztási axióma nem igaz.

Elsőként azt definiáljuk, mit is értsünk „szimmetrikus” néven. Legyen P egy kényszerképzet, és J a P automorfizmuscsoportjának egy rögzített részcsoportja. J elemei tehát P-ről P-re képező kölcsönösen egyértelmű rendezéstartó leképezések, és J zárt a kompozícióra és az inverzre.

7.7. Definíció A J részcsoportjainak egy $\mathcal{F}$ rendszere *normál filter*, ha teljesülnek rá a következők:

(i) $J \in \mathcal{F}$;
(ii) ha $H \supset K \in \mathcal{F}$, akkor $H \in \mathcal{F}$;
(iii) ha $H \in \mathcal{F}$ és $K \in \mathcal{F}$, akkor $H \cap K \in \mathcal{F}$;
(iv) tetszőleges $\pi \in J$ és $H \in \mathcal{F}$ esetén $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$.

Az a név *szimmetrikus*, ha az a stabilizátorának és J-nek metszete $\mathcal{F}$-beli: $\{\pi \in J : \pi(a) = a\} \in \mathcal{F}$, és *öröklődően szimmetrikus*, ha ő szimmetrikus és elemeinek első koordinátái öröklődően szimmetrikusak. Az (iv) pont szerint ha a öröklődően szimmetrikus, akkor πa is az tetszőleges $\pi \in J$-re, hiszen $\mathrm{Stab}(\pi a) = \pi\, \mathrm{Stab}(a) \pi^{-1}$.

Az a név stabilizátorának és J-nek metszetét $\mathrm{Stab}_J(a)$-val vagy $\mathrm{Stab}_{\mathcal{F}}(a)$-val jelöljük, illetve ha ez félreértésre nem ad okot, a J vagy $\mathcal{F}$ indexet le is hagyjuk.

Legyen G egy M-generikus filter, és tekintsük $M[G]$-nek azokat az elemeit, melyeknek van öröklődően szimmetrikus neve:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{i_G(a) : a \in M \text{ öröklődően szimmetrikus név}\}.$$

Mivel M minden elemére az $\check{x}$ kanonikus név öröklődően szimmetrikus, azért $M \subset N \subset M[G]$, és természetesen N tranzitív. Ezt az N-et hívjuk *permutációmodellnek*, és az $N = M[G]/\mathcal{F}$ jelölést is használjuk, ha külön fel akarjuk tüntetni az $\mathcal{F}$ normál filtert.

Az N permutációmodell definiálható $M[G]$-ben az M segítségével, hiszen i_G egy $M[G]$-beli operáció, az N definíciójában szereplő öröklődően szimmetrikus neveket pedig úgy kaphatjuk meg, hogy tekintjük $M[G]$-ben (a P és $\mathcal{F}$ segítségével definiálható) öröklődően szimmetrikus neveket, és ezek közül vesszük azokat, amelyek M-ben vannak. Tudjuk, hogy $M[G]$-ben az M osztályként viselkedik, és így minden $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ halmazelméleti formulához (amiben még az „$x \in M$" is előfordulhat) található olyan $\varphi^N(x_1, \ldots, x_n)$, hogy tetszőleges N-beli a_1, …, a_n halmazokra

$$N \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow M[G] \models \varphi^N(a_1, \ldots, a_n).$$

Ha a φ formula által kifejezett állítás abszolút, akkor persze φ és φ^N ugyanaz a formula is lehet. Ha $i = 1$, …, n-re b_i öröklődően szimmetrikus nevek, akkor $N \models \varphi(i_G(b_1), \ldots, i_G(b_n))$ akkor és csak akkor, ha van olyan $p \in G$, amire $p \Vdash \varphi^N(b_1, \ldots, b_n)$.

7.8. Tétel *N-ben igazak a* ZF *axiómák.*

Bizonyítás Természetesen N tranzitív és részként tartalmazza M-et, és így az összes M-beli rendszámot is. Ezért N-ben automatikusan teljesül az A1 (meghatározottság), A5 (végtelenség) és A7 (regularitás) axióma. N-ben igaz a pár axióma (A2) is, vagyis N zárt a $\{\}$-ra. Ha ugyanis az a és b neveket a π permutáció helybenhagyja, akkor a π ugyancsak helyben hagyja a

$$\mathrm{P}(a, b) = \{\langle a, p\rangle : p \in P\} \cup \{\langle b, p\rangle : p \in P\}$$

nevet is, vagyis stabilizátora bővebb Stab(a) és Stab(b) metszeténél. Ha tehát a és b is öröklődően szimmetrikus, akkor ez is az, márpedig ennek interpretáltja éppen az $\{i_G(a), i_G(b)\}$ pár.

Legyen $x \in M[G]$ tetszőleges halmaz, állítjuk hogy van $y \in N$, ami tartalmazza x-nek minden N-beli elemét, vagyis $x \cap N \subset y$. Ezt a tulajdonságot úgy szokás fogalmazni, hogy N *majdnem univerzális* $M[G]$-ben. Valóban, legyen x-nak egy neve a. Minden $\langle b, p\rangle \in a$-ra keressünk olyan $q \leq p$-t és b^* öröklődően szimmetrikus nevet, amire $q \Vdash b = b^*$ (már ha ilyen q és b^* egyáltalán létezik). Álljon a c név ezekből a $\langle b^*, q\rangle$ párokból, és legyen $c^* = \bigcup\{\pi(c) : \pi \in J\}$. Világos, hogy c^* stabilizátora az egész J, tehát eleme $\mathcal{F}$-nek, továbbá c^* elemeiben az első koordináták öröklődően szimmetrikusak, tehát c^* is öröklődően szimmetrikus, ezért $y = i_G(c^*) \in N$. Állítjuk, hogy y jó. Ha ugyanis x valamelyik eleme N-be esik, akkor van $\langle b, p\rangle \in a$, amire $p \in G$ és $i_G(b)$-nek van öröklődően szimmetrikus neve is, továbbá olyan $q \leq p$, $q \in G$, ami forszolja hogy b és ez az öröklődően szimmetrikus név egyenlő. A c^* definíciója miatt ekkor c^*-ba betettük a $\langle b^*, q\rangle$ párt, ahol b^* valamilyen öröklődően szimmetrikus név és $q \Vdash b = b^*$, vagyis $q \in G$ miatt $i_G(b) = i_G(b^*) \in i_G(c^*)$, ahogyan kívántuk.

Ezek szerint N-ben igaz az A3$'$ (unió) axióma, vagyis $x \in N$-re létezik $\cup x$-nél bővebb halmaz, hiszen $\cup x \subset N$ és természetesen $M[G]$-beli, azért N-ben majorálható. Azután igaz N-ben az A4$'$ (hatványhalmaz) axióma is, mivel az $x \in N$-nek N-beli részhalmazainak halmaza része az x $M[G]$-beli hatványhalmazának.

Az A6$''$ (gyűjtés) axiómánál az $x \in N$ halmaz u elemeihez össze kell gyűjtenünk azokat a $v \in N$ elemeket, amikre N-ben a teljesül a $\varphi(u, v, \dots)$ formula. Az $M[G]$-ben egy $y \in M[G]$ halmazba össze tudunk gyűjteni olyan a $v \in N$ elemeket, amikre $M[G]$-ben a $\varphi^N(u, v, ...)$ igaz, az y-t pedig tudjuk N-ben majorálni.

Egyedül az A8 (részhalmaz) axióma igazolása maradt hátra. Legyen az $x \in N$ az a halmaz, aminek egy definiálható részhalmazát nézzük, $\varphi(u, w_1, \dots, w_n)$ a formula, és w_1, $\dots$, w_n további N-beli paraméterek. Az x egy öröklődően szimmetrikus neve legyen $\dot{x}$, a paraméterek szimmetrikus nevei pedig $\dot{w}_i$, végül $H \in \mathcal{F}$ a normál filternek olyan eleme, ami az $\dot{x}$ és az összes $\dot{w}_i$ stabilizátorának is része. Ezért ha $\pi \in H$, akkor tetszőleges $p \in P$ feltételre és b névre

$$p \Vdash \varphi^N(b, \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n) \Leftrightarrow \pi p \Vdash \varphi^N(\pi b, \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n),$$

továbbá ha $\langle b, p\rangle \in \dot{x}$, akkor persze $\langle \pi b, \pi p\rangle \in \dot{x}$ is igaz.

Álljon az a név mindazokból a $\langle b, q\rangle$ párokból, melyekre $\langle b, p\rangle \in \dot{x}$, $q \leq p$ és $q \Vdash \varphi^N(b, \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n)$. Az a elemeinek első koordinátái öröklődően szimmetrikusak (mert $\dot{x}$ öröklődően szimmetrikus), továbbá ha $\pi \in H$, akkor $\langle \pi b, \pi q\rangle \in a$ is igaz, vagyis a stabilizátora bővebb H-nál és így $\mathcal{F}$-beli. Ezért az a név is öröklődően szimmetrikus, vagyis $i_G(a) \in N$.

Állítjuk, hogy $i_G(a)$ az x-nek pontosan azokból az y elemeiből áll, amikre $N \models \varphi(y, w_1, \dots, w_n)$, amivel igazoljuk, hogy N-ben a részhalmaz axióma igaz. Egyrészt világos, hogy $i_G(a)$ minden y eleme egyúttal eleme x-nek is, továbbá $M[G] \models \varphi^N(y, w_1, \dots, w_n)$ (hiszen ezt a megfelelő q forszolja), vagyis $N \models \varphi(y, w_1, \dots, w_n)$. Fordítva, ha $y \in x$ ilyen elem, akkor van $\langle b, p\rangle \in \dot{x}$ és $q \leq p$, hogy q, $p \in G$, $i_G(b) = y$ valamint

$$q \Vdash \varphi^N(b, \dot{w}_1, \dots, \dot{w}_n).$$

Ezek szerint $\langle b, q\rangle \in a$ és $q \in G$, vagyis $y = i_G(b) \in i_G(a)$. ■

Az x halmazról azt mondjuk, hogy *véges*, ha van $n \in \omega$, és egy f kölcsönösen egyértelmű leképezés x és n között. Világos, hogy „végesnek lenni” abszolút tetszőleges tranzitív $\in$-modellre, tehát például egy M-beli halmaz egyszerre véges M-ben, N-ben és $M[G]$-ben is. Egy halmaz *végtelen*, ha nem véges.

Az x halmaz *Dedekind-véges*, ha az ω nem képezhető be injektív módon x-be. A halmazelmélet egyik első tétele, hogy minden végtelen halmaznak van megszámlálható része, vagyis minden végtelen halmaz Dedekind-végtelen. A bizonyításhoz a kiválasztási axiómát használtuk, megmutatjuk, hogy ez az állítás a kiválasztási axióma nélkül nem igaz.

Megjegyezzük, hogy x megszámlálható, ha van x és ω között egy kölcsönösen egyértelmű leképezés. Egy megszámlálható halmaz minden része vagy megszámlálható vagy véges, ennek igazolásához nincsen szükség a kiválasztási axiómára.

7.8. Tétel (Cohen) *Van permutációmodell és abban egy x halmaz, amelyik végtelen, ámde Dedekind-véges.*

Bizonyítás Az x halmaz az ω részhalmazainak lesz egy halmaza. Ehhez a P kényszerképzet elemei az $\omega\times\omega$ véges részhalmazait $\{0,1\}$-be képező véges függvények lesznek. A kiterjesztés a szokásos: p kiterjeszti q-t, ha p függvényként kiterjeszti q-t. Legyen $G\subset P$ a generikus filter, és $g=\bigcup G$, természetesen g olyan függvény, ami $\omega\times\omega$-t képezi $\{0,1\}$-be, Legyen

$$x_n \overset{\text{def}}{=} \{i\in\omega : g(n,i)=1\},$$

továbbá $y\overset{\text{def}}{=}\{x_n : n\in\omega\}$. Világos, hogy y végtelen halmaz $M[G]$-ben, és így N-ben is minden N permutációmodellre. Keresünk az x_n és y halmazoknak neveket. Ezek a következők lesznek:

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \{\langle\check{\imath},p\rangle : i\in\omega,\ p\in P,\ p(n,i)=1\},$$
$$b \overset{\text{def}}{=} \{\langle a_n,p\rangle : n\in\omega,\ p\in P\}.$$

Legyen $\pi:\omega\to\omega$ az ω egy permutációja, ezt terjesszük ki P-re a következőképpen: $\langle n,i\rangle\in\mathrm{Dom}(p)$ pontosan akkor, ha $\langle\pi n,i\rangle\in\mathrm{Dom}(\pi p)$, és $\pi p(\pi n,i)=p(n,i)$. Ez P-nek is egy permutációja, az ezek által alkotott csoport lesz J. Legyen még $e\subset\omega$ az ω egy részhalmaza, és álljon H_e azokból a π permutációknak a P-re való kiterjesztéseiből, amelyek e mindegyik elemét helybenhagyják: $\pi(n)=n$ minden $n\in e$-re. Persze H_e csoport, $H_{e_1}\cap H_{e_2}=H_{e_1\cup e_2}$ és $H_e=\pi H_{\pi e}\pi^{-1}$. Ezért ha $\mathcal{F}$ a J-nek azon K részcsoportjaiból áll, melyekhez van olyan $e\subset\omega$ *véges*, hogy $K\supset H_e$, akkor $\mathcal{F}$ egy normálfilter.

Legyen $N=M[G]/\mathcal{F}$, valamint π a P-nek egy J-beli permutációja, ekkor könnyen ellenőrizhetően $\pi a_n=a_{\pi n}$ és $\pi b=b$, vagyis $\mathrm{Stab}(a_n)\supset H_{\{n\}}$, és $\mathrm{Stab}(b)\supset J$. Így a_n és b is öröklődően szimmetrikus, ami szerint $x_n=i_G(a_n)\in N$ valamint $y=i_G(b)\in N$.

Az állítjuk, hogy y Dedekind-véges N-ben. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy N-ben nem létezik $f:\omega\to y$ injektív beképezés. Ha mégis így volna, akkor lenne ennek a függvénynek egy c öröklődően szimmetrikus neve, továbbá mivel f az $M[G]$-ben is egy injektív beképezés, olyan $p\in P$, ami ezt forszolja:

(10) $$p\Vdash \text{„}c \text{ injektív beképezés } \check{\omega}\text{-ről } b\text{-be''}$$

Legyen $e\subset\omega$ olyan véges halmaz, amire H_e része c stabilizátorának, továbbá $\pi\in H_e$ esetén $\pi p=p$ (vagyis e-be be kell vennünk az összes olyan n számot, amire $\langle n,i\rangle\in\mathrm{Dom}(p)$ valamilyen i-vel). Most p-nek van olyan p_0 kiterjesztése, ami kiforszolja, hogy az $f=i_G(c)$ függvény melyik x_n értéket veszi fel a 0 helyen, ennek olyan p_1 kiterjesztése, ami megmondja, hogy $f(1)$ micsoda, stb. Mivel p azt is forszolja, hogy az f értékei mind különbözők, azért lesz olyan $i \in \omega$ természetes szám, $p_i \leq p$, hogy p_i eldönti $f(i)$ értékét és az nincs e-ben, vagyis van $n \notin e$, amire p_i forszolja, hogy $f(i) = x_n$:

$$p_i \Vdash c(\check{\imath}) = a_n. \tag{11}$$

Legyen most n' olyan n-től különböző természetes szám, ami sem e-ben, sem p_i értelmezési tartományában első koordinátaként nem szerepel. A π permutáció legyen az, ami n-et és n'-t felcseréli, ω összes többi elemét helybenhagyja. Erre a π-re $\pi p = p$, π benne van c stabilizátorában, tehát $\pi c = c$, valamint a $\pi a_n = a_{\pi n}$. (11) szerint $\pi p_i \Vdash \pi c(\check{\imath}) = \pi a_n$, vagyis $\pi p_i \Vdash c(\check{\imath}) = a_{\pi n}$.

Most könnyű ellenőrizni, hogy p_i és πp_i kompatibilisek, mindkettő kiterjesztése p-nek. Legyen $q \leq p$ közös kiterjesztésük. Ekkor q (10) szerint forszolja, hogy c injektív függvény, másrészt (11) szerint azt, hogy az $\check{\imath}$ helyen az a_n és az $a_{\pi n}$ értékeket is felveszi, vagyis $q \Vdash a_n = a_{\pi n}$. Ez viszont ellentmondás, hiszen tetszőleges generikus modellben $n \neq n'$ esetén a_n és $a_{n'}$ interpretáltja különböző. ■

Az ω részhalmazai és a valós számok között viszonylag egyszerű egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíteni, ehhez a kiválasztási axiómára nincs szükség (bár bizonyos nehézségeket okoz annak definiálása, hogy mik is azok a valós számok). A fenti konstrukcióban ω részhalmazainak adtuk meg egy végtelen, ámde Dedekind-véges részhalmazát, ezért ez egy füst alatt valós számoknak is egy ilyen részét adja.

7.10. Következmény *Van a valós számoknak Y részhalmaza és $a \notin Y$, hogy Y torlódik a-hoz, de nem választható ki Y-ból olyan részsorozat, ami a-hoz konvergálna.*

Bizonyítás Legyen Y az előzőek szerint létező végtelen és Dedekind-véges halmaz. Az Y elemeiből alkotott tetszőleges sorozatnak valahonnan kezdve ugyanannak kell lennie, hiszen nincs Y-nak megszámlálható része, következésképp nem lehet Y-ból kikonvergálni. Másrészt kell hogy legyen Y-nak torlódási pontja. Ha ugyanis Y minden pontja izolált lenne, akkor felsorolva a racionális végpontú nyílt intervallumokat, Y egy y eleméhez a legkisebb olyan n indexet rendelve, amire y egyedül eleme az n-edik intervallumnak, az Y-t felsorolhatóvá tenné. Ha most ez a torlódási pont nincs Y-ban, akkor készen vagyunk. Ha pedig $a \in Y$, akkor $Y - \{a\}$ és a megfelelő. ■

A kiválasztási axióma nélkül a folytonosság két definíciója sem ekvivalens egymással.

7.11. Következmény *Van olyan f függvény, ami nem folytonos az a pontban, viszont ha x_n tart a-hoz, akkor $f(x_n)$ tart $f(a)$-hoz.*

Bizonyítás Legyen Y az előző következményben a halmaz, legyen $f(x) = 0$ ha $x \in Y$, és $f(x) = 1$ ha $x \notin Y$. Ekkor f nem folytonos az a helyen, hiszen a minden környezetében felvesz 0 értéket, ugyanakkor $f(a) = 1$. Másrészt ha az x_n sorozat konvergál a-hoz, akkor valahonnan kezdve el kell kerülnie Y-t, és így $f(x_n)$ valahonnan kezdve 1. ■