6. fejezet

Első modellek

Legyen M a ZFC-nek egy tranzitív $\in$-modellje, P az M-ben egy kényszerképzet, és $M[G]$ egy generikus bővítés. Minden eszköz rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy megmutassuk: $M[G]$ is ZFC modell. Láttuk, hogy $M[G]$ tranzitív, zárt a $\{\}$-ra, és bővebb M-nél. Ezért $M[G]$-ben automatikusan teljesül az A1 (meghatározottság), A2 (pár), A5 (végtelenség) és az A7 (regularitás) axióma. Mielőtt a többi axiómára rátérnénk, néhány technikai állítást igazolunk, melyeket később sokszor fel fogunk használni.

6.1. Állítás *Álljon P-nek az M-beli $\{p_i : i \in I\}$ része páronként inkompatibilis elemekből, és legyen $\{a_i : i \in I\}$ neveknek egy ugyancsak M-beli halmaza. Ekkor van olyan a név, hogy $p_i \Vdash a = a_i$.*

Bizonyítás Álljon a mindazokból a $\langle b, p\rangle$ párokból, melyekhez található a megadott nevek között egy a_i és abban $\langle b, q\rangle \in a_i$, hogy $p \leq q$ és $p \leq p_i$. Állítjuk, hogy a jó. Ehhez a forszolás definíciója miatt elegendő megmutatnunk, hogy ha G olyan generikus filter, ami p_i-t tartalmazza, akkor $i_G(a) = i_G(a_i)$. Mivel a p_i elemek páronként inkompatibilisek, azért közülük legfeljebb egy lehet G-ben, vagyis ha $p_i \in G$, akkor az összes többi $j \neq i$-re $p_j \notin G$, és így nincs G-ben egyetlen $p \leq p_j$ sem. Amikor tehát kiszámítjuk $i_G(a)$-t, a-nak csak olyan $\langle b, p\rangle$ elemei jönnek szóba, amelyeknél $p \leq p_i$. Ezért ilyenkor van olyan $\langle b, q\rangle \in a_i$, amire még $p \leq q$.

Ha tehát $p \in G$, vagyis $i_G(b) \in i_G(a)$, akkor $p \leq q$ miatt $q \in G$, és ezért $\langle b, q\rangle \in a_i$ miatt $i_G(b) \in i_G(a_i)$. Fordítva, ha $i_G(b) \in i_G(a_i)$, vagyis $\langle b, q\rangle \in a_i$ és $q \in G$, akkor q és p_i mindketten G-beliek, tehát van olyan $p \in G$, ami q-nak és p_i-nek is kiterjesztése. Ám ekkor $\langle b, p\rangle \in a$, és így $i_G(b) \in i_G(a)$ is teljesül. Összefoglalva $i_G(a) = i_G(a_i)$, ahogyan kívántuk. ∎

6.2. Állítás *Legyen a egy név, és x egy olyan $M[G]$-beli halmaz, amire $x \subset i_G(a)$. Ekkor van x-nek olyan neve, melynek minden $\langle b, p\rangle$ eleméhez található $q \geq p$, hogy $\langle b, q\rangle \in a$.*

Bizonyítás Legyen x egy neve $\dot{x}$, és álljon a c név mindazokból a $\langle b, p\rangle$ párokból, melyekhez található olyan $\langle b, q\rangle \in a$, amire egyrészt $p \leq q$, másrészt $p \Vdash b \in \dot{x}$. Ez a c nyilván teljesíti az állítás követelményeit, csak annyit kell ellenőriznünk, hogy szintén x-nek a neve.

Tegyük fel először, hogy $i_G(b) \in i_G(c)$, vagyis $\langle b, p\rangle \in c$ és $p \in G$. Ekkor $p \Vdash b \in \dot{x}$ miatt $i_G(b) \in i_G(\dot{x})$, amiből $i_G(c) \subset x$ adódik.

Fordítva tegyük fel, hogy $q \in G$ és $\langle b, q \rangle \in a$, továbbá $i_G(b)$ még x-nek is eleme. Ekkor G-nek valamelyik r eleme ezt forszolja, vagyis $r \Vdash b \in \dot{x}$. Mivel q és r is G-beli, van közös G-beli p kiterjesztésük; erre $p \leq q$ valamint $p \Vdash b \in \dot{x}$. Ezért $\langle b, p \rangle \in c$ és $p \in G$ miatt $i_G(b) \in i_G(c)$. Következésképp x-nek minden $i_G(a)$-beli eleme egyúttal eleme $i_G(c)$-nek is. Ez az előbb igazoltakkal együtt mutatja, hogy $x = i_G(c)$, ahogyan állítottuk. ■

A tétel egy különösen sokat használt speciális esete, mikor a majoráló halmaz M-beli, aminek a kanonikus nevét használjuk. Erre az esetre még egy kicsivel többet mondó állítást is igazolunk.

6.3. Állítás *Legyen x az $M[G]$-nek olyan eleme, ami része egy $y \in M$ halmaznak. Ekkor x-nek van olyan neve, melynek minden eleme $\langle \check{z}, p \rangle$ alakú valamilyen $z \in y$-nal; továbbá minden $z \in y$-ra azon p feltételek halmaza, melyekre $\langle \check{z}, p \rangle$ ebben a névben benne van, páronként inkompatibilis elemekből áll.*

Bizonyítás Mint előbb, legyen most is $\dot{x}$ az x egy neve, és adott $z \in y$-ra tekintsük P-nek az $A_z = \{p \in P : p \Vdash z \in \dot{x}\}$ részét. Mivel ha p forszol valamit, annak minden kiterjesztése is forszolja, ezért A_z nyílt halmaz. Legyen Q_z az A_z-nek egy maximális páronként inkompatibilis elemekből álló része. A 2.9. állítás szerint RO(Q_z) és RO(A_z) megegyezik, vagyis a 4.8. lemma szerint G egyszerre metszi el Q_z-t és A_z-t. Legyen

$$c = \{\langle \check{z}, q \rangle \, : \, z \in y, \; q \in Q_z\}.$$

Minden $z \in y$-ra $z \in i_G(\dot{x})$ pontosan akkor, ha van $p \in G$, amire $p \Vdash \check{z} \in \dot{x}$, vagyis ha $G \cap A_z \neq \emptyset$. Ez pontosan akkor igaz, ha $G \cap Q_z \neq \emptyset$, vagyis ha $z \in i_G(c)$. Ezek szerint a keresett név éppen c. ■

6.4. Állítás *Tegyük fel, hogy $p \Vdash \exists x \, \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$. Ekkor van olyan b név, amire $p \Vdash \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$.*

Bizonyítás A tétel állításánál többet bizonyítunk, nevezetes azt, hogy van olyan b név is, amire

$$[\![\, \exists x \, \varphi(x, a_1, .., a_n) \,]\!] = [\![\, \varphi(b, a_1, \ldots, a_n) \,]\!].$$

A 4.13. definiálhatósági tétel bizonyításában láttuk, hogy van neveknek olyan $B \in M$ halmaza, hogy ha $A_b = [\![\, \varphi(b, a_1, \ldots, a_n) \,]\!]$, akkor

$$[\![\, \exists x \, \varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \,]\!] = \sum \{A_b : b \in B\}.$$

Legyen $Q = \{p_i : i \in I\} \subset P$ egy maximális páronként inkompatibilis elemekből álló része az $A = \bigcup \{A_b : b \in B\}$ nyílt halmaznak. A 2.9. állítás szerint RO(Q) megegyezik az A_b halmazok legkisebb felső korlátjával, ami nem más mint RO(A).

Minden $i \in I$-re $p_i \in \bigcup \{A_b \, : \, b \in B\}$, tehát van hozzá olyan $b_i \in B$ név, hogy $p_i \in A_{b_i}$, ami azt jelenti, hogy $p_i \Vdash \varphi(b_i, \vec{a})$. A p_i-k páronként inkompatibilisek, tehát a 6.1. állítás szerint van olyan b név, hogy $p_i \Vdash b = b_i$. Állítjuk, hogy ez a b jó. Ehhez elegendő azt megmutatnunk, hogy ha $M[G] \models \exists x\, \varphi(x, i_G(\vec{a}))$, akkor $M[G] \models \varphi(i_G(b), i_G(\vec{a}))$. Ha e kettő közül az első teljesül, akkor persze

$$G \cap [\![\, \exists x\, \varphi(x, \vec{a})\,]\!] = G \cap \sum\{A_b : b \in B\} \neq \emptyset.$$

A 4.8. lemma szerint G pontosan akkor metszi el a $\sum\{A_b : b \in B\} = \mathrm{RO}(A) = \mathrm{RO}(Q)$ halmazt, ha Q-t is elmetszi, tehát van olyan $p_i \in Q$, hogy $p_i \in G$. Mivel egyrészt $p_i \in A_{b_i}$, tehát $G \cap [\![\, \varphi(b, \vec{a})\,]\!] \neq \emptyset$, másrészt $p_i \Vdash b = b_i$, azért egyrészt $M[G] \models \varphi(i_G(b_i), i_G(\vec{a}))$, másrészt $M[G] \models i_G(b) = i_G(b_i)$. Vagyis $M[G] \models \varphi(i_G(b), i_G(\vec{a}))$, ahogyan kívántuk. ■

1. A generikus ZFC modell

Az $M[G]$ generikus modell tranzitív és zárt a $\{\}$-ra. Ezért a ZFC axómái közül az A1 (meghatározottság), A2 (pár), A5 (végtelenség), és az A7 (regularitás) biztosan teljesül. Annak igazolásához, miszerint $M[G]$ egy ZFC modell, még a következőket kell ellenőriznünk:

A3′	(unió)	létezik $\cup x$-nél bővebb halmaz
A4′	(hatványhalmaz)	létezik $\mathcal{P}(x)$-nél bővebb halmaz
A6″	(gyűjtés)	ha x elemeihez léteznek adott tulajdonságú elemek, akkor ilyeneket egy y halmazba is össze lehet gyűjteni
A8	(részhalmaz)	halmaz és osztály metszete halmaz
C	(kiválasztás)	minden halmazon létezik kiválasztási függvény

Lássuk tehát ezeket sorban.

A3′ (unió): legyen $x \in M[G]$ tetszőleges, és $\dot{x}$ az x egy neve. Keresnünk kell egy olyan nevet, aminek interpretáltja bővebb az $\cup x$ halmaznál. Legyen $a \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle b, p\rangle$: van olyan $q \in P$ és $\langle c, r\rangle \in \dot{x}$, amire $\langle b, q\rangle \in c\}$, vagyis $\dot{x}$ összes potenciális elemének összes potenciális elemét P minden elemével párosítjuk. Mivel $i_G(\dot{x}) = \{i_G(c) : \langle c, r\rangle \in \dot{x}$ és $r \in G\}$, azért $i_G(a)$ az $\cup x$ összes potenciális elemét tartalmazza, és így bővebb nála.

A4′ (hatványhalmaz): létezik $\mathcal{P}(x)$-nél bővebb halmaz. Legyen az x neve $\dot{x}$. A 6.2. állítás szerint x minden részhalmazának van olyan neve is, melyben első koordinátaként kizárólag $\dot{x}$ elemeinek első koordinátái szerepelnek. Egy ilyen név részhalmaza a $\mathrm{Dom}(\dot{x}) \times P$ halmaznak. Legyen

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle b, p\rangle \,:\, p \in P \text{ és } b \subset \mathrm{Dom}(\dot{x}) \times P\}.$$

Az $i_G(a)$ kiszámításakor x összes részhalmazának a fenti típusú neve előkerül, ezért $i_G(a)$ elemként tartalmazza x összes részhalmazát, ahogyan kívántuk.

A6″ (gyűjtés): legyen $\varphi(u, v, w_1, \dots, w_n)$ a halmazelmélet egy formulája, a $w_i \in M[G]$ tetszőleges paraméter, $x \in M[G]$ pedig adott. Olyan $y \in M[G]$ halmazt keresünk, amire tetszőleges $u \in x$-hez ha létezik egyáltalán $v \in M[G]$, amire $M[G] \models \varphi(u, v, w_1, \dots, w_n)$, akkor ilyen v már y-ban is van. A jelölések egyszerűsítése miatt a továbbiakban csak egyetlen paraméter jelenlétét tételezzük fel. Rögzítsük ennek a w paraméternek egy $\dot{w}$ nevét, az x-nek pedig egy $\dot{x}$ nevét. Az összes $\langle b, q\rangle \in \dot{x}$ párra és $p \leq q$-ra nézzük mindazokat a c neveket, amikre

(1) $$p \Vdash \varphi(b, c, \dot{w}).$$

Az M-ben igaz gyűjtési axióma szerint rögzített $\dot{x}$, $\dot{w}$ és q mellett létezik neveknek olyan (M-beli) C halmaza, hogy ha (1)-et teljesítő c név egyáltalán létezik, akkor létezik C-ben is. Legyen végül

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle c, p\rangle \,:\, \text{van } \langle b, q\rangle \in \dot{x} \text{ és } c \in C, \text{ hogy } p \leq q \text{ valamint } p \Vdash \varphi(b, c, \dot{w})\}.$$

Állítjuk, hogy $y = i_G(a)$ megfelelő elem lesz $M[G]$-ben. Legyen $u = i_G(b)$ az x-nek egy eleme úgy, hogy $\langle b, q\rangle \in \dot{x}$ és $q \in G$, továbbá tegyük fel, hogy valamilyen $v \in M[G]$ halmazra $M[G] \models \varphi(u, v, w)$. A definiálhatósági tétel szerint ekkor van $r \in G$ ami ezt forszolja, vagyis $r \Vdash \varphi(b, \dot{v}, \dot{w})$. Az r és q mindketten G-beliek, ezért van $p \in G$, ami q és r alatt is van, ezért többek között p is forszolja a $\varphi(b, \dot{v}, \dot{w})$ állítást. A C definíciója miatt ekkor van $c \in C$ név, hogy egyrészt $p \Vdash \varphi(b, c, \dot{w})$, másrészt $\langle c, p\rangle \in a$. Most $p \in G$ miatt $i_G(c) \in i_G(a) = y$, és $M[G] \models \varphi(i_G(b), i_G(c), i_G(\dot{w}))$, vagyis az $i_G(c) \in y$ elemre $M[G] \models \varphi(u, i_G(c), w)$, ahogyan kívántuk.

A8 (részhalmaz): legyen ismét x az $M[G]$ egy tetszőleges eleme, valamint $\varphi(u, w)$ egy formula, az x illetve a w paraméter egy–egy neve $\dot{x}$ illetve $\dot{w}$. Az x azon u elemeire vagyunk kíváncsiak, melyek teljesítik a $\varphi(u, w)$ formulát. Legyen

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle b, p\rangle \,:\, \langle b, q\rangle \in \dot{x},\ p \leq q \text{ és } p \Vdash \varphi(b, \dot{w})\}.$$

Állítjuk, hogy $i_G(a)$ éppen x megfelelő elemeinek halmaza. Egyrészt $i_G(a)$ részhalmaza x-nek, hiszen ha $\langle b, p\rangle \in a$, és $p \in G$, akkor valamilyen $p \leq q$-ra $\langle b, q\rangle \in \dot{x}$ és persze $q \in G$ is teljesül. Másrészt ha $\dot{x}$ valamelyik $\langle b, q\rangle$ elemére $q \in G$ és $M[G] \models \varphi(i_G(b), w)$, akkor van $r \in G$, ami ez utóbbi állítást forszolja: $r \Vdash \varphi(b, \dot{w})$; továbbá van $p \in G$, ami mind q mind r alatt van. Erre a p-re az a definíciója miatt $\langle b, p\rangle \in a$, tehát $i_G(b) \in i_G(a)$.

C (kiválasztási axióma): minden halmazon létezik kiválasztási függvény. E helyett egyszerűbb lesz a kiválasztási axióma sok ekvivalense közül azt igazolnunk, hogy minden halmaz jólrendezhető. Legyen $x \in M[G]$ tetszőleges, megadunk $M[G]$-ben egy olyan f függvényt, ami x elemeihez rendszámok diszjunkt halmazait rendeli. Ez elég, ugyanis a rendszámok rendezése $M[G]$-ben is jólrendezés, következésképp minden $u \in x$-re $f(u)$-nak van minimális eleme. Így

$$u < v \stackrel{\text{def}}{\iff} \min f(u) < \min f(v)$$

értelmes, és az x halmaz elemeit jólrendezi.

Legyen tehát $\dot{x}$ az x egy neve, és tegyük fel, hogy $\dot{x} \in V_\alpha^{P,M}$. Ekkor x összes elemének van $V_\alpha^{P,M}$-ba eső neve. Mivel M-ben igaz a kiválasztási axióma, azért van olyan M-beli g függvény, ami $V_\alpha^{P,M}$ elemeihez különböző rendszámokat rendel. Definiáljuk $u \in x$-re rendszámoknak egy nem üres $f(u)$ halmazát a következő módon:

$$f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{g(b)\ :\ b \in V_\alpha^{P,M} \text{ és } i_G(b) = u\}.$$

Mivel már tudjuk, hogy $M[G]$-ben a kiválasztási axióma kivételével a halmazelmélet összes többi axiómája igaz, továbbá $G \in M[G]$, azért i_G egy M-beli operáció. Következésképp ez a definíció valóban egy $M[G]$-beli f függvényt ad meg.

Az axiómák végére értünk, igazoltuk, hogy minden generikus bővítés modellje ZFC-nek.
■

Egy adott x halmazhoz tartozó kiválasztási függvényt közvetlenül is megkonstruálhatjuk. Ehhez először definiáljuk egy párnak illetve egy rendezett párnak a kanonikus nevét:

$$\mathrm{P}(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a,p\rangle\ :\ p \in P\} \cup \{\langle b,p\rangle\ :\ p \in P\};$$
$$\mathrm{RP}(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{P}(\mathrm{P}(a,a),\mathrm{P}(a,b))$$

annak megfelelően, hogy $\langle x,y\rangle = \{\{x\},\{x,y\}\}$. Világos, hogy ezek tényleg a megfelelő halmazok nevei.

Legyen még a egy tetszőleges név, a 6.4. állítás szerint létezik hozzá olyan a^* név, amire $[\![\exists x\,(x \in a)]\!] = [\![a^* \in a]\!]$, vagyis tetszőleges G generikus filterre ha $M[G] \models$ „$i_G(a)$ nem üres," akkor az $i_G(a^*)$ eleme $i_G(a)$-nak.

Legyen $x \in M[G]$ egy tetszőleges halmaz, ehhez keresünk egy kiválasztási függvényt. Legyen $\dot{x}$ az x egy neve, és soroljuk fel $\dot{x}$ elemeit M-ben:

$$\dot{x} = \{\langle a_\xi, p_\xi\rangle : \xi < \alpha\}$$

valamilyen $\alpha \in M$ rendszámra. (Ezt megtehetjük, hiszen M-ben igaz a kiválasztási axióma.) Persze minden $\xi \leq \alpha$-ra $x_\xi = \{\langle a_\eta, p_\eta\rangle : \eta < \xi\}$ egy név. Az alábbi név interpretáltja fogja megadni a keresett kiválasztási függvényt:

$$b = \left\{\langle \mathrm{RP}(a_\xi, a_\xi^*), q\rangle\ :\ q \leq p_\xi \text{ és } q \Vdash a_\xi \notin x_\xi\right\}.$$

Legyen tehát $f = i_G(b)$. Elsőként azt igazoljuk, hogy f egy függvény és értelmezési tartományának minden nem-üres y elemére $f(y) \in y$. Világos, hogy f elemei az $\langle i_G(a_\xi), i_G(a_\xi^*)\rangle$ rendezett párok közül kerülnek ki. Ha most $\langle i_G(a_\xi), i_G(a_\xi^*)\rangle$ eleme f-nek, akkor van $q \in G$, amire $\langle \mathrm{RP}(a_\xi, a_\xi^*), q\rangle \in b$. Ez a q feltétel azt is forszolja, hogy a_ξ interpretáltja nem eleme az $\{\langle a_\eta, p_\eta\rangle : \eta < \xi\}$ név interpretáltjának. Ha valamilyen $\eta < \xi$-re $i_G(a_\eta)$ bekerült f értelmezési tartományába, akkor az $i_G(\{\langle a_\eta, p_\eta\rangle : \eta < \xi\})$ halmazban is benne van. Márpedig $i_G(a_\xi)$ nem eleme ennek a halmaznak, tehát $i_G(a_\xi)$ az f értelmezési tartományának egy új eleme. Ezért az f-be kerülő párok első elemei különböznek: f tényleg függvény. Azt pedig, hogy $i_G(a_\xi^*) \in i_G(a_\xi)$ feltéve hogy ez utóbbi nem üres, az a_ξ^* definíciója alapján következik.

Azt kell még megmutatnunk, hogy x minden eleme benne van f értelmezési tartományában. Legyen $y \in x$, és nézzük azokat a $\xi < \alpha$ rendszámokat, amikre y éppen az a_ξ interpretáltja. Ilyen ξ rendszám létezik, a rendszámok még $M[G]$-ben is jólrendezettek, ezért létezik *minimális* ilyen $\xi < \alpha$ is. Következésképp y nincs benne az $\{\langle a_\eta, p_\eta\rangle : \eta < \xi\}$ név interpretáltjában:

$$M[G] \models i_G(a_\xi) \notin i_G(\{\langle a_\eta, p_\eta\rangle : \eta < \xi\}).$$

Van G-nek olyan q eleme, ami ezt az állítást forszolja, és $p_\xi \in G$ miatt ezt az elemet p_ξ alatt is választhatjuk. Az $\langle \mathrm{RP}(a_\xi, a_\xi^*), q\rangle$ pár így b-ben van, $q \in G$, tehát $i_G(a_\xi)$ eleme f értelmezési tartományának, ahogyan kívántuk.

2. A kontinuum hipotézis

Elsőként olyan generikus modellt szeretnénk előállítani, amiben a kontinuum hipotézis teljesül, vagyis $M[G] \models$ „$\mathcal{P}(\omega)$ számossága ω_1." Legyen az M alapmodellben a kontinuum κ, vagyis κ az M-beli rendszámok közül a legkisebb, amihez található egy M-beli függvény, ami ω-nak M-beli részhalmazai és κ között létesít kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Ezt a κ-t fogjuk *leomlasztani* ω_1*-re*. Ez azt jelenti, hogy olyan P kényszerképzetet választunk, hogy a G generikus filter segítségével $M[G]$-ben rá tudjuk képezni az M-beli ω_1-et κ-ra. Az omlasztás miatt $M[G]$-ben κ és ω_1^M ugyanakkora számosságú lesz. Ha az omlasztást úgy is meg tudjuk csinálni, hogy $M[G]$-ben *ne legyen* ω*-nak új részhalmaza*, vagyis $\mathcal{P}^M(\omega) = \mathcal{P}^{M[G]}(\omega)$ álljon, akkor készen vagyunk. $M[G]$-ben ugyanis ω összes részhalmaza és κ között létezik kölcsönösen egyértelmű leképezés (hiszen ilyen M-ben is létezik), továbbá $M[G]$-ben κ és ω_1^M ugyanakkora számosságú. Ezért $M[G]$-ben a kontinuum legfeljebb ω_1^M, és persze nagyobb mint ω. Ugyanakkor $M[G]$*-ben nincsenek új számosságok*. Ugyanis M-ben és $M[G]$-ben ugyanazok a rendszámok, és egy α rendszám számosság, ha nincs olyan függvény, ami α és egy nála kisebb rendszám között kölcsönösen egyértelmű leképezést valósítana meg. Márpedig ha $M[G]$-ben nincs ilyen függvény, akkor a nála szűkebb M-ben sem lehet. Ezért

$$\omega_1^{M[G]} \leq (2^\omega)^{M[G]} \leq \omega_1^M \leq \omega_1^{M[G]},$$

tehát $M[G]$-ben igaz a kontinuum hipotézis.

Lássuk az omlasztó kényszerképzetet. Az M modellben dolgozunk, a definíció M-ben értendő. Álljon P mindazokból az (M-ben) megszámlálható függvényekből, melyek értelmezési tartománya része ω_1-nek, értékkészlete pedig κ-nak:

$$P = \{p \text{ függvény} : |p| \leq \omega,\ \mathrm{Dom}(p) \subset \omega_1,\ \mathrm{Range}(p) \subset \kappa\}.$$

A rendezést értelemszerűen definiáljuk: p kiterjesztése q-nak, ha p mint függvény kiterjeszti q-t. Legyen $G \subset P$ tetszőleges M-generikus filter. Mivel G páronként kompatibilis függvényekből áll, azért ezen függvények uniója, vagyis $g = \bigcup G$ is függvény lesz. Minden $\alpha < \omega_1^M$-re a $D_\alpha = \{p \in P : \alpha \in \mathrm{Dom}(p)\}$ halmaz M-beli és sűrű P-ben, hiszen tetszőleges P-beli függvényt ki tudunk úgy terjeszteni, hogy még α-n is értelmezve legyen. Hasonlóan $\xi < \kappa$-ra az $E_\xi = \{p \in P : \xi \in \mathrm{Range}(p)\}$ szintén M-beli és sűrű. G tehát ezen halmazok mindegyikét elmetszi, vagyis G valamelyik eleme értelmezve van az α helyen, valamelyik eleme pedig felveszi a ξ értéket. Ez pedig azt mutatja, hogy g értelmezési tartománya éppen ω_1^M, értékkészlete pedig az egész κ. Világos, hogy $g = \bigcup G$ eleme $M[G]$-nek, tehát az omlasztó leképezésünk megvan: g ráképezi az ω_1 rendszámot a κ rendszámra, és így $M[G]$-ben ω_1^M és κ ugyanolyan számosságú.

Azt kell még látnunk, hogy $M[G]$-ben nincs ω-nak új részhalmaza. Minden $M[G]$-beli halmaznak van neve, legyen mondjuk $i_G(a)$ az ω-nak egy részhalmaza. Mivel

$M[G] \models i_G(a) \subset \omega$, azért van olyan $p \in G$ ami ezt forszolja: $p \Vdash a \subset \check{\omega}$. Dolgozzunk most M-ben. Az adott $p \in P$ és a névhez tekintsük a következő M-ben definiált halmazt:

$$A = \{r \leq p \,:\, \text{van olyan } M\text{-beli } X \subset \omega,\text{ amire } r \Vdash a = \check{X}\}.$$

Állítjuk, hogy A sűrű p alatt. Valóban, legyen $q \leq p$ tetszőleges. A 4.15. tétel utolsó pontja szerint $q \Vdash \check{0} \in a \vee \check{0} \notin a$, minthogy ez mindig igaz állítás. Ugyanezen tétel előző pontja szerint q-nak van olyan $q_0 \leq q$ kiterjesztése, ami *eldönti*, hogy e két lehetőség közül melyik következik be, vagyis *vagy* $q_0 \Vdash \check{0} \in a$, *vagy* $q_0 \Vdash \check{0} \notin a$. Ugyanígy, $q_0 \Vdash \check{1} \in a \vee \check{1} \notin a$ miatt van $q_1 \leq q_0$, ami eldönti, hogy 1 benne van-e $i_G(a)$-ban vagy sem, $q_2 \leq q_1$ eldönti 2-t, $q_3 \leq q_2$ eldönti 3-at, stb. Az ilyen tulajdonságú $\langle q_i : i \in \omega\rangle$ sorozatok között van M-beli, hiszen ugyanezt a konstrukciót az M modellben is elvégezhetjük, mert csak M-beli elemekkel és M-ben definiálható fogalmakkal operáltunk. Így van olyan M-beli s halmaz, amire $M \models$ „s a P elemeinek egy olyan csökkenő sorozata, aminek az i-edik eleme eldönti, hogy $\check{\imath} \in a$ vagy sem." Ez pedig egy megfelelő M-beli sorozatot ad. A P elemeiből alkotott ugyancsak M-beli $q_0 \geq q_1 \geq \dots$ sorozat uniója $r = \bigcup\{q_i : i \in \omega\}$ ezért eleme M-nek és így P-nek is, és persze kiterjeszti az összes q_i-t. Legyen

$$X = \{i \in \omega : r \Vdash \check{\imath} \in a\},$$

ez természetesen M-beli, és ha $i \notin X$, akkor $r \Vdash \check{\imath} \notin a$. Mivel r azt is forszolja, hogy a az ω egy részhalmaza, azért $r \Vdash a = \check{X}$, vagyis $r \in A$. Ezzel a q alatt találtunk A-beli elemet, vagyis A tényleg sűrű p alatt.

Mivel A sűrű p alatt és p eleme a G generikus filternek, azért G elmetszi A-t is, mondjuk $r \in A \cap G$. Legyen X az ω-nak az r-hez tartozó M-beli részhalmaza, vagyis amire $r \Vdash a = \check{X}$. $r \in G$ miatt ekkor $M[G] \models i_G(a) = X$, vagyis ω-nak az $i_G(a)$ részhalmaza eleme M-nek. Ezzel bizonyítottuk, hogy $M[G]$-ben ω minden részhalmaza M-beli, és így azt is, hogy $M[G]$-ben igaz a kontinuum hipotézis. ■

A konstrukciónak az a része, melyben megmutattuk, hogy ω-nak nincs új részhalmaza, egy általánosabb tételnek speciális esete. Emlékeztetünk rá, hogy P *κ-teljes*, ha minden legfeljebb κ hosszúságú csökkenő láncnak van alsó korlátja.

6.5. Tétel *Legyen P egy κ-teljes kényszerképzet és $g \in M[G]$ olyan függvény, amire* $\mathrm{Dom}(g) = \kappa$ *és minden $\alpha < \kappa$-ra $g(\alpha) \in M$. Ekkor $g \in M$.*

Bizonyítás Van olyan $y \in M$, ami bővebb $\mathrm{Range}(g)$-nél. Valóban, $V_\alpha^M = V_\alpha^{M[G]} \cap M$ minden $\alpha \in M$ rendszámra, ezért ha $\mathrm{Range}(g)$ rangja α, akkor $\mathrm{Range}(g) \subset V_\alpha^{M[G]} \cap M = V_\alpha^M \in M$. Legyen $\dot{g}$ a g függvény egy neve, valamint $p \in G$ olyan, ami a g ezen tulajdonságait kiforszolja:

$$p \Vdash \text{„}\dot{g} \text{ egy függvény, } \mathrm{Dom}(\dot{g}) = \check{\kappa},\ \mathrm{Range}(\dot{g}) \subset \check{y}\text{”}.$$

Ha most $q \leq p$ és $\alpha < \kappa$, akkor van olyan $q' \leq q$ és $x \in y$, hogy $q' \Vdash \dot{g}(\check{\alpha}) = \check{x}$. Erről a q'-ről azt mondjuk, hogy *eldönti a g értékét az α helyen*. Valóban, ha G' egy tetszőleges q-t tartalmazó generikus, akkor $M[G']$-ben $\dot{g}$ interpretáltja egy κ-n értelmezett y-ba képező függvény, és ezért az α helyen valamilyen y-beli x értéket felvesz. Ha $i_{G'}(\dot{g})(\alpha) = x$, akkor ezt valamilyen $q' \in G'$ kiforszolja, amiről $q \in G'$ miatt feltehetjük, hogy q alatt van.

Definiáljuk ezek után M-ben az alábbi halmazt:

$$A = \{r \leq p \, : \text{ van } M\text{-beli } f : \kappa \to y, \text{ amire } r \Vdash \dot{g} = \check{f}\,\}$$

Ez sűrű p alatt. Legyen ugyanis $q \leq p$ tetszőleges, $q_1 \leq q$ pedig olyan, ami eldönti $\dot{g}(\check{0})$ értékét. Általában $\alpha \leq \kappa$-ra q_α alsó korlátja a $\{q_\beta : \beta < \alpha\}$ csökkenő sorozatnak ha α limesz, és $q_{\alpha+1} \leq q_\alpha$ pedig döntse el $\dot{g}(\check{\alpha})$ értékét. Mint az előbb, most is igaz, hogy a $\langle q_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$ sorozat M-ben is definiálható, ezért feltehető, hogy M-beli. Legyen $r = p_\kappa$ a sorozat összes elemének egy alsó korlátja, és definiáljuk $\alpha < \kappa$-ra az $f(\alpha)$ értékét úgy, hogy ez legyen az egyetlen $x \in y$, amire $q_{\alpha+1} \Vdash \dot{g}(\check{\alpha}) = \check{x}$. Természetesen ez is M-beli definíció, tehát $f \in M$. Mivel $r \Vdash \mathrm{Dom}(\dot{g}) = \check{\kappa}$, és $r \leq q_{\alpha+1}$ miatt $r \Vdash \dot{g}(\check{\alpha}) = f(\alpha)\check{}$, azért $r \Vdash \dot{g} = \check{f}$, és így $r \in A$.

Tehát A tényleg sűrű p alatt, $p \in G$ miatt G elmetszi A-t és így van $r \in G$ és M-beli $f : \kappa \to y$ függvény úgy, hogy $M[G] \models g = f$. Vagyis $g \in M$, ahogyan állítottuk. ■

Ha P ω-teljes, akkor a tétel alapján ω részhalmazainak az $M[G]$-beli karakterisztikus függvényei M-beliek, ezért ω-nak nincs új részhalmaza $M[G]$-ben – ahogyan azt korábban már láttuk. Általában ha P κ-teljes, akkor κ-nak nincsenek $M[G]$-ben új részhalmazai. Sőt, tetszőleges M-beli halmaznak minden legfeljebb ($M[G]$-ben) κ számosságú része is régi. Valóban, egy régi $y \in M$ halmaznak egy része akkor legfeljebb κ számosságú, ha van κ-ból y-ba képező függvény, aminek értékkészlete éppen ez a rész. De ekkor a tétel szerint $g \in M$ és így g értékkészlete is régi.

6.6. Következmény *Legyen P egy κ-teljes kényszerképzet. Ekkor κ^+ és minden ennél kisebb M-beli számosság számosság marad $M[G]$-ben.*

Bizonyítás Legyen $\lambda \leq \kappa$ egy M-beli számosság. Ha λ nem marad számosság $M[G]$-ben, akkor van olyan $\alpha < \lambda$ rendszám és olyan f $M[G]$-beli függvény, ami α és λ között kölcsönösen egyértelmű leképezést ad meg. Ez az f része $\alpha \times \lambda$-nak, márpedig

$$(\alpha \times \lambda)^M = (\alpha \times \lambda)^{M[G]},$$

vagyis f része egy M-beli legfeljebb κ számosságú halmaznak, ezért maga is M-beli. Márpedig M-ben nincs α és λ között kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Ugyanezért $M[G]$-ben még κ^+ is számosság marad. Ellenkező esetben ugyanis κ^+ $M[G]$-ben saját magának κ számosságú része volna, ellentétben azzal, hogy $M[G]$-ben semminek sincs új κ számosságú részhalmaza. ■

Legyen P az a kényszerképzet, ami 2^κ-t leomlasztja κ^+-ra κ számosságú feltételekkel, vagyis

$$P = \{f \text{ függvény} : |f| = \kappa, \mathrm{Dom}(f) \subset \kappa^+, \mathrm{Range}(f) \subset 2^\kappa\},$$

a kiterjesztés a szokásos. Tetszőleges G generikus filterre $\bigcup G$ ráképezi κ^+-t 2^κ-ra, és mivel P κ-teljes, azért $M[G]$-ben κ-nak nincs új részhalmaza. Következésképp $M[G] \models 2^\kappa = \kappa^+$. Ugyanakkor $\lambda < \kappa$-ra λ-nak sincsenek új részhalmazai, ezért $M[G]$-ben 2^λ értéke nem változik ha az legfeljebb κ^+ volt, és κ^+ lesz egyébként:

$$\left(2^\lambda\right)^{M[G]} = \min\left\{\left(2^\lambda\right)^M, \kappa^+\right\}.$$

Így ha először leomlasztjuk 2^ω-t ω_1-re, majd a kapott $M[G_1]$ modellben leomlasztjuk 2^{ω_1}-et ω_2-re, $M[G_1][G_2]$-ben $2^\omega = \omega_1$ és $2^{\omega_1} = \omega_2$ is igaz lesz.

3. A kontinuum hipotézis tagadása

A valós számok és ω részhalmazai között van kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért a szokásoknak megfelelően ω részhalmazaira úgy hivatkozunk, mint „valós számokra.” Olyan modellt szeretnénk készíteni, melyben a valósak számossága nagyobb mint ω_1, esetleg ez egy előre megadott κ számosság legyen.

Elsőként egyetlen valós számmal bővítünk. Az ω egy új részhalmazát szeretnénk előállítani, $\bigcup G$ ennek a részhalmaznak lesz a karakterisztikus függvénye. Álljon a P kényszerképzet azokból a véges függvényekből, melyek értelmezési tartománya része ω-nak, értéke pedig mindenhol vagy 0 vagy 1. p kiterjeszti q-t, ha p mint függvény kiterjeszti q-t. Világos, hogy $i \in \omega$-ra a $D_i = \{p \in P : i \in \mathrm{Dom}(p)\}$ sűrű P-ben, ezért $\bigcup G$ a természetes számok egy $M[G]$-beli részhalmazának karakterisztikus függvénye. ω-nak ezt a részét *Cohen-valós*nak nevezzük.

Egy Cohen-valós soha sincs benne az M alapmodellben. Legyen ugyanis $A \subset \omega$ egy M-beli halmaz, és nézzük a $D_A = \{p \in P : \text{van olyan } i \in \mathrm{Dom}(p) \text{ hogy } p(i) = 0 \text{ és } i \in A, \text{ vagy } p(i) = 1 \text{ és } i \notin A\}$. Világos, hogy D_A sűrű P-ben, hiszen tetszőleges $p \in P$-re vehetünk olyan $i \in \omega$-t, ahol p nincs értelmezve, és p-t az i helyre terjesszük ki ellentétesen az A-val. Ezért $G \cap D_A$ nem üres, vagyis a Cohen-valós és A valamilyen helyen eltér egymástól.

Ennél több is igaz, nevezetesen ha A az ω-nak M-beli része, A is és komplementere is végtelen, akkor a Cohen-valós A-t és komplementerét végtelenben metszi el. Ehhez csak annyit kell látnunk, hogy minden $n \in \omega$-ra azok a $p \in P$-k, melyek biztosítják, hogy mindkét metszet legalább n elemű legyen, sűrű halmazt alkotnak. P-nek ez a része $D_{A,n} = \{p \in P : \text{vannak különböző } i_1, \ldots, i_n \in \mathrm{Dom}(p) \text{ és } j_1, \ldots, j_n \in \mathrm{Dom}(p) \text{ számok, hogy } p(i_k) = 0,\ i_k \in A, \text{ és } p(j_k) = 1,\ j_k \notin A\}$, és persze minden feltétel kiterjeszthető ilyenné.

Ha egy Cohen-valóst adunk az M modellhez, akkor $M[G]$-ben ω-nak kontinuum sok új részhalmaza jelenik meg. Nézzük ugyanis ω-nak az M-beli permutációit, és vegyük ki ennek egy kontinuumos Π részét, amiből két különböző π_1, π_2 permutációt választva $\pi_1 \cdot \pi_2^{-1}$ végtelen sok elemet elmozgat. (A Π halmazt például transzfinit rekurzióval választhatjuk ki, mivel tetszőleges π_1-hez csak megszámlálhatóan sok olyan π_2 van, ami nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.) Ha most $C \subset \omega$ egy Cohen-valós, $\pi \in \Pi$ egy permutáció, akkor C-nek a π szerinti képe, amit természetesen jogosulatlanul, de félre nem érthető módon $\pi(C)$-vel jelölünk, nem lehet M-ben. Egy M-beli halmazra ugyanis a szintén M-beli π^{-1} permutációt alkalmazva szintén M-beli halmazt kapunk, már pedig C nem M-beli. Ha pedig π_1 és π_2 a Π-nek két különböző eleme, akkor $\pi_1(C)$ és $\pi_2(C)$ különbözőek, és így kapjuk ω-nak kontinuum sok új részhalmazát.

Az, hogy $\pi_1(C)$ és $\pi_2(C)$ különbözők abból következik, hogy azok a $p \in P$ elemek, melyek már biztosítják hogy $\pi_1(C)$ és $\pi_2(C)$ különböző legyen, sűrű halmazt alkotnak. A Π választása miatt különböző π_1 és π_2-re végtelen sok olyan $i \in \omega$ található, amire $\pi_1^{-1}(i) \neq \pi_2^{-1}(i)$. Ezért tetszőleges $p \in P$-hez található olyan $i \in \omega$, hogy $\pi_1^{-1}(i)$ és $\pi_2^{-1}(i)$ különböző, és ezek egyike sincs p értelmezési tartományában. Terjesszük ki p-t úgy, hogy az egyik helyen 0-t, a másikon 1-et vegyen fel. Ez a kiterjesztés biztosítja, hogy $\pi_1(C)$ és $\pi_2(C)$ különböző legyen: ha benne van G-ben, akkor i nem eleme $\pi_1(C)$-nek, míg i benne van $\pi_2(C)$-ben.

Az az állítás, miszerint „$M[G]$-ben ω-nak kontinuum sok új részhalmaza jelent meg” nem egyértelmű, ugyanis a kontinuum más jelenthet M-ben és $M[G]$-ben. Fentebb az M-ben kontinuum számosságú Π halmaz elemeihez rendeltük hozzá ω különböző új részhalmazait. A 6.3. állítás szerint ω összes $M[G]$-beli részhalmazának van kizárólag $\langle \check{\imath}, p \rangle$ alakú párokat tartalmazó neve; egy $i \in \omega$-hoz P egy részhalmazát rendeltük, tehát ilyen névből (M-ben) legfeljebb $(2^{|P|})^{\omega} = 2^{\omega}$ van, hiszen P megszámlálható. Ezért a kontinuum, és hasonlóképpen tetszőleges $\lambda \geq \omega$ számosságra 2^{λ} $M[G]$-ben nem nőhet. Másrészt egy Cohen-valós hozzáadásával *egyetlen M-beli számosságot sem öltünk meg*, vagyis M-ben és $M[G]$-ben ugyanazok a számosságok, következésképp ilyenkor M-ben és $M[G]$-ben a kontinuum, és általában 2^{λ} is ugyanaz.

Az, hogy a számosságok megmaradnak, a következőképpen látható be. Legyen $\lambda \in M$ egy számosság M-ben, $\alpha < \lambda$, és $f \in M[G]$ egy leképezés, ami α-t λ-ba képezi. Azt kell megmutatnunk, hogy f nem lehet ráképezés. Legyen f-nek egy neve a, és $p \in G$ ami forszolja, hogy a ilyen:

$$p \Vdash \text{„}a \text{ függvény, } \mathrm{Dom}(a) \subset \check{\alpha}, \text{ és } \mathrm{Range}(a) \subset \check{\lambda}.\text{”}$$

Ezek után adott $\gamma < \alpha$-ra legyen $F(\gamma)$ mindazon $\delta < \lambda$ rendszámok halmaza, amelyre van $q \leq p$, hogy $q \Vdash a(\check{\gamma}) = \check{\delta}$. Ha δ_1 és δ_2 is eleme $F(\gamma)$-nak, akkor a hozzájuk tartozó q_1 illetve q_2 feltételek szükségképpen inkompatibilisek. Ugyanis p forszolja hogy a függvény, ezért tetszőleges G generikus filterre $p \in G$ esetén $i_G(a)$-nak nem veheti fel a γ helyen a δ_1 és a δ_2 értékeket is, márpedig ha $q_1 \leq p$ és $q_2 \leq p$ kompatibilisek lennének, akkor volna olyan G, amiben p, q_1 és q_2 is benne van.

Az $F(\gamma)$ minden δ eleméhez tehát P-nek egy részhalmaza tartozik úgy, hogy a különböző δ-hoz tartozó részhalmazokba eső feltételek inkompatibilisek, speciálisan ezek a részhalmazok diszjunktak. Mivel P megszámlálható, azért P-nek ilyen felbontásában legfeljebb megszámlálhatóan sok részhalmaz lehet, vagyis $F(\gamma)$ véges vagy megszámlálható.

Az F függvényt M-beli paraméterekből definiáltuk, ezért maga is M-beli. Ugyanakkor $f = i_G(a)$ és F definíciója alapján minden γ-ra $f(\gamma) \in F(\gamma)$. Ezért ha f ráképezés volna, akkor λ minden eleme benne volna valamelyik $F(\gamma)$ halmazban, vagyis λ-t M-ben le tudnánk fedni az α darab megszámlálható halmazzal. Márpedig ha λ megszámlálhatónál nagyobb számosság, akkor ezt nem lehet megtenni.

A gondolatmenetben azt használtuk ki, hogy P megszámlálható. Kicsit gondosabban eljárva elegendő lett volna annyi, hogy nincs P-nek megszámlálhatónál nagyobb páronként inkompatibilis elemekből álló része, vagyis P-ben minden antilánc legfeljebb megszámlálható.

6.7. Tétel *Teljesítse a P kényszerképzet a κ-antilánc feltételt, legyen továbbá X és Y két M-beli halmaz, $f : X \to Y$ pedig egy $M[G]$-beli leképezés. Ekkor van M-ben egy olyan $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ függvény, hogy $|F(x)| < \kappa$, és $f(x) \in F(x)$ minden $x \in X$-re.*

Bizonyítás Követjük a fenti gondolatmenetet. Válasszunk f-nek egy a nevet, és legyen $p \in G$ olyan, ami forszolja, hogy a egy $\check{X}$-ből $\check{Y}$-ba képező függvény.

Adott $x \in X$-hez jelölje $F(x)$ mindazon $y \in Y$ elemek halmazát, melyhez található olyan $q \leq p$ feltétel, amire $q \Vdash a(\check{x}) = \check{y}$. Különböző y_1 és y_2 elemekre $q_1 \Vdash a(\check{x}) = \check{y}_1$ és $q_2 \Vdash a(\check{x}) = \check{y}_2$ esetén q_1 és q_2 szükségképpen inkompatibilis, hiszen q_1, $q_2 \leq p$ és $p \Vdash$ „a függvény." Minden $y \in F(x)$-re egyetlen ilyen q-t kivéve egy inkompatibilis elemekből álló részhalmazt kapunk. Ezért $F(x)$-nek nem lehet több eleme, mint amekkora antilánc van P-ben, vagyis $|F(x)| < \kappa$. Az pedig, hogy $F \in M$, valamint $f(x) \in F(x)$, nyilvánvaló. ■

6.8. Következmény *Legyen κ reguláris számosság M-ben, és teljesítse P a κ-antilánc feltételt. $M[G]$-ben κ és minden annál nagyobb M-beli számosság számosság marad. Speciálisan* MAF*-os kényszerképzettel forszolva minden számosság megmarad.*

Bizonyítás Legyen $\lambda \geq \kappa$ számosság M-ben, $\alpha < \lambda$ és tegyük fel, hogy mégis létezik $M[G]$-ben egy $f : \alpha \to \lambda$ egy ráképezés. Az előző tétel szerint ekkor van M-ben olyan M-beli F függvény, melyre $f(\gamma) \in F(\gamma)$; valamint $F(\gamma)$ a λ-nak κ-nál kisebb számosságú része. Így λ-t le tudtuk fedni λ-nál kevesebb κ-nál kisebb számosságú halmazzal, ami lehetetlen. ■

Legyen az M alapmodellben κ egy olyan számosság, amire $\kappa^\omega = \kappa$. A feladat az, hogy a *kontinuumot felfújjuk κ-ra*. Ezt úgy tesszük, hogy M-hez még κ darab Cohen-valóst adunk. Ezt persze nem egyesével, hanem egyszerre fogjuk megtenni. Álljon P mindazokból a véges p függvényekből, amikre $\mathrm{Dom}(p) \subset \kappa \times \omega$, $\mathrm{Range}(p) \subset \{0, 1\}$; továbbá p kiterjeszti q-t, ha p mint függvény kiterjeszti q-t. Legyen G generikus, persze $g = \bigcup G$ olyan $M[G]$-beli függvény, aminek értelmezési tartománya $\kappa \times \omega$, és mindenütt 0 vagy 1 értéket vesz fel. Legyen $C_\alpha = \{i \in \omega : g(\alpha, i) = 1\}$.

6.9. Állítás *Ha $\alpha < \beta < \kappa$, akkor $C_\alpha \neq C_\beta$.*

Bizonyítás Az állítás következik abból, hogy azok a feltételek, amelyek már biztosítják hogy ez a két halmaz különböző legyen, sűrű halmaz alkotnak. Legyen ugyanis α és β adott, és $p \in P$ tetszőleges. Mivel p véges, van olyan $i \in \omega$ szám, ami nem szerepel p értelmezési tartományában második koordinátaként. A

$$p \cup \langle \alpha, i, 0 \rangle \cup \langle \beta, i, 1 \rangle$$

szintén feltétel, kiterjeszti p-t, és biztosítja hogy C_α és C_β különböző legyen. ■

Az $M[G]$ generikus modellben ezért ω-nak van κ darab különböző részhalmaza. Ahhoz, hogy $M[G]$ a megfelelő modell legyen, még két állításra van szükségünk: az egyik, hogy $M[G]$-ben megmaradnak a számosságok (így például κ nem lesz $M[G]$-ben ω_1 számosságú), a másik hogy ω-nak nincs κ-nál több részhalmaza.

Az hogy a számosságok megmaradnak, azonnal következik ha belátjuk, hogy P MAF-os. Ehhez vegyük ki P-nek ω_1 elemét; ezek értelmezési tartománya $\kappa \times \omega$ egy–egy véges része. A 2.14. tétel szerint ezekből kiválasztható egy ω_1-es Δ-rendszer. A Δ-rendszer magjából $\{0, 1\}$-be képező függvényből csak véges sok különböző van, tehát a kiválasztott függvények között van ω_1 (és így van kettő is), melyeket a Δ-rendszer magjára megszorítva ugyanazt a függvényt kapjuk, a futó részek diszjunktak, tehát ezek a függvények páronként kompatibilisek lesznek.

$M[G]$-ben a $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ halmazok mutatják, hogy ω-nak van legalább κ sok részhalmaza, ezért $M[G] \models 2^\omega \geq \kappa$. Ha most meg tudunk adni M-ben neveknek egy κ számosságú halmazát úgy, hogy ω minden $M[G]$-beli részének van ebben a halmazban neve, akkor azt is tudjuk, hogy $M[G] \models 2^\omega \leq \kappa$. A 6.3. állítás szerint ω minden $M[G]$-beli részének van olyan neve, melynek elemei $\langle \check{\imath}, p \rangle$ alakúan, ahol $i \in \omega$ és $p \in P$, ráadásul adott i-hez tartozó p-k páronként inkompatibilis rendszert alkotnak. Számoljuk meg, hogy ilyen névből mennyi van! Minden $i \in \omega$ elemhez P-nek egy páronként inkompatibilis részhalmazát rendelhetjük. Mivel P számossága κ és benne minden inkompatibilis rész megszámlálható (hiszen P MAF-os), azért ez minden i-re κ^ω lehetőséget jelent. Együttvéve az ilyen nevek száma $(\kappa^\omega)^\omega = \kappa^\omega = \kappa$, ahogyan kívántuk.

Végül is a generikus modellben $2^\omega = \kappa$ és ha M-ben κ-nak egy ω_1-től különböző megfelelő számosságot választunk, akkor $M[G]$-ben nem lesz igaz a kontinuum hipotézis.

Tegyük fel, hogy az M modellben igaz az általánosított kontinuum hipotézis. Ebben az esetben $\kappa^\omega = \kappa$ pontosan akkor teljesül, ha κ kofinalitása nagyobb ω-nál. *Kőnig Gyula* nevezetes tételéből tudjuk, hogy 2^λ kofinalitása nagyobb λ-nál. Ha tehát választunk egy tetszőleges κ számosságot, amire $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, akkor van olyan $M[G]$ generikus bővítés (nevezetesen a fenti), melyben pontosan ugyanazok a számosságok, mint M-ben, és $M[G]$-ben 2^ω értéke éppen κ.

Következőnek megmutatjuk, hogy a hatványfüggvény értékét az ω és az ω_1 helyeken *egyszerre* tetszőlegesen előírhatjuk – feltéve persze hogy az értékek teljesítik a gyenge monotonicitást és eleget tesznek a Kőnig kritériumnak. Legyen megint igaz M-ben az általánosított kontinuum hipotézis, továbbá $\kappa \leq \lambda$ két olyan M-beli számosság, hogy κ kofinalitása nagyobb ω-nál, és λ kofinalitása nagyobb ω_1-nél. Ekkor van olyan $M[G_1][G_2]$ bővítés, melyben egyrészt ugyanazok a számosságok mint M-ben, másrészt $2^\omega = \kappa$, és $2^{\omega_1} = \lambda$.

Az első bővítésben 2^{ω_1} értéke már megfelelő lesz, ugyanakkor a kontinuum M-hez képest nem változik. Mivel most ω_1-nek λ darab új részét szeretnénk látni, a kényszerképzet elemei $\lambda \times \omega_1$-ből $\{0,1\}$-be képező parciális függvények lesznek, csakhogy most nem véges, hanem *megszámlálható* parciális függvények:

$$Q = \{f : \lambda \times \omega_1 \to \{0,1\} \, : \, |f| \leq \omega\},$$

és persze a kiterjesztés a szokásos. Q jól láthatóan ω-teljes, tehát a 6.5. tétel szerint ω_1^M az $M[G_1]$-ben is számosság marad. Másrészt a 2.14. tétel alapján Q teljesíti a $(2^\omega)^+ = \omega_2$ láncfeltételt is, tehát 6.8. alapján ω_2 és a fölött minden M-beli számosság számosság marad $M[G_1]$-ben is. Mivel Q ω-teljes, azért $M[G_1]$-ben ω-nak nincsenek új részhalmazai, M-ben és $M[G_1]$-ben ugyanazok a számosságok, következésképp M-ben és $M[G_1]$-ben 2^ω ugyanaz marad. Másrészt $M[G_1]$-ben ω_1-nek van λ különböző részhalmaza, melyeket a Q fölötti generikus segítségével tudunk megadni. A Q teljesíti az ω_2-antilánc feltételt, tehát minden páronként inkompatibilis része legfeljebb ω_1-es; Q számossága pedig λ. Így ω_1 minden részhalmazának van neve egy $\left(|Q|^{\omega_1}\right)^{\omega_1}$ számosságú halmazban; ez viszont $\lambda^{\omega_1} = \lambda$ miatt (hiszen $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega_1$ és M-ben igaz az ÁKH) éppen λ. Ezért $M[G_1]$-ben ugyanazok a számosságok, mint M-ben, és 2^{ω_1} értéke λ.

Másodjára $M[G_1]$-hez hozzáadunk κ darab Cohen-valóst véges feltételekkel. Ez megtartja az összes $M[G_1]$-beli számosságok és a kontinuum értéke $M[G_1][G_2]$-ben κ lesz. Nézzük mi történik ugyanitt 2^{ω_1}-gyel. A 6.3. állítást ω_1-nek $M[G_1][G_2]$-beli részhalmazaira alkalmazva kapjuk, hogy mindegyiknek létezik $M[G_1]$-beli neve egy $M[G_1]$-ben legfeljebb $(\kappa^\omega)^{\omega_1} = \kappa^{\omega_1}$ számosságú halmazból. Ez a számosság $\lambda \geq \kappa$ miatt legfeljebb $\lambda^{\omega_1} = \lambda$, tehát $M[G_1][G_2]$-ben 2^{ω_1} értéke nem nagyobb λ-nál, ezért pontosan λ.

Feladatok

1. Az M-beli P és Q parciálisan rendezett halmazok M-ben izomorfak. Mutassuk meg, hogy P-vel forszolva megkapható generikus modellek és a Q-val forszolva megkapható generikus modellek ugyanazok.

2. Legyen $M_1 = M[G_1]$ az a generikus bővítés, ami az M-beli 2^ω-t leomlasztja ω_1-re, általában $M_{k+1} = M_k[G_{k+1}]$ amelyben 2^{ω_k}-t leomlasztjuk ω_{k+1}-re ω_k számosságú feltételekkel. Mutassuk meg, hogy M_k-ban $2^{\omega_i} = \omega_{i+1}$ áll minden $i \leq k$-ra. Melyik számosság M-ben az $(\omega_k)^{M_k}$?

3. Legyen $\kappa \geq 2^\omega$ egy számosság, P elemei olyan p véges függvények, melyekre $\mathrm{Dom}(p) \subset \kappa$, és $\mathrm{Range}(p) \subset \{0,1\}$. Mutassuk meg, hogy $M[G]$-ben a kontinuum értéke κ^ω.

4. Az ω végtelen részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ rendszer *független*, ha akárhogyan veszünk ki $\mathcal{A}$-ból véges sok különböző elemet, $A_1, \ldots, A_n$-et, és választjuk meg az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ értékeket 1-nek vagy 0-nak,
$$\varepsilon_1 A_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n A_n$$
végtelen, ahol $1{\cdot}A = A$, és $0{\cdot}A = \omega - A$. Adjunk $\kappa \times \omega$-ból $\{0,1\}$-be képező véges függvényekkel κ darab Cohen-valóst M-hez. Igazoljuk, hogy ezek a Cohen-valósak független rendszert alkotnak.
5. Tegyük fel, hogy M-ben igaz az általánosított kontinuum hipotézis (vagyis $2^\kappa = \kappa^+$ minden végtelen κ-ra). Adjuk M-hez $\aleph_\omega$ darab Cohen-valóst. $M[G]$-ben a kontinuum nem lehet $\aleph_\omega$, hiszen ennek kofinalitása ω, és $\mathrm{cf}(2^\omega) > \omega$. Mi lesz $M[G]$-ben a kontinuum?
6. Tegyük fel, hogy M-ben igaz az ÁKH, κ és κ' végtelen számosságok, $\mathrm{cf}(\kappa') > \kappa$. Adjunk meg olyan $M[G]$ bővítést, amiben megmaradnak a számosságok, $M[G] \models 2^\lambda = \lambda^+$ ha $\lambda < \kappa$, és $M[G] \models 2^\kappa = \kappa'$.
7. Tegyük fel, hogy $M[G]$-ben minden κ-nál nagyobb reguláris számosság megmarad. Mutassuk meg, hogy ekkor minden κ-nál nagyobb számosság is megmarad.
8. Az $\aleph$ operáció minden α rendszámra hozzárendeli α-hoz az α-adik végtelen számosságot: $\alpha_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$, és $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ ha α limesz. Mutassuk meg, hogy az $\aleph$ operáció M-ben és $M[G]$-ben valahonnan kezdve megegyezik. (Speciálisan M-ben és $M[G]$-ben valahonnan kezdve ugyanazok a számosságok.)
9. Legyen $\kappa = \omega_3$, álljon P a $\kappa \times \omega_1$-ből $\{0,1\}$-be képező véges függvényekből, $p \leq q$ ha p mind függvény kiterjeszti q-t. Ha G generikus, akkor $g = \bigcup G$ segítségével ω_1-nek megadhatjuk ω_3 részhalmazát: $X_\alpha = \{i \in \omega_1 : g(\alpha, i) = 1\}$. Mutassuk meg a következőket:
   (i) ha $\alpha \neq \beta$, akkor $X_\alpha \neq X_\beta$;
   (ii) P MAF-os;
   (iii) ha M-ben $2^\omega = \omega_1$ és $2^{\omega_1} = \omega_2$, akkor $M[G]$-ben $2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_3$.