5. fejezet

Martin axiómája

A forszolás megjelenése után nagyon hamar kiderült, hogy maga a technika: egy parciálisan rendezett halmaz és azon egy generikus filter, hatékony is igen jól használható eszköz különféle konstrukciók, példák és ellenpéldák készítésére. Nem lehetne ezt függetlenségi állítások igazolása helyett más halmazelméleti tételek bizonyítására használni? A Rasiowa–Sikorski tétel bizonyítása után a 2.12. állításban láttuk, hogy általában nem várhatjuk, hogy generikus filter létezzen. Ám az alkalmazások során a filterről nem használjuk ki, hogy az összes sűrű halmazt elmetszi, hanem csak annyit, hogy P-nek jól megválasztott sűrű részeibe belemetsz. A Rasiowa–Sikorski tétel azt mondja ki, hogy megszámlálható sűrű halmazhoz mindig tudunk találni olyan filtert, ami ezek mindegyikét elmetszi. Mi a helyzet ω_1 sűrű halmaz esetén?

5.1. Állítás *Van olyan P kényszerképzet, és annak $\alpha < \omega_1$-re D_α sűrű részei, hogy egyetlen filter sem metszheti az összeset.*

Bizonyítás Álljon P azokból a véges függvényekből, amik értelmezési tartománya része ω-nak, értékkészlete pedig része ω_1-nek. f terjessze ki g, ha mint függvény kiterjeszti. Ez persze egy parciálisan rendezett halmaz. Legyen $\alpha < \omega_1$-re

$$D_\alpha = \{f \in P : \alpha \in \mathrm{Range}(f)\}.$$

Természetesen D_α sűrű: tetszőleges véges függvényt ki tudunk terjeszteni úgy, hogy valahol még az α értéket is felvegye. Tegyük fel, hogy létezik olyan $G \subset P$ filter, ami az összes D_α halmazt elmetszi. A G páronként kompatibilis elemből áll, ezért $g = \bigcup G$ is függvény lesz, mégpedig g értelmezési tartománya része ω-nak, értékkészlete pedig része ω_1-nek. Ugyanakkor $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ miatt G-nek van olyan eleme, ami valahol az α értéket veszi fel, következésképp g is felveszi az α-t valahol. Tehát g ráképezi ω egy részhalmazát az egész ω_1-re, ami lehetetlen. ■

Ezek szerint P-re tett minden további kikötés nélkül még csak azt sem várhatjuk, hogy létezzen olyan filter, ami ω_1 előre megadott sűrű halmazt elmetsz. A fenti ellenpélda nem teljesíti a megszámlálható antilánc-feltételt, hiszen például az az ω_1 darab véges függvény, ami csak az egyetlen 0 helyen van értelmezve és ott különböző rendszámokat vesz fel, páronként inkompatibilis. Olyan ellenpéldát, ahol P még MAF-os is, nem sikerült találni. Hogy ilyet nem is lehet, azt *Donald Martin* és *Robert Solovay* egy 1970-ben megjelent cikkükben bizonyították, ahol mindjárt egy általános elvet is megfogalmaztak, ami a Martin axiómája elnevezést kapta.

5.2. Definíció Legyen κ egy végtelen számosság. *Martin axiómája κ-ra*, amit MA_κ jelöl, a következő állítás:

> *Legyen P egy MAF-os kényszerképzet, $\mathcal{F}$ pedig P-beli sűrű halmazoknak legfeljebb κ számosságú rendszere. Ekkor létezik olyan $G \subset P$ filter, ami az összes $\mathcal{F}$-beli sűrű halmazt elmetszi.*

5.3. Tétel (Martin – Solovay) *Ha a* ZFC*-nek van modellje, akkor van olyan modellje is, amelyben a kontinuum tetszőlegesen nagy, és minden $\kappa < 2^\omega$-ra igaz* MA_κ. ■

A Rasiowa–Sikorski tétel szerint MA_ω mindig igaz, tehát minden MA_κ segítségével igazolt állítás automatikusan adja az állítást $\kappa = \omega$ esetre. MA_κ fennállása esetén κ sok szempontból úgy viselkedik, mintha megszámlálható volna. Például κ darab nullmértékű halmaz uniója is nullmértékű, vagy $2^\kappa = 2^\omega$, és így κ szükségképpen kisebb mint a kontinuum. Martin axiómája kiváló eszköz arra, hogy a kontinuum hipotézis segítségével igazolt állításokról megmutassuk, hogy e feltétel nélkül is igazak tudnak lenni.

1. Kombinatorikus következmények

Legyen X egy megszámlálható halmaz, $\mathcal{A}$ valamint $\mathcal{B}$ az X részhalmazainak egy–egy családja. $\mathcal{A}$ elemeit A-val, $\mathcal{B}$ elemeit pedig B-vel fogjuk jelölni. Egy szükséges feltétel arra, hogy létezzen $M \subset X$, amire $A \cap M$ mindig véges, míg $B \cap M$ mindig végtelen az, hogy véges sok $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ elemet választva $B - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ végtelen legyen. Valóban, ennek a halmaznak M-mel való metszete is végtelen lesz. Ez a szükséges feltétel bizonyos esetekben elégséges is.

5.4. Tétel (MA_κ) *Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a megszámlálható X részhalmazaiból álló, legfeljebb κ számosságú halmazcsalád. Tegyük fel, hogy akárhogyan is veszünk ki egy $B \in \mathcal{B}$ és véges sok $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazokat, $B - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ végtelen. Ekkor van olyan $M \subset X$, hogy minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \cap M$ véges, míg ugyanakkor minden $B \in \mathcal{B}$-re $B \cap M$ és $B - M$ is végtelen.*

Bizonyítás Álljon a P kényszerképzet mindazokból a $\langle H, f\rangle$ párokból, ahol $H \subset \kappa$ és $f : X \to 2$ mindketten végesek. Azt mondjuk, hogy $\langle H', f'\rangle \le \langle H, f\rangle$ ha egyrészt $H' \supset H$, $f' \supset f$, továbbá minden $i \in H$-ra és minden $x \in \mathrm{Dom}(f') - \mathrm{Dom}(f)$-re, ha $f'(x) = 1$, akkor $x \notin A_i$. Az f függvény az előállítandó M halmaz karakterisztikus függvénynek része. A feltételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az f' nem tesz M-be egyetlen új elemet sem olyan A_i-kből, melyek indexe H-ból való.

Legyen $i < \kappa$-ra $D_i = \{\langle H, f\rangle : i \in H\}$, továbbá $j < \kappa$ és $n \in \omega$-ra

$$E_{j,n} = \{\langle H, f\rangle : \left|B_j \cap f^{-1}\{1\}\right| > n \text{ és } \left|B_j - f^{-1}\{0\}\right| > n\}.$$

Az, hogy D_i sűrű azonnal adódik abból, hogy $\langle H, f\rangle$-nek mindig kiterjesztése $\langle H \cup \{i\}, f\rangle$. Állítjuk, hogy $E_{j,n}$ is sűrű. Legyen $H = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Mivel a feltétel szerint

$B_j - (A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m})$ végtelen, tudunk belőle választani két diszjunkt, egyenként legalább n elemű L_0 és L_1 halmazt, melyek még Dom(f)-et is elkerülik. Definiáljuk $f' \supset f$-et úgy, hogy még az L_0 halmazon 0-t, az L_1-en 1-et vegyen fel; ezzel $\langle H, f' \rangle$ kiterjesztése lesz $\langle H, f \rangle$-nek.

Legyen most $G \subset P$ olyan filter, amelyik ezeket a sűrű halmazokat elmetszi, és legyen $M = \{x \in X :$ valamely $\langle H, f \rangle \in G$-re $x \in$ Dom(f) és $f(x) = 1\}$. Mivel G elmetszi az $E_{j,n}$ halmazokat, azért $M \cap B_j$ és $B_j - M$ is minden n-re legalább n elemű, tehát mindkét halmaz végtelen. Ha pedig $i \in H$ és $\langle H, f \rangle \in G$, akkor $M \cap A_i \subset$ Dom(f), hiszen $\langle H, f \rangle$ egyetlen kiterjesztése sem rak M-be A_i-beli elemet. Így M teljesíti a tétel követelményeit.

Ami még hiányzik, az annak megmutatása, hogy P MAF tulajdonságú. A $\langle H, f \rangle$ párban az f függvény csak megszámlálhatóan sok lehetséges értéket vehet fel. Ezért ha van ω_1 elemünk, azok között lesz kettő, melyek csak az első helyen különböznek. $\langle H, f \rangle$ valamint $\langle H', f \rangle$ viszont kompatibilis, hiszen mindkettőnek kiterjesztése a $\langle H \cup H', f \rangle$. ■

A tételnek néhány következménye:

5.5. Következmény (MA$_\kappa$) *Legyen X egy megszámlálható halmaz, és $\alpha < \kappa$-ra $A_\alpha \subset X$ olyan, hogy közülük bármely véges sok metszete végtelen. Ekkor van olyan végtelen $M \subset X$, amit az összes A_α majdnem tartalmaz, vagyis amire $M - A_\alpha$ véges.*

Bizonyítás Álljon az $\mathcal{A}$ halmazrendszer az $X - A_\alpha$ halmazokból, a $\mathcal{B}$ pedig az egyetlen X-ből. Az 5.6. tétel feltételei teljesülnek, hiszen

$$X - \big((X - A_1) \cup \ldots \cup (X - A_n)\big) = A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Ezért van $M \subset X$ végtelen halmaz, amire $M \cap (X - A_\alpha)$ véges, ahogy állítottuk. ■

5.6. Következmény (MA$_\kappa$) *Állítsuk elő a megszámlálható X halmazt κ féleképpen véges sok részhalmaz uniójaként: $X = A_{1,\alpha} \cup A_{2,\alpha} \cup \ldots \cup A_{k(\alpha),\alpha}$. Ekkor van minden α-ra $1 \leq f(\alpha) \leq k(\alpha)$ index és X-nek olyan végtelen M részhalmaza, hogy minden α-ra M véges sok elem kivételével része az $A_{f(\alpha),\alpha}$ halmaznak.*

Bizonyítás Legyen U egy nem triviális ultraszűrő X-en, ekkor U minden eleme végtelen. Mivel X előáll a véges sok $A_{1,\alpha}, \ldots, A_{k(\alpha),\alpha}$ halmazok uniójaként, ezek valamelyike, mondjuk $A_{f(\alpha),\alpha}$ eleme U-nak. Az $A_{f(\alpha),\alpha}$ halmazok közül bármely véges sok metszete szintén ultraszűrőbeli, tehát végtelen. Az előző következmény feltétele teljesül, az ottani M halmaz most is megfelelő. ■

A megszámlálható X halmaz részhalmazainak $\mathcal{A}$ családja *rendes*, ha $\mathcal{A}$-ból az A_1, $A_2, \ldots, A_n$ elemeket tetszőleges választva $X - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ végtelen, sőt, ha $A \in \mathcal{A}$ az $A_1, \ldots, A_n$ mindegyikétől különbözik, akkor még $A - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ is végtelen. Ez utóbbi feltételt szerint egy rendes halmazcsalád elemei végtelenek.

5.7. Következmény (MA_κ) *Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ rendes, $|\mathcal{A}| \le \kappa$. Ekkor van olyan $M \subset X$, hogy $\mathcal{A} \cup \{M\}$ is rendes.*

Bizonyítás Minthogy $X - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ mindig végtelen, az 5.4. tételt a

$$\mathcal{B} = \{X - (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \,:\, A_i \in \mathcal{A}\}$$

valamint $\mathcal{A}$ halmazcsaládokra alkalmazva kapjuk az M (végtelen) halmazt. Mivel $M \cap A_i$ véges, azért

$$M - (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = M - ((M \cap A_1) \cup \ldots \cup (M \cap A_n))$$

alapján M-ből véges sok véges halmazt hagyunk el, a maradék tehát végtelen. Másrészt

$$X - (M \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \big(X - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)\big) - M,$$

tehát most egy $\mathcal{B}$-beliből vonjuk ki M-et, ezért ez is végtelen. Így $\mathcal{A} \cup \{M\}$ továbbra is rendes. ∎

5.8. Következmény (MA_κ) $2^\kappa \le 2^\omega$.

Bizonyítás Legyen X egy megszámlálható halmaz, megadjuk X-nek 2^κ darab páronként különböző részét, ebből az állítás már következik. Először is 5.7. alapján definiálhatjuk az X részhalmazaiból álló $\mathcal{A} = \{A_\alpha < \alpha < \kappa\}$ halmazrendszert úgy, hogy minden kezdőszelete rendes legyen. Limeszre növő rendes halmazrendszerek uniója is rendes lesz, az $\alpha + 1$-edik lépésben pedig a már meglevő rendszerhez hozzá tudunk adni egy S_α halmazt úgy, hogy az továbbra is rendes maradjon. azt

Legyen ezek után E egy tetszőleges része κ-nak, és $\mathcal{A}$-nak ehhez tartozó felosztása $\mathcal{A}_1 \cup^* \mathcal{A}_2$ úgy, hogy az E-beli indexű elemek $\mathcal{A}_1$-be, a többiek pedig $\mathcal{A}_2$-be kerüljenek. Mivel $\mathcal{A}$ rendes, az 5.4. tétel feltétele teljesül. Így van olyan $M_E \subset X$ halmaz, ami $\mathcal{A}_1$ elemeit véges, $\mathcal{A}_2$ elemeit pedig végtelen halmazban metszi. Ha veszünk két különböző E és E' felosztást, akkor $\mathcal{A}$-nak valamelyik A eleme az egyik részből átkerült a másikba, tehát például $M_E \cap A$ véges, míg $M_{E'} \cap A$ végtelen (vagy fordítva). Következésképp M_E és $M_{E'}$ különböző részei ω-nak. Ezzel κ különböző részhalmazaihoz X különböző részhalmazait rendeltük hozzá, ahogyan az kívántuk. ∎

2. Hausdorff rés

Legyen $\mathcal{F}$ az ω-ból ω-ba képező monoton növő függvények halmaza. Ha adott két függvény, f és $g \in \mathcal{F}$, azt mondjuk, hogy g *dominálja f-et*, jelben $f < g$, ha g valahonnan kezdve akármennyivel nagyobb mint f, vagy másképpen ha a $g(i) - f(i)$ sorozat tart a végtelenhez. A dominálás nyilván parciális rendezés $\mathcal{F}$ elemein. A $D \subset \mathcal{F}$ *domináló rendszer*, ha minden $\mathcal{F}$-belihez található egy azt domináló D-beli függvény. Egy domináló rendszer *skála*, ha bármely két eleme közül ez egyik dominálja a másikat, vagyis ha a rendszerben a $<$ teljes rendezés.

Megjegyezzük, hogy nincs megszámlálható domináló rendszer. Ha ugyanis $D = \{f_i : i \in \omega\}$, akkor legyen

$$g(i) = 1 + \max\{f_j(i) : j \le i\}.$$

Világos, hogy ezt semelyik f_i sem dominálja.

Legyen κ és λ két számosság, (κ, λ)-*résnek* nevezzük az $\mathcal{F}$ két A és B részhalmazából álló (A, B) párt ha

(i) $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$;

(ii) $A < B$ (vagyis A minden elemét dominálja B összes eleme);

(iii) nincs olyan $f \in \mathcal{F}$, amire $A < f < B$ volna.

5.9. Állítás *Nincs* (ω, ω)*-rés.*

Bizonyítás Legyenek a kisebb halmaz elemei az f_i függvények, a nagyobb halmazéi pedig g_j-k, vagyis tetszőleges indexpárra $f_i < g_j$. Definiálni fogjuk a természetes számokból álló $n_0, n_1, \ldots$ növekvő sorozatot, valamint egy $h \in \mathcal{F}$ függvényt, ami az f_i-ket és a g_j-ket elválasztja.

Legyen n_0 akkora, hogy $i > n_0$ esetén már $g_0(i) - f_0(i) > 3$. Általában, ha n_k már megvan, akkor $n_{k+1} > n_k$ legyen olyan, hogy $i > n_{k+1}$ esetén

$$\big(\min\{g_\ell(i) : \ell \le k\}\big) - \big(\max\{f_\ell(i) : \ell \le k\}\big) > 2k + 1.$$

Mivel elegendően nagy i-re a $\{g_\ell(i) : \ell \le k\}$ értékek bármelyike legalább $2k + 1$-gyel meghaladja az $\{f_\ell(i) : \ell \le k\}$ számok bármelyikét, azért ott az előző halmaz minimuma is legalább ennyivel több a másik halmaz maximumánál. Definiáljuk a $h(i)$ függvény értékét n_1-ig azonosan nullának, n_{k+1} és n_{k+2} között pedig mondjuk a $\{f_\ell(i) : \ell \le k\}$ maximumánál $k+1$-gyel nagyobbra. Világos, hogy ez a függvény monoton növő, továbbá $h(i) - f_\ell(i) > k$ és $g_\ell(i) - h(i) > k$ valahányszor $k > \ell$ és $i > n_{k+1}$. Következésképp h elválasztja a két halmazt. ∎

5.10. Tétel (Hausdorff) *Van* (ω_1, ω_1)*-rés.*

Bizonyítás Transzfinit indukcióval $\alpha < \omega_1$-re definiálni fogjuk az f_α, g_α függvényeket úgy, hogy $\beta < \alpha$ esetén $f_\beta < f_\alpha < g_\alpha < g_\beta$. Minden $\alpha < \omega_1$-re és $n \in \omega$-ra legyen

$$A(n, \alpha) = \{\beta < \alpha : f_\beta(x) < g_\alpha(x) \text{ minden } x > n\text{-re }\}. \tag{1}$$

Ha most meg tudjuk csinálni, hogy minden n-re és α-ra $A(n, \alpha)$ véges legyen, akkor készen vagyunk. Valóban, tegyük fel, hogy F elválasztaná az f_α és g_α függvényeket. Mivel minden α-ra f_α valahonnan kezdve kisebb F-nél, van ω_1 olyan is, amelyek ugyanonnan, mondjuk n-től kezdve már F alatt vannak. Ebből az ω_1 indexből legyen α az ω-dik, ekkor

$$\{\beta < \alpha : f_\beta(x) < F(x)\ n \text{ fölött}\} \text{ végtelen halmaz.}$$

Mivel g_α majorálja F-et, azért valamilyen $n' \ge n$-től kezdve $F(x) < g_\alpha(x)$, tehát $\{\beta < \alpha : f_\beta(x) < g_\alpha(x)\ n' \text{ fölött}\}$ szintén végtelen, ellentétben $A(n', \alpha)$ végességével.

Rákövetkezőre: f_α és g_α már megvan, kell $f_{\alpha+1}$ valamint $g_{\alpha+1}$. Mivel $g_\alpha(x) - f_\alpha(x)$ tart a végtelenbe, azért a következő függvények megfelelőek lesznek:

$$g_{\alpha+1}(x) = g_\alpha(x) - \left[\frac{1}{3}(g_\alpha(x) - f_\alpha(x))\right]^+$$

$$f_{\alpha+1}(x) = f_\alpha(x) + \left[\frac{1}{3}(g_\alpha(x) - f_\alpha(x))\right]^+$$

ahol $[y]^+$ az y egész részének és 0-nak maximuma. Azt kell csak ellenőriznünk, hogy $A(n, \alpha+1)$ véges. Ám

$$\{\beta \leq \alpha : f_\beta(x) < g_{\alpha+1}(x) \ n \text{ fölött}\} \subset \{\alpha\} \cup \{\beta < \alpha : f_\beta(x) < g_\alpha(x) \ n \text{ fölött}\},$$

a jobb oldal viszont az indukciós feltevésünk folytán véges.

Limeszre: válasszunk egy α-hoz alulról konvergáló szigorúan növekvő α_j sorozatot. Először g_α-t definiáljuk. Ehhez szükségünk lesz a természetes számokból álló, szintén növekedő és végtelenhez tartó k_j sorozatra, amivel

$$g_\alpha(x) = f_{\alpha_i}(x) \quad \text{ha} \quad k_i \leq x < k_{i+1}.$$

Most megmondjuk, hogyan is válasszuk ki a k_i számokat. Legyen először is a k_i olyan nagy, hogy fölötte már $f_{\alpha_i}(x) < f_{\alpha_{i+1}}(x) < g_{\alpha_{i+1}}(x) < g_{\alpha_i}(x)$. Legyen továbbá

$$B_i = \{\beta < \alpha_{i+1} \ : \ f_\beta(x) < g_{\alpha_{i+1}}(x) \text{ a } k_i \text{ fölött}\}.$$

Az indukciós feltevés folytán tudjuk, hogy B_i véges halmaz. A k_{i+1} számot olyan nagyra kell választanunk, hogy az összes olyan $\beta \in B_i$-re, amire még $\alpha_i \leq \beta < \alpha_{i+1}$ is teljesül, $f_{\alpha_i}(x) \leq f_\beta(x)$ álljon valahol k_i és k_{i+1} között. Mivel $\beta > \alpha_i$ esetén f_β majorálja f_{α_i}-t, vagyis valahonnan kezdve nagyobb nála, és véges sok β-ról van szó, k_{i+1}-nek valahonnantól kezdve minden egész szám jó lesz.

Állítjuk, hogy $A(n, \alpha) = \{\beta < \alpha : f_\beta(x) < g_\alpha(x) \ n \text{ fölött}\}$ véges; ezt természetesen elegendő egy végtelenbe tartó sorozat elemeire megmutatni, speciálisan az $n = k_j$ számokra. Nézzük tehát az $A(k_j, \alpha)$ halmazt, ennek elemeit a következő intervallumokban fogjuk vizsgálni: α_j alatt, α_j és α_{j+1} között, α_{j+1} és α_{j+2} között, stb. Ezek együttesen lefedik α-ig az összes rendszámot.

A g_α és a k_j definíciója szerint $g_\alpha(x) \leq g_{\alpha_j}(x)$ a k_j fölött, ezért

$$\{\beta < \alpha_j : f_\beta(x) < g_\alpha(x) \ k_j \text{ fölött}\} \subset \{\beta < \alpha_j : f_\beta(x) < g_{\alpha_j}(x) \ k_j \text{ fölött}\},$$

a jobb oldali tag az indukciós feltevés miatt véges.

Legyen most $\ell \geq j$, és legyen $\alpha_\ell \leq \beta < \alpha_{\ell+1}$ olyan, amire $f_\beta(x) < g_\alpha(x)$ a k_j fölött. Mivel $g_\alpha(x) < g_{\alpha_{\ell+1}}(x)$ a k_ℓ fölött, és $k_j \leq k_\ell$, azért β olyan, hogy $f_\beta(x) < g_{\alpha_{\ell+1}}(x)$ a k_ℓ fölött. Következésképp $\beta \in B_\ell$, tehát a konstrukció alapján valamilyen k_ℓ és $k_{\ell+1}$ közötti x értékre $g_\alpha(x) = f_{\alpha_l}(x) < f_\beta(x)$. Ez pedig azt mutatja, hogy β mégsem eleme $A(n_j, \alpha)$-nak.

Végül hogy a g_α függvényt már definiáltuk, ami az összes f_β, $\beta < \alpha$ függvényt majorálja, az f_α-t az összes f_β fölé, de a g_α alá ahhoz hasonlóan „húzhatjuk be," ahogyan azt az (ω, ω)-rés lehetetlenségénél mutattuk meg. ■

5.11. Tétel (MA_κ) *Legfeljebb κ darab ω-ból ω-ba képező függvényhez mindig található olyan, amelyik mindegyiket dominálja.*

Bizonyítás Legyenek az adott függvényeink f_α. Definiáljuk a megszámlálható $\omega \times \omega$ halmaznak A_α és B_i részhalmazait a következőképpen:

$$A_\alpha = \{\langle i, j\rangle \in \omega \times \omega : j \leq i + f_\alpha(i)\},$$
$$B_i = \{i\} \times \omega.$$

Az 5.4. tétel feltételei megintcsak teljesülnek az $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ valamint $\mathcal{B} = \{B_i\}$ halmazrendszerekre, hiszen

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \big\{\langle i, j\rangle : j \leq i + \max\{f_1(i), \ldots, f_n(i)\}\big\},$$

ez pedig minden i-re végtelen sok j-t kihagy. Tehát létezik $M \subset \omega \times \omega$ halmaz úgy, hogy $A_\alpha \cap M$ véges, míg $B_i \cap M$ végtelen, és ezért speciálisan nem üres. Definiáljuk az $f : \omega \to \omega$ függvényt úgy, hogy minden i-re $\langle i, f(i)\rangle \in M$ legyen. Ekkor tetszőleges α-ra véges sok hely kivételével $f(i) > f_\alpha(i) + i$ (mert $A_\alpha \cap M$ véges), tehát f tényleg dominálja f_α-t. ■

5.12. Tétel (MA_κ) *Nincs sem (κ, ω)-rés, sem (ω, κ)-rés.*

Bizonyítás Az előző tétel bizonyításának mintájára legyenek f_α és g_β olyan ω-ból ω-ba képező monoton függvények, hogy mindegyik g_β dominálja mindegyik f_α-t, a két függvényhalmaz közül az egyikben legfeljebb megszámlálható, a másikban legfeljebb κ függvény van. Feladatunk egy f függvényt „behúzni” a két halmaz közé. Legyen $X = \omega \times \omega$, valamint

$$A_{\alpha,k} = \{\langle i, j\rangle \in \omega \times \omega : j > f_\alpha(i) + k\},$$
$$A'_{\beta,k} = \{\langle i, j\rangle \in \omega \times \omega : j < g_\beta(i) - k\},$$
$$B_i = \{i\} \times \omega.$$

Tegyük fel, hogy találunk olyan M halmazt, amire $M \cap B_i$ nem üres, továbbá $M - A_{\alpha,k}$ is és $M - A'_{\beta,k}$ is véges. Válasszuk meg az $f : \omega \to \omega$ függvényt úgy, hogy minden $i \in \omega$-ra $\langle i, f(i)\rangle \in M$; ez $M \cap B_i \neq \emptyset$ miatt lehetséges. Azért, mert $M - A_{\alpha,k}$ véges, f valahonnantól kezdve legalább k-val nagyobb f_α-nál, így majorálja f_α-t. Hasonlóan, mivel $M - A'_{\beta,k}$ véges, azért valahonnan kezdve f legalább k-val a g_β függvény alatt marad, tehát g_β majorálja f-et. Így f elválasztja az f_α és g_β függvényeket, ahogyan kívántuk.

Az M halmaz létezése viszont adódik a következő lemmából az $\mathcal{A} = \{A_{\alpha,k}\} \cup \{A'_{\beta,k}\}$ valamint $\mathcal{B} = \{B_i\}$ szereposztással. Amiért bármelyik g_β majorálja az összes f_α-t, a lemma (i) feltétele teljesül. Az (ii) feltételnél pedig az $A_{\alpha,k}$ és az $A'_{\beta,k}$ halmazok közül a megszámlálható lesz a kivételes rész. ■

Sajnos a konstrukció nem garantálja, hogy az így elkészített f monoton növekedő legyen. Viszont könnyen ellenőrizhető – amit az olvasóra bízunk –, hogy az

$$f'(i) = \max\{f(j) : j \leq i\}$$

már monoton növekedő, és továbbra is elválasztja az f_α és g_β függvényeket.

5.13. Lemma (MA_κ) *Legyen X egy megszámlálható halmaz, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ az X részhalmazainak legfeljebb κ számosságú családja. Tegyük fel, hogy ezek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:*

(i) *akárhogyan is veszünk ki véges sok $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazt, csak véges sok olyan $B \in \mathcal{B}$ létezik, mire $A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap B = \emptyset$;*

(ii) *az $\mathcal{A}$ legfeljebb megszámlálható kivételes részétől eltekintve minden A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$-ra akárhogyan is vesszük ki $\mathcal{B}$-nek egy tetszőleges B elemét, $B \cap A_1$ és $B \cap A_2$ közül az egyik tartalmazza a másikat.*

Ekkor van olyan $M \subset X$, hogy minden $A \in \mathcal{A}$-ra $M - A$ véges, míg ugyanakkor minden $B \in \mathcal{B}$-re $M \cap B \neq \emptyset$,

Bizonyítás Legyen $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ és $\mathcal{B} = \{B_\beta : \beta < \kappa\}$. Ha $H \subset \kappa$ egy véges halmaz, akkor legyen $A_H = \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in H\}$.

Álljon a P kényszerképzet mindazokból a $\langle H, J, V\rangle$ hármasokból, amikre a következők teljesülnek:

(1) H és J is véges része κ-nak, V pedig véges része X-nek;

(2) minden $\beta \in J$-re $B_\beta \cap V \neq \emptyset$;

(3) ha akármilyen β-ra $B_H \cap B_\beta = \emptyset$, akkor $\beta \in J$.

Azt mondjuk, hogy $\langle H', J', V'\rangle$ kiterjeszti $\langle H, J, V\rangle$-t, ha

(1) $H' \supset H$, $J' \supset J$ és $V' \supset V$;

(2) $V' - V \subset A_H$.

Ha $p = \langle H, J, V\rangle$ a P részbenrendezett halmaz egy eleme, akkor p összetevőit H_p, J_p és V_p fogja jelölni. Világos, hogy P tényleg részbenrendezett, ehhez csak azt kell látnunk, hogy a kiterjesztés tranzitív, vagyis ha p kiterjesztése q-nak és q kiterjesztése r-nek, akkor p kiterjesztése r-nek is: $V_q - V_r$ része A_{H_r}-nek, $V_p - V_q$ része A_{H_q}-nak, $H_q \supset H_r$ miatt $A_{H_q} \subset A_{H_r}$, tehát a $V_p - V_r$ különbség része A_{H_r}-nek.

Következőként azt ellenőrizzük, hogy P teljesíti a MAF feltételt. A P elemeinek harmadik koordinátája X egy véges részhalmaza, amiből csak megszámlálhatóan sok különböző van. Ha adott P-nek megszámlálhatónál több eleme, akkor lesz közöttük megszámlálhatónál több olyan, melyekben a harmadik koordináta megegyezik. A lemma (ii) feltétele szerint az $\mathcal{A}$ halmaznak van egy legfeljebb megszámlálható kivételes része, ezért lesz két olyan feltétel is, melyben az első koordinátában a kivételes résznek ugyanaz a H véges része is szerepel. Legyen ez a két feltétel $\langle H \cup H_1, J_1, V\rangle$ valamint $\langle H \cup H_2, J_2, V\rangle$. Állítjuk, hogy mindkettőnek kiterjesztése a $\langle H \cup H_1 \cup H_2, J_1 \cup J_2, V\rangle$. Az hogy ez közös kiterjesztés, világos, csak azt kell ellenőriznünk, hogy feltétel, vagyis hogy eleme P-nek. (1) nyilván igaz; (2)-höz ha $\beta \in J_1 \cup J_2$, akkor β valamelyikben benne van, és ezért $B_\beta \cap V \neq \emptyset$. Végül (3)-hoz legyen β olyan hogy

$$A_{H \cup H_1 \cup H_2} \cap B_\beta = A_H \cap A_{H_1} \cap A_{H_2} \cap B_\beta = \emptyset.$$

Mivel H_1 és H_2 egyetlen eleme nincs a kivételes indexek között, azért $A_{H_1} \cap B_\beta$ és $A_{H_2} \cap B_\beta$ is egymásba skatulyázott halmazok metszete, és ezért közülük az egyik része a másiknak. Következésképp a fenti metszet megegyezik vagy az $A_H \cap A_{H_1} \cap B_\beta$, vagy az $A_H \cap A_{H_2} \cap B_\beta$ metszettel, tehát e kettő közül valamelyik üres. Ekkor viszont β eleme vagy a J_1 vagy a J_2 halmaznak, ezért β mindenképpen benne van $J_1 \cup J_2$-ben. Tehát (3) is teljesül, a kérdéses hármas tényleg eleme P-nek.

A következő halmazok sűrűk P-ben: $D_\alpha = \{p \in P : \alpha \in H_p\}$ valamint $E_\beta = \{p \in P : \beta \in J_p\}$. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges $p = \langle H, J, V \rangle$ feltételt, és tegyük fel, hogy $\alpha \notin H$. A lemma (i) feltétele szerint legfeljebb véges sok olyan $\beta_1, \ldots, \beta_n$ index létezik, melyek nincsenek J-ben, és amikre $A_H \cap A_\alpha \cap B_{\beta_i} = \emptyset$. Mivel a β_i indexek nincsenek J-ben, $A_H \cap B_{\beta_i} \neq \emptyset$, ebből a halmazból vegyük ki az x_i elemet. Most $\langle H \cup \{\alpha\}, J \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}, V \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$ feltétel, kiterjeszti p-t és D_α eleme.

Hasonlóan, ha $\beta \notin J$, akkor a (3) feltétel szerint $A_H \cap B_\beta$ nem üres, vegyük ki egy tetszőleges x elemét. A $\langle H, J \cup \{\beta\}, V \cup \{x\} \rangle$ feltétel, kiterjesztése p-nek és eleme E_β-nak.

Legyen végül G olyan filter P-ben, ami elmetszi a D_α és E_β halmazokat, és legyen $M = \bigcup\{V_p : p \in G\}$. Állítjuk, hogy ez jó lesz. Először is $V_p \subset X$ miatt M részhalmaza X-nek. Ha most $A_\alpha \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor legyen $p \in G \cap D_\alpha$. Ha most $x \in M$ tetszőleges eleme M-nek, akkor $x \in V_q$ is igaz valamilyen $q \in G$-vel, és erről a q-ról még azt is feltehetjük, hogy p-nek kiterjesztése. De $V_q - V_p \subset A_{H_p} \subset A_\alpha$ hiszen $\alpha \in H_p$. Következésképp a véges V_p kivételével M összes eleme A_α-ban van. Tehát $M - A_\alpha$ véges, ahogyan kívántuk.

Másrészt legyen $B_\beta \in \mathcal{B}$ és $p \in G \cap E_\beta$. Ez azt jelenti, hogy $\beta \in J_p$, vagyis $B_\beta \cap V_p \neq \emptyset$, és így $B_\beta \cap M$ sem üres. ■

3. Valós függvénytani következmények

Martin axiómájának jónéhány valós függvénytani következménye is van, ezekből adunk ízelítőül néhányat.

5.14. Tétel (MA$_\kappa$) *Legfeljebb κ darab nullmértékű halmaz uniója is nullmértékű.*

Bizonyítás Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített szám. Jelöljük az X halmaz Lebesgue mértékét $\mu(X)$-szel; álljon P a valós számoknak mindazon nyílt részeiből, melyek mértéke kisebb mint ε. A rendezés a szokásos: $U \leq V$ ha $U \supset V$. Ez a parciális rendezés MAF tulajdonságú. Tegyük, fel hogy adott ω_1 darab ε-nál kisebb mértékű nyílt halmaz. Ekkor van olyan n természetes szám, hogy még közülük még mindig ω_1-re teljesül az, hogy $\mu(U) + \frac{1}{n} < \varepsilon$. Tetszőleges U nyílt halmazhoz található olyan véges sok racionális végpontú nyílt intervallum egyesítéséből álló $U' \subset U$ halmaz, hogy $\mu(U - U') < \frac{1}{n}$. Ilyen U' halmazból csak megszámlálhatóan sok különböző akad, ezért adott nyílt halmazaink között biztosan akad kettő, mondjuk U és V, hogy $U' = V'$. Ekkor $U \cup V = U \cup (V - V')$ miatt $\mu(U \cup V) < \mu(U) + \frac{1}{n} < \varepsilon$, vagyis U és V kompatibilisek.

Legyenek most X_α nullmértékű halmazok, és $D_\alpha = \{U \in P : X_\alpha \subset U\}$. Minthogy mindegyik X_α nullmértékű, azért D_α sűrű; legyen $\mathcal{F} \subset P$ olyan filter, ami az összes D_α-t elmetszi. Legyen $Y = \bigcup \mathcal{F}$, ez mint nyílt halmazok uniója nyílt, tartalmazza az X_α halmazok mindegyikét, és mértéke $\leq \varepsilon$. Az X_α halmazok uniójának mértéke ezért kisebb ε-nál minden pozitív ε-ra, tehát csak nullmértékű lehet. ■

5.15. Tétel (MA$_\kappa$) *Legfeljebb κ darab első kategóriájú halmaz uniója is első kategóriájú.*

Bizonyítás Mivel első kategórájú halmazok lefedhetők megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójával, azt kell megmutatnunk, hogy legfeljebb κ sok sehol sem sűrű halmaz uniója lefedhető megszámlálhatóan sok sehol sem sűrűvel. Legyen tehát $\alpha < \kappa$-ra S_α sehol sem sűrű halmaz, legyen továbbá $\{G_n : n \in \omega\}$ bázis nyílt halmazok egy olyan felsorolása, melyben minden elem végtelen sokszor fordul elő. Legyen $A_\alpha = \{n \in \omega : S_\alpha \cap G_n \neq \emptyset\}$, valamint $B_n = \{m \in \omega : G_m \subset G_n\}$. Mivel minden nyílt halmazban van olyan bázis nyílt, ami véges sok sehol sem sűrű halmaz mindegyikét elkerüli, a

$$B_n - (A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_n})$$

halmaz minden n-re és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ értékre végtelen. Az 5.4. tétel szerint ekkor van $M \subset \omega$, hogy $B_n \cap M$ végtelen, míg $A_\alpha \cap M$ véges. Legyen

$$H_k = \bigcup \{G_i : i \in M,\ i > k\}.$$

Ekkor H_k komplementere sehol sem sűrű, hiszen tetszőleges G_n bázis nyílt halmaznak van olyan része, ami H_k-ban van. Másrészt minden α-ra

$$S_\alpha \subset \bigcup \{\mathbf{R} - H_k : k \in \omega\},$$

hiszen $A_\alpha \cap M$ véges, ezért ha k a metszet minden eleménél nagyobb, akkor $i > k$, $i \in M$ esetén $G_i \cap S_\alpha = \emptyset$, azaz H_k és S_α diszjunktak. Az S_α-kat tehát lefedtük megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójával, ■

Legyen X egy κ számosságú halmaz, és $\mathcal{S} \subset X \times X$ az a σ-gyűrű, amit az $A \times B$ alakú „téglalapok” generálnak.

5.16. Tétel (MA$_\kappa$) *Az $\mathcal{S}$ σ-gyűrű az $X \times X$ összes részhalmazát tartalmazza.*

Bizonyítás A bizonyításhoz az 5.7. következmény egy erősebb formájára van szükségünk.

5.17. Lemma (MA$_\kappa$) *Tegyük fel, az X részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ halmazcsalád rendes, $|\mathcal{A}| \leq \kappa$, és $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup^* \mathcal{A}_2$ az $\mathcal{A}$ tetszőleges két diszjunkt részre bontása. Ekkor van olyan $M \subset X$, hogy $\mathcal{A} \cup \{M\}$ rendes, továbbá $A_1 \in \mathcal{A}_1$ esetén $M \cap A_1$ véges, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ esetén pedig $M \cap A_2$ végtelen.*

Bizonyítás Definiáljuk a $\mathcal{B}$ halmazrendszert a következőképpen:

$$\mathcal{B} = \Big\{D - (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \,:\, D = X \text{ vagy } D \in \mathcal{A}_2;\, A_i \in \mathcal{A} \text{ és } D \neq A_1, \ldots, D \neq A_n\Big\}.$$

Ha $B \in \mathcal{B}$ és $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_1$ akkor persze $B - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ végtelen, ez következik abból, hogy $\mathcal{A}$ rendes. Alkalmazhatjuk tehát az 5.4. tételt az $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B})$ párra. Kapjuk, hogy létezik olyan $M \subset X$ amire $M \cap A_1$ véges,ha $A_1 \in \mathcal{A}_1$, valamint $B \cap M$ és $B - M$ is végtelen, ha $B \in \mathcal{B}$. Mivel $X - (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \in \mathcal{B}$ tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ esetén, azért M ezt egy végtelen halmazban metszi el, vagyis $M - (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ végtelen, tehát $\mathcal{A} \cup \{M\}$ rendes. Végül ha $A_2 \in \mathcal{A}_2$, akkor $A_2 \in \mathcal{B}$ is igaz, tehát $M \cap A_2$ is végtelen. ■

Térjünk rá a tétel bizonyítására. Legyen $W \subset X \times X$. Keresünk ω-nak olyan A_α és B_β részhalmazait, hogy $\langle \alpha, \beta \rangle \in W$ pontosan akkor, ha $A_\alpha \cap B_\beta$ végtelen.

Tegyük fel, hogy az A_α, B_α halmazokat már definiáltuk $\alpha < \gamma$-ra, mégpedig úgy, hogy az $\{A_\alpha, B_\alpha : \alpha < \gamma\}$ halmazrendszer *rendes*. A most bizonyított lemma alapján ehhez a rendszerhez előbb A_γ-t, majd B_γ-t is hozzáadhatjuk úgy hogy az indukciós feltétel most már γ-ra is teljesüljön.

Legyen ezek után $X_n = \{\alpha \in X : n \in A_\alpha\}$ és $Y_n = \{\beta \in X : n \in B_\beta\}$. Ekkor $\langle \alpha, \beta \rangle \in X_n \times Y_n$ pontosan akkor, ha $n \in A_\alpha \cap B_\beta$, vagyis

$$\bigcap_m \bigcup_{n>m} X_n \times Y_n = \{\langle \alpha, \beta \rangle \,:\, A_\alpha \cap B_\beta \text{ végtelen}\}.$$

A bal oldal eleme az $\mathcal{S}$ σ-gyűrűnek, a jobb oldal pedig éppen W, az állítást bizonyítottuk. ■

4. Topológiai alkalmazások

Legyen X egy topológikus tér, és benne x egy pont. Az x pont *súlya* az a legkisebb λ számosság, amire létezik x-nek λ számosságú környezetbázisa. Például a valós számok szokásos topológiájában minden pont súlya ω. A tér súlya az a minimális λ számosság, amire a tér minden pontja legfeljebb λ súlyú. Ha tér súlya ω, akkor minden pontnak van megszámlálható környezetbázisa. Az ilyen tereket M_1 térnek hívják.

Legyen $\{x_n : n \in \omega\}$ a tér pontjainak egy sorozata. Az x pont a sorozat *torlódási pontja*, ha x minden környezete a sorozatból végtelen sok elemet tartalmaz; és a sorozat *konvergál x-hez*, ha x minden környezete a sorozatnak csak véges sok pontját hagyja ki. A térről azt mondjuk, hogy *megszámlálhatóan kompakt*, ha minden sorozatnak van torlódási pontja, és *sorozatkompakt*, ha minden sorozatnak van konvergens részsorozata. Az, hogy a tér megszámlálhatóan kompakt ekvivalens azzal, hogy minden megszámlálható nyílt fedésnek van véges részfedése. Legyen ugyanis $\{x_n\}$ egy olyan sorozat, aminek nincs torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy a tér minden pontjának van olyan nyílt környezete, ami a sorozatnak csak véges sok pontját tartalmazza. Osszuk szét a pontokat a szerint, hogy mi ez a véges sok pont, és vegyük az egy csoportba tartozó pontokhoz tartozó nyílt környezetek unióját. Ezzel megszámlálható sok nyílt halmazt kaptunk, melyek a térnek egy fedését alkotják. Ennek nincs véges részfedése, hiszen mindegyik rész az $\{x_n\}$ sorozatból csak véges sok tagot tartalmaz.

Fordítva, ha valamely megszámlálható nyílt fedésnek nincs véges részfedése, legyen U_n az első n uniója. Vegyünk ki az U_{n+1} és U_n különbségéből egy pontot, ha nem üres (ez végtelen sokszor fog előfordulni), ennek a sorozatnak nincs torlódási pontja. Ugyanis a tér minden pontjának az U_n halmazok valamelyike környezete, márpedig U_n a sorozatból csak véges sok elemet tartalmaz.

Minden kompakt tér egyúttal megszámlálhatóan is kompakt. Az is ismeretes, hogy minden minden megszámlálhatóan kompakt M_1 tér egyúttal sorozatkompakt is. Ha a Martin axióma igaz, akkor ugyanez nem csak M_1, vagyis ω súlyú terekre igaz, hanem általában κ súlyú terekre is. Mivel Martin axióma a $\kappa = \omega$ értékre mindig igaz, ezért az 5.19. tétel speciális esetként kiadja a fentebb idézett állítást is.

5.18. Állítás (MA_κ) *Legyen X topológikus tér, és tegyük fel, hogy az $x \in X$ legfeljebb κ súlyú pont torlódási pontja az $\{x_n : n \in \omega\}$ sorozatnak. Ekkor a sorozatnak van x-hez konvergáló részsorozata.*

Bizonyítás Mivel x súlya legfeljebb κ, megadható x-nek egy $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ környezetbázisa. Definiáljuk $\alpha < \kappa$-ra az ω részhalmazait a következőképpen: $A_\alpha = \{n \in \omega : x_n \notin G_\alpha\}$. Mivel x torlódási pontja az $\{x_n\}$ sorozatnak, $\omega - (A_{\alpha_1} \cup \ldots \cup A_{\alpha_n})$ végtelen. Ezért alkalmazható az 5.4. tétel az $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ és az $\mathcal{B} = \{\omega\}$ halmazcsaládokra. Kapjuk, hogy van olyan $M \subset \omega$, hogy $M = M \cap \omega$ végtelen, míg minden α-ra $M \cap A_\alpha$ véges. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy az x minden környezete véges sok kivételével tartalmazza a $\{x_n : n \in M\}$ részsorozat elemeit, tehát ez a részsorozat konvergál x-hez. ∎

5.19. Tétel (MA_κ) *Egy megszámlálhatóan kompakt, legfeljebb κ súlyú tér sorozatkompakt.*

Bizonyítás A tér megszámlálhatóan kompakt, tehát minden $\{x_n\}$ sorozatnak van torlódási pontja. A torlódási pont súlya legfeljebb κ, az előző lemma alapján tehát van az $\{x_n\}$ sorozatnak x-hez konvergáló részsorozata, speciálisan van a sorozatnak konvergens részsorozata is. ∎

5.20. Következmény (MA_κ) 2^κ *a szorzat-topológiával ellátva sorozatkompakt.*

Bizonyítás A kétpontú diszkrét tér kompakt, tehát 2^κ, mint ennek egy hatványa, maga is kompakt, és ezért megszámlálhatóan kompakt is. Ugyanakkor 2^κ súlya κ (hiszen az egész térnek van egy κ számosságú bázisa), tehát az előző tétel szerint a tér sorozatkompakt is. ∎

Egy topológikus térről azt mondjuk, hogy MAF-os, ha a térben nincs megszámlálhatónál több páronként diszjunkt nyílt halmaz. Minden topológikus térből tudunk egy részben rendezett halmazt definiálni: a rendezendő elemek a tér nem-üres nyílt halmazai, és $p \leq q$, ha a p nyílt halmaz része a q nyílt halmaznak. Az hogy a tér MAF-os pontosan azt jelenti, hogy az így definiált részben rendezett halmazt MAF-os.

5.21. Tétel (MA_κ) *Egy kompakt, Hausdorff, MAF-os topológikus tér nem áll elő κ sehol sem sűrű halmaz uniójaként.*

Bizonyítás Legyen X egy megfelelő topológikus tér és álljon a P parciálisan rendezett halmaz az X tér nem-üres nyílt halmazaiból. Legyenek továbbá $\alpha < \kappa$-ra S_α sehol sem sűrű részei X-nek. Legyen

$$D_\alpha = \{G \text{ nyílt} : \overline{G} \cap S_\alpha = \emptyset\}.$$

Mivel S_α sehol sem sűrű, azért tetszőleges $A \subset X$ nem-üres nyílt halmaznak van olyan nem-üres nyílt B része, ami diszjunkt S_α-tól. Az X tér kompakt T_2, tehát reguláris is, ezért van olyan $\emptyset \neq G \subset B$ nyílt, hogy még G lezártja is része B-nek. Ez mutatja, hogy D_α sűrű. Legyen most $\mathcal{F} \subset P$ egy filter, ami az összes D_α halmazt elmetszi. A kompaktság miatt $\bigcap\{\overline{G} : G \in \mathcal{F}\}$ nem üres, és a metszet mindegyik S_α halmazt elkerüli. ■

5.22. Lemma (MA_{ω_1}) *Legyen P egy MAF-os részbenrendezés, $Q \subset P$ egy ω_1 számosságú része P-nek. Ekkor található Q-ban ω_1 darab elem úgy, hogy közülük bármely véges sok kompatibilis.*

Bizonyítás Álljon P_1 azon P-beli elemekből, melyek csak megszámlálhatóan sok Q-belivel kompatibilisek, $P_2 \subset P_1$ pedig legyen P_1 egy maximális, páronként inkompatibilis elemekből álló része. Mivel P egy MAF, azért P_2 legfeljebb megszámlálható: $|P_2| \leq \omega$. Ha most $p \in P_2$, akkor p legfeljebb megszámlálható Q-belivel kompatibilis: Ezért legfeljebb megszámlálható sok olyan $q \in Q$ elem van, ami P_2 valamelyik elemével kompatibilis. Következésképp

$$Q^* \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in Q : \ q \text{ nem kompatibilis egyetlen } P_2\text{-belivel sem}\}$$

továbbra is ω_1 számosságú, legyenek az elemei $\{q^*_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Álljon az F részben rendezett halmaz Q^* olyan véges részeiből, melyek együttesen kompatibilisek, vagyis ha $a \in F$, akkor a véges része Q^*-nak, és található a-hoz olyan $p \in P$, ami a mindegyik eleme alatt van. F elemeit a fordított irányú tartalmazás szerint rendezzük: $a \leq b$ ha $a \supset b$. Legyen $D_\alpha = \{a \in F : \text{van olyan } \beta > \alpha, \text{ hogy } q^*_\beta \in a\}$. Ez sűrű F-ben: legyen $a \in F$ és $p \leq a$. Ha p csak megszámlálhatóan sok Q^*-belivel volna kompatibilis, akkor $p \in P_1$ állna, és ekkor P_2 maximalitása miatt volna olyan $p' \in P_2$ is, amivel p kompatibilis – és így a elemei is. Ez utóbbi viszont lehetetlen, hiszen $a \subset Q^*$, és Q^* elemei között nincs olyan ami kompatibilis lenne P_2 egy elemével. Ezért p az Q^*-nak több mint megszámlálható elemével kompatibilis, így van ilyen q^*_β is valamilyen $\beta > \alpha$-ra is. $a \cup q^*_\beta \in D_\alpha$ és nyilván bővítése a-nak.

Az F még teljesíti a MAF feltételt is: F minden eleme alatt található azoknak egy közös P-beli kiterjesztése. Megszámlálhatónál több F-beli elem esetén megszámlálhatónál több P-beli elemet kapunk, ez utóbbiak között lesz két kompatibilis, és ekkor a megfelelő F-beli elemek is kompatibilisek: az uniójuk megfelelő bővítés lesz.

Végül legyen $G \subset F$ olyan filter, ami az összes D_α sűrű halmazt elmetszi; $\bigcup G \subset Q^*$ nyilván eleget tesz a tétel állításának. ■

5.23. Tétel (MA_{ω_1}) *MAF-os topologikus terek szorzata is MAF-os.*

Bizonyítás Először azt mutatjuk meg, hogy két MAF-os tér szorzata is MAF-os, vagyis a szorzatban sincs ω_1 darab páronként diszjunkt nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy ez mégis így volna, ekkor mindegyiknek kiválaszthatjuk egy $U \times V$ alakú elemi nyílt részét, melyek még mindig diszjunktak lesznek. Ezért volna $\{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ páronként diszjunkt halmazokból álló rendszer. Az előző lemma szerint az $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ halmazok között van ω_1 páronként kompatibilis, ekkor viszont a nekik megfelelő V_α halmazoknak páronként inkompatibilisnek (diszjunktnak) kell lennie, ellentétben azzal, hogy a második topologikus tér is MAF-os.

Ennek alapján teljes indukcióval adódik, hogy véges sok MAF-os tér szorzata is MAF-os. Legyenek ezek után az X_i terek mind MAF-osak, és vegyünk ki a szorzatból ω_1 nem üres nyílt halmazt. Ezek mindegyikének van bázis nyílt része, tehát föltehetjük hogy a kivett nyíltak mind a szorzat tér bázisából vannak. Egy ilyen bázis nyílthoz tartozik véges sok index – a nyílt halmaz *tartója* –, ahol nem az X_i tér összes pontját tartalmazza. A 2.13. Δ-rendszeres tétel szerint az ω_1 véges tartóból ki tudunk választani egy még mindig ω_1-es Δ-rendszert. A Δ-rendszer magjában véges sok index van, ezért a magba eső indexű X_i terek szorzata, mint véges sok MAF-os tér szorzata, szintén MAF-os. Tehát van a nyíltak között kettő (sőt az előző lemma szerint ω_1 is), melyek metszete a magba eső indexeken nem üres. A futó részek viszont diszjunktak, ezért a metszet egyetlen indexben sem üres, tehát a két nyílt halmaz nem diszjunkt. ■

A valós számegyenes rendezését egyértelműen jellemzi az alábbi három tulajdonság:

(i) nincs sem kezdő, sem végpontja, és a rendezés sűrű, vagyis bármely két különböző pont között van egy harmadik;

(ii) Dedekind-teljes, vagyis ha két részre szétvágjuk úgy, hogy az első rész teljes egészében a második alatt van, akkor vagy a kisebb részben van maximális elem, vagy a nagyobban minimális; végül

(iii) szeparábilis, vagyis van a rendezésben egy megszámlálható sűrű rész.

Még az 1910-es évek végén kérdezte *Mikhail Szuszlin* (1894-1919), vajon (iii) helyettesíthető-e azzal a gyengébb feltétellel, miszerint

(iv) nincs benne megszámlálhatónál több páronként diszjunkt nyílt intervallum.

Egy olyan rendezést, ami (i)-t, (ii)-t és (iv)-t teljesíti, de (iii)-t nem *Szuszlin-egyenesnek* hívunk. Szuszlin-egyenes létezése sokáig megoldatlan probléma volt, és csak a forszolás megjelenése után derült ki, hogy ez független. Van ZFC modell, ahol van Szuszlin egyenes, és van olyan is, ahol nincs. Ez utóbbi a helyzet, ha a Martin axióma ω_1-re igaz.

5.24. Tétel (MA_{ω_1}) *Nincs Szuszlin-egyenes.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy mégis van egy Szuszlin egyenes, és vegyük hozzá a két végére a $-\infty$ és a $+\infty$ pontokat. $\alpha < \omega_1$-re definiáljuk az egyenes diszjunkt nyílt intervallumaiból álló rendszert. $\alpha = 0$-ra ez a rendszer az egyetlen $(-\infty, +\infty)$ intervallumból áll. Ha az α-adik intervallumrendszer már megvan, akkor a rendszer minden (a, b) intervallumából válasszunk ki egy középső c pontot, és tegyük be az $\alpha + 1$-edik rendszerbe az (a, c) valamint (c, b) intervallumokat. Limesz lépésben vegyük azokat a maximális intervallumokat, melyeket egyetlen korábbi lépésben kapott intervallum sem vág ketté. Vagy másképpen: vegyük a korábbi intervallumok szűkülő láncainak a metszetét. Egy ilyen metszet a Dedekind-teljesség miatt zárt intervallum lesz, az intervallumrendszerbe ezeknek a belseje kerül (feltéve hogy a metszet nem egyetlen pont).

Mivel minden lépésben diszjunkt nyílt intervallumok egy rendszerét kapjuk, azért minden rendszerben véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok intervallum van. Ha valamilyen $\alpha < \omega_1$ lépésben megakadnánk, vagyis az összes metszet már egy–egy pont, akkor az addig szereplő intervallumok végpontjai sűrű halmazt adnak. Ez viszont lehetetlen, mert egy Szuszlin egyenesnek nincs megszámlálható sűrű része, ezekből a végpontokból viszont csak megszámlálhatóan sok van. Így ω_1 lépés előtt nem akadunk el, mindegyik szinten van intervallum, tehát együttesen legalább ω_1 van belőlük. Ráadásul akárhogyan is veszünk a kiválasztott intervallumok közül kettőt, azok vagy diszjunktak, vagy az egyik tartalmazza a másikat.

Intervallumainkon a tartalmazás egy természetes rendezés: $(a, b) \leq (c, d)$, ha az (a, b) része (c, d)-nek. Ez egy parciális rendezés, ami MAF-os is. Ez azért van így, mert két intervallum pontosan akkor nem kompatibilis, ha diszjunkt, márpedig a Szuszlin egyenesnek nincs megszámlálhatónál több páronként diszjunkt nyílt intervalluma. Az 5.22. lemma alapján tehát van a kiválasztott intervallumok között ω_1, melyek páronként kompatibilisek. Rendezzük sorba ezeket az intervallumokat a szerint, hogy melyik szinten jelentek meg; egy nagyobb indexű mindig valódi része a kisebb indexűnek. Ezért mindegyik intervallumból ki tudunk venni egy olyan nem üres részt, ami diszjunkt az összes későbbitől. Ezzel viszont kaptunk megszámlálhatónál több páronként diszjunkt intervallumot – ellentmondásban (iv)-vel. ■

Feladatok

1. (MA_κ) Az X megszámlálható halmaz részeiből álló $\mathcal{A}$ halmazcsalád *független*, ha akárhogyan veszünk ki véges sok különböző $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazt, és választjuk meg az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ értékeket

0-nak vagy 1-nek, az

$$\varepsilon_1 A_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n A_n$$

metszet végtelen, ahol $1 \cdot A = A$, és $0 \cdot A = X - A$. Mutassuk meg, hogy egy legfeljebb κ számosságú független halmazcsalád mindig bővíthető.

2. Tegyük fel, hogy a Martin axióma minden $\kappa < 2^\omega$-ra igaz. Mutassuk meg, hogy van skála.
3. Igazoljuk hogy az 5.12. tétel bizonyítása után definiált f' függvény tényleg elválasztja az f_α és g_β függvényeket.
4. (MA_{ω_1}) Legyenek f_α és g_β az 5.10. tétel szerinti (ω_1, ω_1)-rés elemei, vagyis olyan ω-ból ω-ba képező monoton függvények, hogy mindegyik g_β dominálja mindegyik f_α-t, viszont nincs olyan függvény, ami őket elválasztaná. Álljon a P kényszerképzet a $\langle H, f \rangle$ párokból, ahol $H \subset \omega_1$ és $f : \omega \to \omega$ mindketten végesek, és f értelmezési tartományán monoton nő. Azt mondjuk, hogy $\langle H', f' \rangle \leq \langle H, f \rangle$, ha egyrészt $H' \supset H$, f' végkiterjesztése f-nek (vagyis ha $i \in \mathrm{Dom}(f') - \mathrm{Dom}(f)$, $j \in \mathrm{Dom}(f)$, akkor $i > j$), másrészt minden $\alpha \in H$-ra és $i \in \mathrm{Dom}(f') - \mathrm{Dom}(f)$-re $f_\alpha(x) < g_\alpha(x)$ az i fölött, valamint $f_\alpha(i) < f'(i) < g_\alpha(i)$.
   Ez a P MAF-os, hiszen véges f-ből csak megszámlálhatóan sok van, $\langle H_1, f \rangle$ és $\langle H_2, f \rangle$ pedig kompatibilis: $\langle H_1 \cup H_2, f \rangle$ közös kiterjesztésük. A következő halmazok sűrűk: $D_\alpha = \{\langle H, f \rangle : \alpha \in H\}$, $E_i = \{\langle H, f \rangle : \mathrm{Dom}(f)\text{-ben van } i\text{-nél nagyobb szám}\}$. Legyen G olyan filter, ami a D_α és E_i sűrűket elmetszi, f pedig a G-beli párok második koordinátáinak uniója. Legyen f értelmezési tartománya $i_0 \leq i_1 \leq \ldots$, és definiáljuk az f^* függvényt úgy, hogy az $i_s \leq x < i_{s+1}$ helyen $f^*(x) = f(i_s)$. Az f^* elválasztja az f_α és g_β függvényeket, ami lehetetlen. Hol a hiba?
5. (MA_κ) Legyen P egy MAF-os kényszerképzet, $Q \subset P$ számossága κ. Mutassuk meg, hogy van Q-nak κ számosságú része, melyben bármely két elem kompatibilis.
6. (MA_κ) Teljesítse P a κ-antilánc feltételt. Mutassuk meg, hogy P-nek minden κ számosságú részéből kiválasztható κ sok, melyek páronként kompatibilisek.