4. fejezet

Generikus modell

Legyen M a ZFC-nek egy tranzitív $\in$-modellje és $\langle P, \leq \rangle$ egy M-beli parciálisan rendezett halmaz. Az „x rendezett pár” formula abszolút M-re, ezért a $\leq$ a világban is kétváltozós reláció P-n, mégpedig szintén parciális rendezés. Legyen most D egy M-beli halmaz, amire M-ben teljesül, hogy „D sűrű része P-nek.” Ekkor persze D a világban is része P-nek, és ott is sűrű. Ez megfordítva is így van: ha D egy M-beli halmaz, $D \subset P$ és D sűrű P-ben, akkor $M \models$ „D sűrű P-ben.” Ez mutatja, hogy a „D sűrű része P-nek” formula abszolút M-re. Hasonlóan „A reguláris része P-nek” szintén abszolút: P-nek egy M-beli részére akkor és csak akkor igaz M-ben, hogy ő reguláris, ha a világban reguláris.

A parciális rendezésekről szóló 2. fejezetben bizonyítottuk, hogy P reguláris részei teljes Boole-algebrát alkotnak. Ez az állítás a ZFC egy tétele, tehát igaz a világban, és igaz M-ben is. Viszont a két esetben más-más Boole-algebráról van szó, és mást jelent a „teljesség” is. Jelöljük a világbeli Boole-algebrát $\mathcal{B}$-vel, az M-belit pedig $\mathcal{B}^M$-mel. $\mathcal{B}$ elemei P összes reguláris része, míg $\mathcal{B}^M$-ben P-nek az M-beli reguláris részei vannak, amik speciálisan valódi reguláris részek is. Így $\mathcal{B}^M$ részstruktúrája $\mathcal{B}$-nek.

4.1. Állítás *$\mathcal{B}^M$ egy M-teljes részalgebrája $\mathcal{B}$-nek.*

Bizonyítás Láttuk, hogy a $\mathcal{B}^M$-be eső reguláris részek egyúttal $\mathcal{B}$-ben is megtalálhatók, ezért $\mathcal{B}^M$ alaphalmaza része $\mathcal{B}$ alaphalmazának. Legyen most a és b a $\mathcal{B}^M$ két eleme. $a \leq b$ azt jelenti, hogy a mint halmaz részhalmaza b-nek. Ez pedig pontosan akkor teljesül a világban, mikor M-ben. Ezért $\mathcal{B}^M$-en a két Boole-algebrából adódó rendezés egybeesik. Az a-nak és b-nek M-ben létezik legnagyobb alsó korlátja, ami a halmazelméleti metszetük, és ugyanez a halmazelméleti metszet ennek a két elemnek $\mathcal{B}$-ben is a legnagyobb alsó korlátja. Ezért $a{\cdot}b$ mind $\mathcal{B}$-ben mind $\mathcal{B}^M$-ben ugyanaz.

Az a-nak létezik $\mathcal{B}^M$-ben komplementere. Ez P-nek olyan M-beli reguláris része, amire egyrészt $M \models$ „a és c diszjunktak,” másrészt $M \models$ „$a \cup c$ sűrű P-ben.” Ugyanez a c természetesen $\mathcal{B}$-nek is eleme, és a $c \subset P$ részhalmaznak a világban is megvannak ugyanezek a tulajdonságai, nevezetesen hogy c reguláris, $a \cap c = \emptyset$, valamint hogy $a \cup c$ sűrű P-ben. Ez pedig azt jelenti, hogy c eleget tesz annak a definíciónak, ami az a ($\mathcal{B}$-beli) komplementerét jelöli ki, ennek egyértelműsége miatt c a $\mathcal{B}$-ben is a komplementere.

A deMorgan azonosságok mind $\mathcal{B}^M$-ben, mind $\mathcal{B}$-ben fennállnak, tehát a és b legkisebb felső korlátját mind a két algebrában a $-(-a\cdot-b)$ szolgáltatja. Ez pedig az előzőek szerint P-nek ugyanaz a reguláris része.

Eddig azt láttuk be, hogy $\mathcal{B}^M$ rész Boole-algebrája $\mathcal{B}$-nek: a rendezés, komplementum, és két elemre a műveletek $\mathcal{B}$-ből öröklődnek. A tétel állításának igazolásához még azt kell belátnunk, hogy ha $\mathcal{B}^M$-nek kivesszük egy tetszőleges M-beli részét, annak legkisebb felső valamint legnagyobb alsó korlátja mindkét algebrában ugyanaz. Ezekből is elég csak az utóbbit, hiszen a legkisebb felső korlátot a deMorgan azonosság alapján megfelelő elemek legnagyobb alsó korlátjából kaphatjuk meg, a komplementerképzésről pedig már tudjuk, hogy a két algebrában megegyezik.

Legyen tehát $\{a_i : i \in I\}$ M-beli reguláris halmazoknak egy M-beli halmaza. Ezeknek $\mathcal{B}^M$-beli legnagyobb alsó korlátja megegyezik az M-ben kiszámított halmazelméleti metszetükkel, $\mathcal{B}$-beli legnagyobb alsó korlátja pedig ugyanez a metszet a világban kiszámítva. A számítás eredménye természetesen mindkét alkalommal ugyanaz, amivel a tételt bizonyítottuk. ■

Hasonlóan igazolható, hogy ha $A \subset P$ egy M-beli halmaz, akkor A reguláris lezártja szintén M-beli, és megegyezik az M-beli reguláris lezártjával. Másképpen fogalmazva az $\mathrm{RO}(A)$ leképezés abszolút M-re.

Legyen $G \subset P$ egy (nem feltétlenül M-beli) filter, vagyis G-re teljesülnek az alábbi feltételek:

(i) $1_P \in G$;
(ii) ha $p \in G$ és $p \leq q$, akkor $q \in G$;
(iii) ha p és $q \in G$, akkor létezik olyan $r \in G$, amire $r \leq p$ és $r \leq q$ (vagyis p és q a G-ben kompatibilis).

4.2. Definíció A $G \subset P$ egy *M-generikus filter*, vagy röviden *generikus filter*, ha filter és még a következő is teljesül:

(iv) G elmetszi az összes M-beli $D \subset P$ sűrű halmazt.

A P pontosan akkor atommentes és elágazó M-ben, ha ugyanez igaz a világban. Ha P ilyen, akkor a 2.12. állítás szerint egy M-generikus filter nem lehet M-nek eleme.

Az M-beli P parciálisan rendezett halmaz és egy G M-generikus filter segítségével egy M-től különböző ZFC modellt fogunk felépíteni. A P ügyes megválasztásával ezt az új modellt *kényszerítjük* arra, hogy benne még további állítások is igazak legyen. A P-nek ezt a szerepét hangsúlyozandó *kényszerképzetnek* nevezzük, P elemeit pedig *feltételeknek*. Egy kényszerképzet tehát egy olyan parciálisan rendezett halmaz, amit egy ZFC modell építésére fogunk felhasználni. Az elnevezés az angol *notion of forcing* megfelelője.

Legyen tehát P egy kényszerképzet. Egy *P-név*, vagy egyszerűen csak *név* ha P-t nem akarjuk külön hangsúlyozni vagy világos hogy melyikről van szó, egy olyan halmaz, aminek elemei párok: minden pár első tagja egy P-név, a pár második tagja pedig P-nek egy eleme. A P-nevek egy osztály alkotnak, amit V^P-vel jelölünk. Természetesen V^P pontos definíciója transzfinit rekurzióval történik a következőképpen:

4.3. Definíció Legyen V_0^P az üres halmaz; V_α^P a $\{V_\beta^P : \beta < \alpha\}$ halmazok uniója, ha α limesz; végül $V_{\alpha+1}^P = \mathcal{P}(V_\alpha \times P)$. Egy halmaz pontosan akkor eleme a V^P osztálynak, ha eleme V_α^P-nak valamilyen α rendszámra.

Az α-ra vonatkozó transzfinit indukcióval azonnal adódik, hogy $\beta < \alpha$ esetén $V_\beta^P \subset V_\alpha^P$, vagyis a V_α^P halmazok nőnek.

A P-neveket természetesen tudjuk definiálni az M modellben is. Mivel M tranzitív $\in$-modell, azért az M-beli rendszámok a világbeli rendszámok egy kezdőszeletét adják: $\mathrm{On}^M = \mathrm{On} \cap M$. Az M-beli P-nevek definíciója ezek szerint a világban a következőképpen néz ki: $V_0^{P,M}$ az üres halmaz; $V_\alpha^{P,M} = \bigcup\{V_\beta^{P,M} : \beta < \alpha\}$ ha $\alpha \in M$ limesz rendszám, végül

$$V_{\alpha+1}^{P,M} = \mathcal{P}^M(V_\alpha^{P,M} \times P) = M \cap \mathcal{P}(V_\alpha^{P,M} \times P)$$

ha $\alpha \in \mathrm{On}^M$. Ezek szerint az a halmaz egy M-beli P-név, ha van olyan $\alpha \in M$ rendszám, amire $a \in V_\alpha^{P,M}$. Transzfinit indukcióval azonnal adódik, hogy $V_\alpha^{P,M} \subset V_\alpha^P$, minden M-beli α rendszámra, ahonnan $V^{P,M} = M \cap V^P$. Ez azt mutatja, hogy az M-beli P-nevek éppen azok a P-nevek, amelyek M-be esnek.

4.4. Definíció Legyen $G \subset P$ egy filter. A P-nevek G filter szerinti i_G *interpretáltját* a név felépítésére vonatkozó rekurzióval a következőképpen definiáljuk:

$$i_G(a) = \{i_G(b) : \text{van olyan } p \in G, \text{ amire } \langle b, p\rangle \in a\ \}.$$

Ha a egy M-beli név és $\langle b, p\rangle \in a$, akkor természetesen b is M-beli név. Így az interpretált fenti definícióját megszoríthatnánk kizárólag M-beli nevekre is.

4.5. Definíció Legyen $P \in M$ egy kényszerképzet, $G \subset P$ pedig egy filter. Az $M[G]$ modell a következő halmazokból áll:

$$M[G] \stackrel{\text{def}}{=} \{i_G(a) : a \text{ egy } M\text{-beli } P\text{-név}\}.$$

Ha G egy M-generikus filter, akkor $M[G]$-t *M-generikus modellnek*, vagy röviden *generikus modellnek* nevezzük.

4.6. Állítás *Legyen $G \subset P$ tetszőleges filter. Az $M[G]$ halmaz tranzitív; zárt a $\{\}$-ra; $M \subset M[G]$; valamint $G \in M[G]$.*

Bizonyítás Mivel az M-beli P-nevek egy halmazt alkotnak, $M[G]$ is halmaz. Definíció szerint $M[G]$ elemei az M-beli P-nevek interpretáltjai. Az interpretáció definíciója szerint $i_G(a)$ összes eleme is valamilyen M-beli név interpretáltja, tehát ezek is $M[G]$-beliek. Ebből következően $M[G]$ elemeinek az elemei is $M[G]$-ben vannak, vagyis $M[G]$ tranzitív.

Legyen $M[G]$ két (nem feltétlenül különböző) eleme $i_G(a)$ és $i_G(b)$, ahol a és b mindketten M-beli P-nevek. Egy olyan M-beli nevet kell keresnünk, aminek interpretáltja éppen $\{i_G(a), i_G(b)\}$. Erre a célra például $\mathrm{P}(a,b) = \{a\} \times P \cup \{b\} \times P$ megfelel. Ez a név természetesen M-beli, és az összes olyan $\langle c, p\rangle$ pár eleme, ahol $p \in P$ tetszőleges és c vagy az a-val, vagy a b-vel egyenlő, és így persze interpretáltjának $i_G(a)$ és $i_G(b)$ is eleme lesz, de semmi más nem.

Legyen $x \in M$ tetszőleges. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy $x \in M[G]$, kell találnunk egy olyan nevet, aminek interpretáltja éppen x. Ehhez definiáljuk az $x \in M$ halmaz $\check{x}$ *kanonikus nevét* a következőképpen:

$$\check{x} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle \check{y}, p\rangle \,:\, p \in P,\ y \in x\}.$$

Ez a definíció az x felépítésére (vagyis a kumulatív hierarchia szintjeire) vonatkozó rekurzióval adja meg az $\check{x}$ (M-beli) P-nevet, és ugyancsak x felépítésére vonatkozó indukcióval következik, hogy $i_G(\check{x}) = x$. Mivel minden M-beli halmaznak találtunk nevet, $M \subset M[G]$-t igazoltuk.

Végül keresnünk kell olyan nevet, aminek interpretáltja éppen G. Legyen ehhez $a \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle \check{p}, p\rangle \,:\, p \in P\}$. Mivel az a hozzárendelés, ami x-hez $\check{x}$-et rendeli, egy M-beli operáció, azért a egy M-beli név. Interpretálja pedig

$$i_G(a) = \{i_G(\check{p}) : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G,$$

ahogyan kívántuk. ∎

Természetesen $M[G]$ minden elemének van M-beli neve, ugyanakkor egy elemnek több neve is lehet. Ha $x \in M[G]$, akkor x-nek a sok lehetséges közül az egyik nevét $\dot{x}$ jelzi, vagyis $\dot{x}$ olyan M-beli P-név, amire $i_G(\dot{x}) = x$.

4.7. Állítás *$M[G]$-ben ugyanazok a rendszámok vannak, mint M-ben.*

Bizonyítás Mivel M tranzitív $\in$-modell, azért az M-beli kumulatív hierarchia minden szintje része a világbeli kumulatív hierarchia megfelelő szintjének, vagyis minden $\alpha \in M$-re $V_\alpha^M \subset V_\alpha$. Valóban, $\emptyset = V_0^M = V_0$, és ha α limesz, akkor

$$V_\alpha^M = \bigcup\{V_\beta^M : \beta < \alpha\} \subset \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\} = V_\alpha,$$

az indukciós feltevés alapján. Egyébként pedig ha az állítást α-ra már tudjuk, akkor

$$V_{\alpha+1}^M = \mathcal{P}^M(V_\alpha^M) = M \cap \mathcal{P}(V_\alpha^M) \subset \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}.$$

Ezek szerint $M \subset V_\nu$, ahol $\nu = \mathrm{On} \cap M$ a legkisebb olyan rendszám, ami nincs M-ben; ez a ν természetesen limesz rendszám. Legyen most $a \in V_\alpha^{P,M}$ egy M-beli P-név, persze $\alpha < \nu$. Mivel az a elemeiben szereplő nevek mind a V^P korábbi szintjeiről valók, α-ra vonatkozó transzfinit indukcióval látható, hogy ebben az esetben $i_G(a) \in V_\alpha \subset V_\nu$. Következésképp $M[G] \subset V_\nu$, és mivel V_ν-ben csak ν-nél kisebb rendszámok vannak, csak ilyenek lehetnek $M[G]$-ben is. ∎

Az állítást úgy is szokták fogalmazni, hogy $M[G]$ nem magasabb M-nél, hanem szélesebb.

Ha G generikus filter, akkor $M[G]$-ben a ZFC összes axiómája teljesül, ráadásul a P kényszerképzet ügyes megválasztásával el lehet érni, hogy $M[G]$-ben további állítások is igazak legyenek, mondjuk a kontinuum hipotézis, vagy annak tagadása. Ahhoz hogy a módszer működjön, mindenekelőtt egy generikus filter kell. Ha M megszámlálható, akkor persze csak megszámlálhatóan sok olyan $D \in M$ van, amire D sűrű része P-nek. Ezért alkalmazható a 2.11. Rasiowa–Sikorski tétel, ami szerint létezik olyan G filter, ami ezt a megszámlálhatóan sok sűrű halmaz mindegyikét elmetszi. Tehát megszámlálható M esetén létezik M-generikus filter.

További feladat annak megmutatása, hogy $M[G]$ ekkor tényleg a ZFC-nek egy modellje. Bizonyos esetekben elegendő elhinni, hogy ez így van. A bonyolult és igényes meggondolás azonban további információkat ad a generikus modellek egyéb tulajdonságairól, melyek nélkülönözhetetlenek sok konstrukcióban.

Előkészítésként egy generikus filter és az M-beli reguláris halmazok kapcsolatáról mondunk ki két állítást.

4.8. Lemma *Legyen $A \subset P$ egy M-beli halmaz. Egy G generikus filterre $A \cap G \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha* $\mathrm{RO}(A) \cap G \neq \emptyset$.

Bizonyítás Láttuk, hogy A reguláris lezártját akár a világban, akár M-ben számítjuk ki, ugyanazt az $\mathrm{RO}(A)$ halmazt kapjuk, és ugyanez igaz az A elem kiterjesztéseiből álló $\mathrm{O}(A)$ halmazra. Álljon B mindazokból a $q \in P$ elemekből, melyek A egyetlen elemével sem kompatibilisek. Természetesen $B \cup \mathrm{O}(A)$ a P-nek egy M-beli részhalmaza. Állítjuk, hogy ez utóbbi sűrű P-ben. Valóban, tetszőleges $p \in P$ vagy egyetlen A-belivel sem kompatibilis – és ekkor eleme B-nek –, vagy van kiterjesztése valamelyik A-beli alatt – és ekkor ez a kiterjesztés eleme $\mathrm{O}(A)$-nak.

Állítjuk másrészt, hogy $\mathrm{RO}(A)$ és B elemei inkompatibilisek. A 2.6. állítás szerint $p \in \mathrm{RO}(A)$ akkor és csak akkor, ha p minden kiterjesztése kompatibilis A valamelyik elemével. Ha $\mathrm{RO}(A)$-nak egy p eleme kompatibilis a P valamely q elemével, akkor van közös r kiterjesztésük. Ez az r mint p kiterjesztése kompatibilis kell hogy legyen valamelyik A-belivel, következésképp q is kompatibilis A-nak ugyanezzel az elemével. Tehát B definíciója miatt q nem lehet B-ben.

A G generikus filter minden M-beli sűrű halmazt elmetsz. $B \cup \mathrm{O}(A)$ is M-beli sűrű, tehát G elmetszi. Mivel G-ben bármely két elem kompatibilis, azért G nem metszheti el egyszerre $\mathrm{RO}(A)$-t és B-t is. Ha tehát $B \cap G \neq \emptyset$, akkor $\mathrm{RO}(A) \cap G = \emptyset$, és ekkor $A \subset \mathrm{RO}(A)$ miatt $A \cap G = \emptyset$ is teljesül.

A másik lehetőség, hogy $B \cap G = \emptyset$, ekkor viszont $B \cup \mathrm{O}(A)$ sűrűsége miatt $G \cap \mathrm{O}(A) \neq \emptyset$, vagyis G tartalmazza A valamelyik elemének egy kiterjesztését. G felszálló, tehát $G \cap A$ sem üres, és $A \subset \mathrm{RO}(A)$ miatt G ugyancsak elmetszi $\mathrm{RO}(A)$-t is. ■

Emlékeztetünk arra, hogy az A reguláris halmaz komplementerét $-A$, az $\{A_i : i \in I\}$ reguláris halmazok legkisebb felső korlátját $\sum A_i$, legnagyobb alsó korlátját pedig $\prod A_i$

jelöli. Természetesen egy M-beli reguláris halmaz komplementere is M-beli, továbbá ha A_i-k mindegyike M-beli és az $\{A_i : i \in I\}$ halmaz is M-beli, akkor e két korlát szintúgy M-beli reguláris halmaz.

4.9. Állítás *Legyen G tetszőleges generikus filter. Tegyük fel, hogy A és A_i M-beli reguláris részei P-nek $i \in I$-re, továbbá az $\{A_i : i \in I\}$ halmaz is M-beli. Ekkor*

(i) *$G \cap A = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $G \cap -A \neq \emptyset$;*
(ii) *minden i-re $G \cap A_i = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $G \cap \sum A_i = \emptyset$;*
(iii) *minden i-re $G \cap A_i \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $G \cap \prod A_i \neq \emptyset$;*
(iv) *valamilyen i-re $G \cap A_i = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $G \cap \prod A_i = \emptyset$;*
(v) *valamelyik i-re $G \cap A_i \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $G \cap \sum A_i \neq \emptyset$.*

Bizonyítás (i) következik abból, hogy az $A \cup -A$ halmaz M-beli és sűrű P-ben, továbbá A és $-A$ páronként inkompatibilis elemekből állnak. Ezért minden G generikus elmetszi az A és $-A$ valamelyikét, de nem tartalmazhat egyszerre elemet A-ból és $-A$-ból.
(ii) Mivel $A_i \subset \sum A_i$, azért ha G diszjunkt $\sum A_i$-tól, akkor diszjunkt A_i-tól is. Ha pedig G nem metszi el az egyik A_i-t sem, akkor $G \cap \bigcup A_i$ is üres, és így az előző lemma szerint $G \cap \mathrm{RO}(\bigcup A_i) = \emptyset$. Ugyanakkor $\mathrm{RO}(\bigcup A_i)$ az A_i halmazok legkisebb felső korlátja, vagyis $\sum A_i$, amivel az állítást beláttuk.
(iii) A bal oldalon $G \cap A_i \neq \emptyset$ minden i-re az (i) szerint pontosan akkor igaz, ha $G \cap \big(-A_i\big) = \emptyset$ minden i-re. Az (ii) szerint ez ekvivalens azzal, hogy $G \cap (\sum -A_i) = \emptyset$, és ismét (i) alapján ez pedig ekvivalens azzal, hogy $G \cap -\big(\sum -A_i\big) \neq \emptyset$. A deMorgan szabály szerint $-\big(\sum -A_i\big) = \prod A_i$, ami bizonyítja az állítást.
Végül (iv) és (v) az előző két sor átfogalmazása. ■

Legyen a és b két M-beli név, különböző G generikus filterekre kiszámítjuk ezek interpretáltját. Honnan ismerhetők fel azok a filterek, amelyeknél ez a két interpretált ugyanazt a halmazt adja? Erre a kérdésre ad választ a következő tétel.

4.10. Tétel *Tetszőleges a és $b \in V^{P,M}$ nevekre léteznek P-nek olyan $[\![\, a = b \,]\!]$-vel illetve $[\![\, a \in b \,]\!]$-vel jelölt M-beli reguláris részei, hogy tetszőleges G generikus filterre*

(i) *$i_G(a) \in i_G(b)$ akkor és csak akkor, ha $G \cap [\![\, a \in b \,]\!] \neq \emptyset$.*
(ii) *$i_G(a) = i_G(b)$ akkor és csak akkor, ha $G \cap [\![\, a = b \,]\!] \neq \emptyset$;*

Bizonyítás A két állítást az a és b nevek felépítésére vonatkozó szimultán rekurzióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $a \in V^{P,M}_{\alpha+1}$, $b \in V^{P,M}_{\beta+1}$, és mind (i) mind (ii) igaz az összes olyan (a, b') és (a', b) párra, ahol $a' \in V^{P,M}_{\alpha}$ és $b' \in V^{P,M}_{\beta}$. Nézzük először (i)-t. Az interpretáció definíciója szerint

$$i_G(b) = \{i_G(b') : \langle b', p\rangle \in b \text{ és } p \in G\},$$

tehát $i_G(a)$ akkor és csak akkor eleme $i_G(b)$-nek, ha van olyan $\langle b', p\rangle \in b$, amire egyrészt $p \in G$, másrészt $i_G(b') = i_G(a)$. Mivel b elemeinek első koordinátái már V^P_β-ban vannak, azért az indukciós feltevésünk szerint van olyan $[\![\, b' = a \,]\!]$ reguláris M-beli része P-nek, hogy $i_G(b') = i_G(a)$ pontosan akkor, ha $G \cap [\![\, b' = a \,]\!]$ nem üres. A 4.8. lemma szerint $p \in G$, vagyis $\{p\} \cap G \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha $\mathrm{RO}(p) \cap G \neq \emptyset$. A $p \in G$ és a $i_G(b') = i_G(a)$ közül tehát mindkettő pontosan akkor teljesül, ha G elmetszi mind a $\mathrm{RO}(p)$ mind a $[\![\, b' = a \,]\!]$ reguláris halmazt, vagyis a 4.9. állítás (iii) pontja miatt pontosan akkor, ha G elmetszi a $\mathrm{RO}(p) \cdot [\![\, b' = a \,]\!]$-t. Végül is $i_G(a) \in i_G(b)$ pontosan akkor, ha van b-nek olyan $\langle b', p \rangle$ eleme, amire $G \cap \big(\mathrm{RO}(p) \cdot [\![\, b' = a \,]\!]\big) \neq \emptyset$. A 4.9. állítás (v) pontja szerint G ezen reguláris halmazok *valamelyikét* pontosan akkor metszi el, ha

$$\emptyset \neq G \cap \sum \{\mathrm{RO}(p) \cdot [\![\, b' = a \,]\!] \; : \; \langle b', p \rangle \in b\}.$$

A kapcsos zárójelben álló M-beli reguláris halmazok M-beli halmazának legkisebb felső korlátja tehát a keresett $[\![\, a \in b \,]\!]$.

Másodjára nézzük (ii)-t. $i_G(a) = i_G(b)$ pontosan akkor, ha $i_G(a)$ minden eleme egyúttal eleme $i_G(b)$-nek, és $i_G(b)$ minden eleme benne van $i_G(a)$-ban. Ha mindkét feltételhez tudunk találni (természetesen felhasználva az indukciós hipotézist) olyan A és B reguláris halmazokat, hogy az egyik pontosan akkor teljesül, ha $G \cap A \neq \emptyset$, a másik meg akkor, amikor $G \cap B \neq \emptyset$, akkor ismét a 4.9. (iii) pontja alapján $A \cdot B$ jó lesz $[\![\, a = b \,]\!]$-nek.

Nézzük mit is jelent, hogy $i_G(a)$ minden eleme egyúttal eleme $i_G(b)$-nek. Az $i_G(a)$ elemei mindazok az $i_G(a')$ halmazok, melyekre $\langle a', p \rangle \in a$ és $p \in G$. Ahhoz, hogy ezek mind elemei legyenek $i_G(b)$-nek az, kell, hogy a-nak összes $\langle a', p \rangle$ elemére, valahányszor $p \in G$, akkor $G \cap [\![\, a' \in b \,]\!] \neq \emptyset$. Vagyis *vagy* $p \notin G$, *vagy* $G \cap [\![\, a' \in b \,]\!] \neq \emptyset$. Az hogy $p \notin G$ azt jelenti, hogy $\mathrm{RO}(p)$ nem metszi G, vagyis a komplementere metszi G-t; e kettő valamelyikének pedig 4.9. állítás (v) pontja szerint pont akkor van nem-üres metszete G-vel, ha G elmetszi az összegüket:

$$G \cap \big(-\mathrm{RO}(p) + [\![\, a' \in b \,]\!] \big) \neq \emptyset.$$

Ennek a feltételnek az a név *összes* $\langle a', p \rangle$ elemére fenn kell állnia, ami 4.9. (iii) pontja szerint pontosan akkor teljesül, ha G elmetszi a

$$\prod \{ -\mathrm{RO}(p) + [\![\, a' \in b \,]\!] \; : \; \langle a', p \rangle \in a\}$$

M-beli reguláris halmazt. Ezek szerint $i_G(a)$ pontosan akkor részhalmaza $i_G(b)$-nek, ha G elmetszi ezt a halmazt; hasonlóan $i_G(b)$ pontosan akkor részhalmaza $i_G(a)$-nak, ha G elmetszi a

$$\prod \{ -\mathrm{RO}(q) + [\![\, b' \in a \,]\!] \; : \; \langle b', q \rangle \in b\}$$

M-beli reguláris halmazt, és $i_G(a) = i_G(b)$, ha G elmetszi mindkettőt, vagyis ha 4.9. (iii) szerint G elmetszi e kettő metszetét. Ezzel a keresett reguláris halmazt előállítottuk, a tételt bizonyítottuk. ■

A bizonyítás a tételben kimondottnál többet adott. Nevezetes azt, hogy az a két leképezés, ami két M-beli a és b névhez hozzárendeli az M-beli $[\![a \in b]\!]$ illetve az $[\![a = b]\!]$ reguláris halmazt, egy–egy *M-beli operáció*, vagyis M-ben egy formulával definiálható. Ez azonnal adódik abból az általános tételből, hogy minden transzfinit rekurzióval definiált leképezés egy operáció.

4.11. Definíció Legyen a és b két név. Azt mondjuk, hogy a $p \in P$ feltétel *forszolja*, hogy a és b egyenlő legyen, jelben $p \Vdash a = b$, ha minden olyan G generikus filterre, ami p-t tartalmazza, $i_G(a) = i_G(b)$. Hasonlóan $p \Vdash a \in b$, ha minden olyan G generikus filterre, ami p-t tartalmazza, $i_G(a) \in i_G(b)$.

4.12. Állítás *Tetszőleges a, b névre $p \Vdash a = b$ pontosan akkor, ha $p \in [\![a = b]\!]$, továbbá $p \Vdash a \in b$ pontosan akkor, ha $p \in [\![a \in b]\!]$.*

Bizonyítás A Rasiowa–Sikorski tétel bizonyításánál láttuk, hogy ha p nem eleme egy reguláris halmaznak, akkor van olyan G generikus filter, ami p-t tartalmazza és a reguláris halmazt elkerüli. Ezért ha $p \notin [\![a = b]\!]$, akkor van olyan G generikus, ami a p-t tartalmazza, ám $G \cap [\![a = b]\!] = \emptyset$. A 4.10. tétel alapján ekkor $i_G(a) \neq i_G(b)$. Ha pedig $p \in [\![a = b]\!]$ és $p \in G$, akkor persze $G \cap [\![a = b]\!] \neq \emptyset$, és így ugyanezen tétel szerint $i_G(a) = i_G(b)$. Hasonlóan adódik az állítás az $a \in b$ esetre. ■

Ugyancsak a 4.10. tétel alapján pontosan akkor igaz hogy $i_G(a) = i_G(b)$, ha van olyan $p \in G$, ami forszolja $a = b$-t; és $M[G] \models i_G(a) \in i_G(b)$ pontosan akkor, ha van $p \in G$, amire $p \Vdash a \in b$.

A 4.10. tétel bizonyítása utáni megjegyzésünk szerint mind $p \Vdash a = b$ mind $p \Vdash a \in b$ az *M-ben definiálható*, vagyis vannak olyan $\varphi_1(p, a, b, P)$ és $\varphi_2(p, a, b, P)$ ZFC-formulák, amelyekre

$$\begin{aligned} p \Vdash a = b \quad & \text{akkor és csak akkor, ha } M \models \varphi_1(p, a, b, P), \\ p \Vdash a \in b \quad & \text{akkor és csak akkor, ha } M \models \varphi_2(p, a, b, P). \end{aligned}$$

A formulákban a P kényszerképzet paraméterként szerepel. A tétel bizonyítását végignézve ellenőrizhetjük, hogy ezek a formulák az M-re abszolútak is, vagyis a-nak és b-nek M-beli neveket választva akár M-ben, akár a világban értékeljük ki a φ_1 vagy φ_2 formulákat, ugyanazt kapjuk.

4.13. Tétel (Definiálhatósági tétel) *A halmazelmélet minden n-változós $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ formulájához létezik egy olyan M-beli $[\![\varphi(a_1, \dots, a_n)]\!]$-nel jelölt operáció, ami egy név n-eshez P-nek egy reguláris részét rendeli úgy, hogy minden G generikus filterre $M[G] \models \varphi(i_G(a_1), \dots, i_G(a_n))$ akkor és csak akkor, ha $G \cap [\![\varphi(a_1, \dots, a_n)]\!] \neq \emptyset$.*

Bizonyítás Azt már láttuk, hogy az állítás igaz az $x \in y$ és $x = y$ formulákra. Ezekből tetszőleges formulára annak felépítésére vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Ha a φ formulához indukciós feltevésünk folytán az $A \subset P$ reguláris halmazt rendeltük, akkor a φ tagadásához természetesen A komplementere fog tartozni. Egy G generikus ugyanis A

és $-A$ közül pontosan az egyikbe metsz bele, ami megfelel annak, hogy $M[G]$-ben φ és $\neg\varphi$ közül pontosan az egyik igaz.

Ha a φ formulához az A, a ψ formulához pedig a B reguláris halmaz tartozik, akkor $\varphi \wedge \psi$-hez $A{\cdot}B$, $\varphi \vee \psi$-hez pedig $A + B$ fog tartozni. A 4.9. állítás (iii) és (v) pontjai szerint ugyanis a G generikus filter pontosan akkor metszi el az $A{\cdot}B$ halmazt, ha mind A-t, mind B-t elmetszi, és pontosan akkor metszi el $A + B$-t, ha vagy A-t, vagy B-t elmetszi.

Ezek szerint csak a kvantorokkal kell foglalkoznunk. Az indukciós feltevés szerint van olyan M-beli operáció, ami az $a_1, \ldots, a_n$ nevek mint paraméterek mellett minden (M-beli) b névhez hozzárendeli P-nek egy

$$A_b \stackrel{\text{def}}{=} [\![\, \varphi(b, a_1, \ldots, a_n) \,]\!]$$

M-beli reguláris részét. Mivel P (M-beli) reguláris részei egy M-beli halmazt alkotnak, a gyűjtési axióma alapján rögzített $a_1, \ldots, a_n$-hez létezik neveknek olyan $B \in M$ halmaza, hogy csak ebből a halmazból véve a b neveket, P-nek összes olyan reguláris részét megkapjuk, ami egyáltalán előfordulhat A_b alakú halmazként. Ekkor a $\exists x\, \varphi(x, \vec{y})$ formulához a $\sum\{A_b : b \in B\}$, a $\forall x\, \varphi(x, \vec{y})$ formulához pedig a $\prod\{A_b : b \in B\}$ M-beli reguláris halmazok lesznek jók.

Először tegyük fel, hogy G elmetszi a $\sum\{A_b : b \in B\}$ halmazt. A 4.9. állítás (v) pontja szerint ekkor G elmetszi valamelyik A_b-t is. Az indukciós feltevés miatt ekkor $M[G] \models \varphi(i_G(b), i_G(\vec{a}))$, vagyis $M[G] \models \exists x\, \varphi(x, i_G(\vec{a}))$. Fordítva, ha $M[G]$-ben igaz ez az utóbbi formula, akkor van olyan c név is, amivel $M[G] \models \varphi(i_G(c), i_G(\vec{a}))$, vagyis $G \cap [\![\, \varphi(c, \vec{a}) \,]\!] \neq \emptyset$. A B halmaz választása miatt van olyan $b \in B$, amire $A_b = A_c$, tehát $[\![\, \varphi(c, \vec{a}) \,]\!] = [\![\, \varphi(b, \vec{a}) \,]\!] = A_b$, ahonnan $G \cap A_b \neq \emptyset$, és így $G \cap \sum\{A_b : b \in B\}$ sem üres.

Másodszor tegyük fel, hogy $G \cap \prod\{A_b : b \in B\}$ nem üres. Ugyancsak a 4.9. állítás (iii) pontja szerint G elmetszi az A_b halmazokat $b \in B$-re, de ekkor B definíciója miatt elmetszi az összes A_c halmazt is tetszőleges c névvel. Tehát $G \cap [\![\, \varphi(c, \vec{a}) \neq \emptyset$, és így az indukciós feltevés miatt $M[G] \models \varphi(i_G(c), i_G(\vec{a}))$ tetszőleges c névre, vagyis $M[G] \models \forall x\, \varphi(x, i_G(\vec{a}))$. Fordítva, ha ez így van, akkor G szükségképpen elmetszi az összes A_c halmazt, speciálisan azokat is, melyek indexe B-ből való. Ekkor pedig G elmetszi ezek legnagyobb alsó korlátját is, vagyis a $\prod\{A_b : b \in B\}$ halmazt. ■

4.14. Definíció A $p \in P$ *forszolja*, hogy az $a_1, \ldots, a_n$ nevek kielégítik a φ formulát, jelben $p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$, ha minden p-t tartalmazó G generikus filterre $M[G] \models \varphi(i_G(a_1), \ldots, i_G(a_n))$.

A 4.13. definiálhatósági tétel szerint p akkor és csak akkor forszolja a $\varphi(\vec{a})$ formulát, ha $p \in [\![\, \varphi(\vec{a}) \,]\!]$, továbbá $M[G]$-ben $\varphi(i_G(a_1), \ldots, i_G(a_n))$ akkor és csak akkor igaz, ha van olyan $p \in G$, ami forszolja a $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ formulát. Általában az, hogy p nem forszolja a φ állítást, és az, hogy p forszolja $\neg\varphi$-t, mást jelentenek. Ugyanis zárt φ-re

$p \nVdash \varphi$ azt jelenti, hogy *van olyan* p-t tartalmazó G generikus, hogy $M[G] \models \neg\varphi$, míg $p \Vdash \neg\varphi$ azzal ekvivalens, hogy *minden* p-t tartalmazó G generikusra $M[G] \models \neg\varphi$. Ez utóbbiból az előbbi következik, fordítva általában nem ez a helyzet. A „forszolja” reláció tulajdonságait kiolvashatjuk P reguláris halmazaira vonatkozó állításokból, ezek közül a legfontosabbakat illetve a legtöbbet használtakat foglaljuk most össze.

4.15. Tétel (i) $p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ *akkor és csak akkor, ha minden* p*-t tartalmazó* G *generikus filterre* $M[G] \models \varphi(i_G(a_1), \ldots, i_G(a_n))$;

(ii) *ha* $M[G] \models \varphi(i_G(a_1), \ldots, i_G(a_n))$ *akkor van olyan* $p \in G$*, amire* $p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$;

(iii) *Ha* $p \Vdash \varphi$ *és* $q \leq p$*, akkor* q *is forszolja* φ*-t;*

(iv) *Ha* $p \Vdash \varphi$ *és* $q \Vdash \neg\varphi$*, akkor* p *és* q *inkompatibilisek;*

(v) *Ha* A *sűrű* p *alatt és minden* $q \in A$*-ra* $q \Vdash \varphi$*, akkor* $p \Vdash \varphi$;

(vi) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ *akkor és csak akkor, ha* $p \Vdash \varphi$ *és* $p \Vdash \psi$;

(vii) $p \Vdash \neg\varphi$ *akkor és csak akkor, ha nincs* $q \leq p$*, ami forszolná* φ*-t;*

(viii) $p \Vdash \varphi \vee \psi$ *akkor és csak akkor, ha minden* $q \leq p$*-hez található* $r \leq q$*, amire vagy* $r \Vdash \varphi$ *vagy* $r \Vdash \psi$;

(ix) *Ha* $p \Vdash \varphi_1, \ldots, p \Vdash \varphi_n$ *és ezekből a formulákból formálisan következik* φ*, akkor* $p \Vdash \varphi$.

Bizonyítás A definiálhatósági tétel szerint p akkor és csak akkor forszolja φ-t, ha $p \in [\![\varphi]\!]$. A 2.11. tétel bizonyítása szerint ha $p \notin [\![\varphi]\!]$, akkor van olyan generikus filter, ami p-t tartalmazza, és $[\![\varphi]\!]$-t elkerüli. Innen kapjuk (i)-t és (ii)-t. (iii) következik abból, hogy a $[\![\varphi]\!]$ reguláris halmaz nyílt; (iv) pedig abból, hogy $[\![\varphi]\!]$ és $[\![\neg\varphi]\!] = -[\![\varphi]\!]$ diszjunkt reguláris halmazok, és ezért elemeik inkompatibilisek.

Ha A sűrű p alatt, akkor $p \in \mathrm{RO}(A)$, és ha A része egy reguláris halmaznak, akkor persze $\mathrm{RO}(A)$ is része neki. Ez adja (v)-t. (vi) annak következménye, hogy két reguláris halmaz legnagyobb alsó korlátja a metszetük, vagyis $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$.

Mivel $[\![\varphi]\!] \cup [\![\neg\varphi]\!]$ sűrű P-ben, azért P minden elemének van olyan kiterjesztése, ami vagy φ-t, vagy $\neg\varphi$-t forszolja. Ha most p egyetlen kiterjesztése sem forszolja φ-t, akkor p alatt azok az elemek, amit $\neg\varphi$-t forszolják, sűrű halmazt alkotnak. Ekkor viszont (v) miatt $p \Vdash \neg\varphi$, ahogyan azt (vii) állítja. (viii) annak az átfogalmazása, hogy $[\![\varphi \vee \psi]\!]$ pontosan azokból a P-beli elemekből áll, amik alatt $[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$ sűrű. Végül (ix) a legelső állítás egy egyszerű következménye. ■

A definiálhatósági tétel állítását a $\Vdash$ nyelvére átfogalmazva kapjuk, hogy minden $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formulához található olyan $\Phi(x_1, \ldots, x_n, p, P)$ formula, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ M-beli nevekre

$$p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{akkor és csak akkor, ha } M \models \Phi(a_1, \ldots, a_n, p, P),$$

vagyis a „p forszolja φ-t” reláció M-ben definiálható. Maga a Φ definiáló formula természetesen függ φ-től, de nem függ M-től. Minél bonyolultabb φ, annál bonyolultabb lesz Φ is, nem lehet az összes φ-re egyetlen közös definíciót találni. A Φ formula általában nem abszolút M-re.

A 4.13. definiálhatósági tételt a ZFC nyelvén felírt formulákra mondtuk ki és bizonyítottuk be. Ennél egy cseppet több is igaz, nevezetesen formuláinkban az „eleme” és „egyenlő” kétváltozós relációjelek mellett megengedhetnénk a „Régi” egyváltozós jel használatát is: egy $x \in M[G]$ halmazra „Régi(x)” pontosan akkor igaz, ha x eleme M-nek, és hamis, ha nem. Ez azt jelenti, hogy $M[G]$-ben a „régi” halmazokból álló M osztályként viselkedik (bár ő maga nem feltétlenül egy osztály $M[G]$-ben). Például egy $M[G]$-beli halmaznak és M-nek a metszete szintén eleme $M[G]$-nek, vagy ha egy $M[G]$-beli leképezés definíciójában hivatkozunk M-re (mint régi halmazokra), akkor egy $M[G]$-beli halmaznak ennél a leképezésnél előálló képe szintén $M[G]$-beli lesz. Ehhez annyit kell meggondolnunk, hogy tetszőleges a névre létezik és M-ben definiálható a $[\![\,\text{Régi}(a)\,]\!] \subset P$ reguláris halmaz azzal a tulajdonsággal, hogy $i_G(a) \in M$ akkor és csak akkor, ha $G \cap [\![\,\text{Régi}(a)\,]\!] \neq \emptyset$. Ám ez a feladat könnyű: legyen α a legkisebb olyan rendszám, amire $a \in V_\alpha^{P,M}$, és ezzel

$$[\![\,\text{Régi}(a)\,]\!] \overset{\text{def}}{=} [\![\, a \in \check{V}_\alpha^M \,]\!],$$

ahol V_α^M az M-beli kumulatív hierarchia α-adik szintje. Valóban, $i_G(a)$ rangja $a \in V_\alpha^{P,M}$ miatt csak α-nál kisebb lehet, és ha még $i_G(a) \in M$, akkor persze eleme V_α^M-nak. Természetesen „Régi(x)” helyett „$x \in M$”-et fogunk írni.

Feladatok

1. Legyenek a és b olyan nevek, amikre $a \subset b$. Igazoljuk, hogy ekkor $i_G(a) \subset i_G(b)$.
2. Legyen $\mathcal{B}^M$ illetve $\mathcal{B}$ az M-beli P kényszerképzet reguláris részeiből alkotott M-beli illetve világbeli Boole-algebra. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{B}^M$ tetszőleges (nem feltétlenül M-beli) részhalmazának van $\mathcal{B}^M$-ben legkisebb felső korlátja, akkor ugyanaz a legkisebb felső korlát $\mathcal{B}$-ben is.
3. Legyen a egy M-beli név és $x = i_G(a)$. Keressünk olyan M-beli b nevet, amire $\cup x \subset i_G(b)$.
4. Legyen α egy M-beli rendszám. Mutassuk meg, hogy minden $M[G]$-beli halmaznak van olyan neve, ami nincs $V_\alpha^{P,M}$-ban.
5. A $p \in P$ feltétel a φ formulát *eldönti*, ha $p \Vdash \varphi$ vagy $p \Vdash \neg\varphi$. Igazoljuk, hogy minden p-re és φ-re van p-nek olyan kiterjesztése, ami φ-t eldönti.
6. Legyen $x \in M[G]$, és x egy neve $\dot{x}$. Minden M-beli α rendszámra legyen

$$a_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{\langle \check{u}, p\rangle \,:\, u \in V_\alpha^M \text{ és } p \Vdash \check{u} \in \dot{x}\}.$$

   Mutassuk meg, hogy ez egy M-beli név, továbbá hogy valamilyen α-ra a_α neve az $x \cap M$ halmaznak (és így ez utóbbi eleme $M[G]$-nek).
7. Álljon $x \in M[G]$ csupa M-beli halmazból, vagyis $x \subset M$. Mutassuk meg, hogy van olyan $y \in M$, ami bővebb x-nél (vagyis M *univerzális* $M[G]$-ben).