3. fejezet

A halmazelmélet modelljei

Kurt Gödel nevezetes teljességi tétele szerint annak igazolására, hogy egy Γ formulahalmaznak következménye a φ állítás, két út között választhatunk. Vagy levezetjük φ-t a formális logika szigorú szabályai szerint a Γ formulahalmazból, vagy pedig megmutatjuk, hogy Γ minden modelljében igaz a φ állítás. Azt, hogy φ *nem* vezethető le, praktikusan úgy mutatjuk, meg, hogy Γ-nak konstruáljuk egy olyan modelljét, amelyben φ nem igaz. Azt például, hogy nem kommutatív gyűrűk esetén nem elegendő az egyik oldali disztributivitást kikötni úgy mutatjuk meg, hogy megadunk olyan összeadást és szorzást, ami csak az egyik oldalról disztributív, de a gyűrűk többi axiómáját teljesíti. Mivel mi halmazelméleti állításokról akarjuk megmutatni, hogy nem vezethetők le, ezért halmazelméleti modelleket kell konstruálnunk.

Ha itt „halmazelmélet” helyett mondjuk „csoportelmélet” állna, akkor feladatunk a csoportok vizsgálata és a csoportelmélet modelljeinek konstrukciója volna. Csoportból sok különböző van, és viszonylag könnyen meg tudjuk ragadni azt, ami a különböző csoportokban közös: konkrét csoportok helyett azok elvonatkoztatott, közös tulajdonságait vizsgáljuk csak. Halmazelméleti struktúrából azonban csak egy van (szkeptikusok azt mondanák: legfeljebb egy), mivel azt képzeljük, hogy a halmazelmélet a matematikai gondolkodásunk világát fogja meg. Sok különböző konkrét halmazelméleti modell helyett egyetlen eggyel kell beérnünk, ezért sok helyütt analógiákra, matematikai intuíciókra kell építenünk. A helyzet hasonlít ahhoz, ahogyan egy őslénykutató egyetlen lelet alapján próbálja meg felvázolni egy egész faj természetrajzát.

Vizsgálódásaink során természetesen sok matematikai eredményt, közöttük nagy számban halmazelméleti fogalmakat és tételeket fogunk használni. Hogyan lehetséges ez? Az, hogy halmazelméleti módszereket, sőt magát a halmazelméletet használjuk a halmazelmélet vizsgálatára, önmagában nem baj, hiszen egy orvos is kezelheti magát meghűlés ellen. Persze ha vakbéllel kell operálni, az más eset. Mivel nem kívánjuk sem a halmazelmélet, sem a matematika alapjait vizsgálni, ezért a felvetődő filozófiai illetve módszertani kérdésekkel nem kell, és nem is fogunk foglalkozni. Magát a „halmazelméletet” úgy tekintjük, mint egy algebrai struktúrát, amelyben jónéhány axióma fennállását megköveteljük, ám semmi többet. Ezen struktúrák belső felépítését, tulajdonságait vizsgáljuk az összes rendelkezésre álló matematikai eszközzel. A helyzetet kissé bonyolítja, hogy a matematika jelentős része (hogy ez vajon az egész matematika-e, arról viták folynak) megfogalmazható a halmazelméleten belül is, így ezekben a struktúrákban mindez megtalálható. Ez azonban minket egy csöppet sem fog zavarni.

1. A halmazelmélet ZFC axiómarendszere

A halmazelmélet axiómáinak felírásakor két egymással szemben álló követelményt kell figyelembe vennünk. Az egyik, hogy az axiómák és az általuk használt fogalmak minél egyszerűbbek legyenek. Ezzel könnyebbé tesszük a modellek konstruálását, illetve annak ellenőrzését, hogy egy kemény munkával elkészített struktúra ténylegesen modellje-e a halmazelméletnek. A másik oldalról az axiómák következményeiként a matematika teljes fegyvertárának elő kell állnia — hiszen a matematika a halmazelméletre visszavezethető. Így ha az axiómáink egyszerűek, akkor sokat kell dolgoznunk azon, hogy különböző technikai trükkökkel újabb fogalmakat vezessünk be és azok elvárt tulajdonságait az axiómákból levezessük. A halmazelmélet szokásos axiómarendszerei az első követelménynek tesznek eleget, nevezetesen egyszerű alapfogalmakból építkeznek. A bevezető halmazelméleti előadások anyaga az, hogy miként lehet egy ilyen lecsupaszított rendszerben létrehozni a naív halmazelméletet, és arra építve a matematika további fejezeteit.

A halmazelmélet axiomatizálása nem sokkal az úgynevezett halmazelméleti antinómák felbukkanása után kezdődött, hiszen csak a szigorú axiomatikus módszer tette lehetővé, hogy az intuíció csapdáit elkerüljük. Az 1900-as évek első évtizedeire a halmazelméletnek két különböző, ám egymással ekvivalens axiómarendszere is kialakult. A ZFC-vel jelölt *E. Zermelo* és *A. Fraenkel* nevéhez fűződik, a C pedig a kiválasztási axiómát (choice) jelenti. A másik axiómarendszer GB, ami *K. Gödel*, *P. I. Bernays* és *Neumann János* (1903–1957) munkája. A ZFC rendszer két alapfogalommal operál, nevezetesen a „halmaznak lenni," és két halmaz között fennálló „elemének lenni" kétváltozós relációval. A GB alapfogalmai a „halmazok" és az „osztályok," a köztük lévő „elemének lenni" kapcsolat pedig olyan, hogy egy halmaz lehet eleme egy másik halmaznak vagy egy osztálynak, míg egy osztály nem lehet eleme sem halmaznak sem pedig egy másik osztálynak. A bonyolultabb fogalomrendszer előnye, hogy GB csak véges sok formulából áll, míg a ZFC végtelen sokból. A modern halmazelméleti kutatásokban szinte kivétel nélkül a ZFC-t vagy annak valamilyen változatát használják, ahogyan azt mi is tesszük. Ennek oka, hogy a ZFC fogalomrendszere természetesebb, könnyebben kezelhető, az adódó technikai problémákkal pedig mindenképpen meg kell valamikor küzdeni.

A halmazelmélet ZFC axiómarendszerének egy modelljére úgy gondolunk, ami áll egy csomó pontnak egy M halmazából (ezek jelentik a modell szerint létező „halmazokat"), valamint e pontok (azaz a modell „halmazai") közti „elemének lenni" binér relációból. Az hogy modellünkben valamiféle „halmaz" létezik azt jelenti, hogy M-ben olyan pont, ami más pontokkal éppen a megkívánt módon áll relációban. Például M-ben az „üres halmaz" olyan pont, amelynek egyetlen más pont sem „eleme," vagyis M egyetlen más elem sincs vele az „eleme" relációban. A meghatározottság (bármely halmazt egyértelműen meghatároznak elemei) pedig azt jelenti, hogy ha kiveszünk M-ből két különböző pontot, akkor található hozzájuk olyan harmadik, amely a kettő közül az egyiknek „eleme," a másiknak pedig nem. A ZFC axiómák a végtelenségi axióma kivételével mind úgy szólnak, hogy ha már néhány halmaz létezik, akkor bizonyos további tulajdonságú halmaznak is léteznie kell. Például a pár axióma szerint bármely két ponthoz létezik olyan harmadik, melynek pontosan ez a kettő az „eleme." Egy halmazelméleti modellt ezek szerint egy $\langle M, E\rangle$ párral adhatunk meg, itt M elemei a „halmazok," és $E\subset M \times M$ a modellbeli „eleme" kétváltozós reláció.

Amikor halmazelméleti állításokat írunk le, bennük az „eleme" relációt mindig az $\in$ jelzi, mint például $\exists x\,(x \in y)$. Egy ilyen állítás persze a különböző modellekben lehet igaz vagy hamis attól függően mit írunk a szabad változók helyébe, és főleg attól, hogy mit is jelent a modellben az „elemének lenni" reláció. Ugyancsak az $\in$ jelet használjuk annak kifejezésére, hogy egy valódi halmaz ténylegesen eleme egy másik (valódi) halmaznak.

Szigorúan formális tárgyalásmódban ezt nem tehetnénk meg, ugyanis az első esetben egy *nyelvi eszközről* van szó (hogyan írjunk fel egy állítást), míg a másodikban egy konkrét, rögzített szemantikai fogalomról. Abban, hogy egy valódi halmaz eleme-e egy másiknak, nincs semmi választásunk, ugyanúgy meghatározott, mint az, hogy kétszer kettő az négy. Ugyanakkor a $\exists x\,(x \in y)$ formulában az $\in$ csak egy jel (egészen pontosan relációjel), és ennek a jelnek az értelmét az $\langle M, E\rangle$ modell adja meg. Mi mégsem teszünk különbséget e két használat között. Egyrészt reményeink szerint minden esetben a környezetből világosan kiderül, hogy az $\in$ jelet éppen melyik értelemben használjuk. Másrészt halmazelméleti modelljeink szinte kivétel nélkül olyanok lesznek, hogy bennük az „elemének lenni" reláció egybeesik a valódi $\in$ relációval, vagyis ilyenkor $x \in y$ ugyanazt jelenti akár a modellben, akár a világban értjük.

Természetesen ha $\langle M, E\rangle$-ben a ZFC axiómák igazak, akkor ebben a modellben a halmazelmélet összes tétele is automatikusan teljesül. Persze a tételben szereplő fogalmakat *megfelelően kell értelmeznünk*. Mivel a modellben eredetileg csak az E-vel jelölt „elemének lenni" reláció adott és az összes többi halmazelméleti fogalmat ennek segítségével definiáljuk, mindig meg kell gondolnunk, hogy a különböző fogalmak a modellben tulajdonképpen mit is jelentenek — igen gyakran egészen mást, mint amit várunk.

A ZFC axiómarendszer viszonylagos egyszerűsége ellenére nagyon gazdag és bonyolult struktúrát indukál. (Ez persze nem véletlen.) Éppen ez a bonyolultság akadályozta meg sokáig hogy halmazelméleti modelleket nagy változatosságban tudjunk gyártani.

3.1. Definíció A halmazelmélet ZFC axiómarendszere a következő axiómákból áll:

A1	(meghatározottság)	minden halmazt meghatároznak az elemei
A2	(pár)	minden x, y-ra létezik az $\{x, y\}$ pár
A3	(unió)	minden x-re létezik az $\cup x$ halmaz
A4	(hatványhalmaz)	minden x-re létezik a $\mathcal{P}(x)$ hatványhalmaza
A5	(végtelenség)	létezik végtelen halmaz
A6	(helyettesítés)	minden operációnál halmaz képe halmaz
A7	(regularitás)	minden halmazban létezik $\in$-minimális elem
C	(kiválasztás)	minden halmazon létezik kiválasztási függvény

Némi megjegyzés ehhez a vázlatos megfogalmazáshoz. Természetesen az $\cup x$ és $\mathcal{P}(x)$ jelölések jogosságát éppen az A3 és A4 (valamint az A1 meghatározottsági) axiómák mondják ki; $\cup x$ az a halmaz, ami az x elemeinek elemeiből áll, $\mathcal{P}(x)$ pedig az a halmaz, ami x összes részhalmazából. Egy ZFC modellben például A4 fennállása azt jelenti, hogy a modell egy x elemére (pontjára) keressük ki a modell összes olyan pontját, melyek „elemei” x „elemei” közül kerülnek ki. Ekkor A4 szerint van a modellben egy olyan $\mathcal{P}(x)$-szel jelölt pont is, melynek „elemei” pontosan az így kikeresett pontok.

Legyen $\varphi(x, \vec{y})$ egy a halmazelmélet (vagyis esetünkben a ZFC) nyelvén megfogalmazott formula. Az $\langle M, E\rangle$ modell M alaphalmazából kiveszünk tetszőlegesen az $\vec{y}$ változójeleknek megfelelő $\vec{p}$ paramétereket. Nézzük a modell összes olyan $a \in M$ elemét, amire a $\varphi(a, \vec{p})$ formula igaz M-ben:

$$\{a \in M \,:\, M \models \varphi(a, \vec{p})\}.$$

M-nek erről a részhalmazáról azt mondjuk, hogy azt a φ (paraméteres) formula *definiálta*. Az *M-beli osztályok* éppen M-nek ezek a definiálható részei. Természetesen ha $p \in M$, akkor p „elemei” osztályt alkotnak, ugyanis ezek összességét éppen az $x \in p$ formula definiálja. Az egész M is egy osztály (az $x = x$ megfelelő formula), és két osztály metszete, uniója, valamint egy osztály (M-re vonatkozó) komplementere is osztály. *Operáció*nak nevezünk formulával megadható (azaz definiálható) M-ből M-be történő leképezést. A definícióban M elemei ismét szerepelhetnek paraméterként. Vagyis a $\varphi(x, y, \vec{p})$ formula egy M-beli operációt definiál, ha minden x-re pontosan egy olyan y található, amivel ez a formula igaz, vagyis ha

$$M \models \forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y, \vec{p}).$$

Így az A6 helyettesítési axiómaséma pontos alakja: minden $\varphi(x, y, \vec{p})$ formulára

$$\forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y, \vec{p}) \to \forall u\, \exists v\, \big(y \in v \leftrightarrow (\exists x \in u\,)\varphi(x, y, \vec{p})\big)$$

vagyis ha φ egy operációt definiál, akkor az u elemeinek a φ szerinti képei éppen a v halmazt alkotják.

Szükségünk lesz az úgy nevezett *részhalmaz axiómasémára* is. Ez azt mondja ki, hogy egy halmaz adott formulát kielégítő elemei is halmazt alkotnak; vagy más szóval halmaz és osztály metszete is halmaz:

A8 (részhalmaz) $\qquad \forall u\, \exists v\, \big(x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge \varphi(x, \vec{p})\big).$

Ez az axiómaséma következménye A6-nak. Rögzítsük ugyanis M-nek egy u elemét, és keressük ki M-ben az összes olyan x-et, amire egyrészt x „eleme” u-nak (vagyis M-ben igaz az $x \in u$ formula), másrészt $M \models \varphi(x, \vec{p})$. Megmutatjuk, hogy van olyan M-beli v, aminek pontosan ezek az x-ek az „elemei.” Definiáljunk egy operációt következő módon. Válasszuk ki M-ből egy rögzített t-t, amire $t\ E\ u$, valamint $M \models \varphi(t, \vec{p})$. Ha ilyen t elem nem volna, akkor v az üres halmaz, és mint ilyen létezik. (Az üres halmaz létezése például a végtelenségi és a regularitási axiómákból következik.) Tetszőleges x

„halmazra” legyen x képe saját maga, ha $M \models \varphi(x, \vec{p})$, és legyen t egyébként. Ez a leképezés formulával definiálható (amiben persze $\vec{p}$-n kívül paraméterként szerepel a t is), tehát az A6 helyettesítési axióma alapján az u képe is „halmaz,” ez pedig éppen a keresett v-t adja meg.

Az A8 segítségével az A3 (unió), A4 (hatvány) és A6 (helyettesítés) axiómákat az alábbi módon gyengíthetjük:

A3′	(unió)	minden x-re létezik y, ami bővebb $\cup x$-nél;
A4′	(hatvány)	minden x-re létezik $y \supset \mathcal{P}(x)$;
A6′	(helyettesítés)	minden operációnál halmaz képe lefedhető egy halmazzal;

ugyanis az ezek szerint létező bővebb halmazokból a keresett részt egy megfelelő formulával kivághatjuk.

A végtelenségi axióma az egyetlen, ami feltétel nélkül egy halmaz, mégpedig egy végtelen halmaz létezését mondja ki. Az axióma meglehetősen technikai jellegű, ezért ennek pontos felírásától eltekintünk. Azt, hogy egy x halmaz végtelen legyen, például úgy lehet biztosítani, hogy x nem üres (például x-nek eleme az üres halmaz), és valahányszor $y \in x$, mindannyiszor $\{y\} \in x$.

Egy A halmazon értelmezett kétváltozós R reláció *jólfundált*, ha A-nak minden nem üres $B \subset A$ részhalmazában van R-minimális elem, vagyis olyan $y \in B$, hogy B-nek egyetlen eleme sem R-kisebb y-nál:

$$\forall B \subset A \left(B \neq \emptyset \to (\exists y \in B)(\forall u \in B)\neg(u\, R\, y) \right).$$

Az A7 regularitási, vagy másnéven *jólfundáltsági* axióma azt mondja ki, hogy tetszőleges halmaz elemeire megszorítva az $\in$ relációt, egy jólfundált relációt kapunk. Vegyünk egy a halmazt, ennek elemei között az $\in$ relációnak jólfundáltnak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy a minden nem üres részhalmazában kell lennie $\in$-minimális elemnek, vagyis olyannak, amivel a részhalmaz egyetlen eleme sem áll $\in$ relációban. Ez persze ekvivalens azzal, hogy minden nem üres halmazban van $\in$-minimális elem, amit formulával felírva a következők kapjuk:

$$\forall x \neq \emptyset\, \exists y \in x\, \forall u\, (u \in x \to u \notin y).$$

Nézzük meg, mit jelent a regularitási axióma az $\langle M, E\rangle$ modellben. Vegyünk egy $a \in M$ „halmazt.” Ekkor a „elemei” között az E relációnak M-jólfundáltnak kell lennie, vagyis a-nak az M elemei által meghatározott nem üres részeiben kell lennie E-minimális elemnek. Ezért elképzelhető, hogy az $\langle M, E\rangle$ modellben a regularitási axióma igaz, ám az E reláció a valóságban ennek ellenére nem jól fundált. Ennek oka, hogy az axióma E-minimális elem létezését M-nek csak azokban a részeiben követeli meg, melyeket egy M-beli elem határoz meg.

Egy x halmaz *tranzitív*, ha zárt az $\in$ relációra, azaz $y \in x$ és $z \in y$ esetén $z \in x$ is teljesül. Az α halmaz *rendszám*, ha tranzitív, és elemei között az $\in$ reláció jólrendezés. Ez utóbbi azt jelenti, hogy ez a reláció egyrészt *rendezés*: ha x, y és z mindannyian elemei α-nak, akkor az $x \in y$, $x = y$ és $y \in x$ közül pontosan az egyik teljesül (trichotómia); valamint ha $x \in y$ és $y \in z$, akkor $x \in z$ (tranzitivitás). Másrészt *jólrendezés*, vagyis α minden nem-üres részhalmazában létezik a rendezés szerinti legkisebb elem. Ezt pedig pont azt jelenti, hogy α elemein az $\in$ reláció jólfundált. Rendszámoknak ez a definíciója *Neumann János*tól származik. A regularitási axióma fennállása esetén nincs szükség a jólrendezésre, elegendő a rendezést megkövetelnünk, ebből a jólrendezés már következik. A rendszámok együttesen egy osztályt alkotnak, amit szokás szerint On jelöl. Ez valódi osztály, hiszen nem létezhet olyan halmaz, aminek minden rendszám eleme volna.

Ezek a definíciók természetesen a halmazelmélet modelljeiben is működnek. Például az M-nek egy x elemére M-ben igaz, hogy ő tranzitív, ha x zárt az E relációra: $y\ E\ x$ és $z\ E\ y$ esetén $z\ E\ x$ is teljesül. Az $\alpha \in M$ pedig M-ben rendszám, ha az $\{x \in M : x\ E\ \alpha\}$ (igazi) halmazon, ami éppen α „elemeiből” áll, az E reláció rendezés, továbbá ennek összes M-beli elem által meghatározott részében van E-minimális elem.

Rendszámokra vonatkozó rekurzióval szokás definiálni a *kumulatív hierarchiát* a következőképpen. V_0 az üres halmaz; minden α rendszámra $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, vagyis a V_α hatványhalmaza; ha pedig α limesz rendszám, akkor $V_\alpha = \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\}$. A V osztály azokból a halmazokból áll, amelyek valamelyik V_α-ba beleesnek. (Az, hogy V valóban osztály, a transzfinit rekurzió tételéből következik.) Egy V-beli x halmaz *rangja* az a minimális α rendszám, amire $x \in V_\alpha$. Egy halmaz rangja csak rákövetkező rendszám lehet, továbbá ha x rangja α és $y \in x$, akkor y-nak is van rangja, és ez a rang α-nál szigorúan kisebb.

A regularitási axióma segítségével az A6$'$ helyettesítési axiómaséma következő erősítését fogjuk igazolni:

A6$''$ (gyűjtés) $\qquad \forall x\, \exists y\, \forall u \in x\, \big(\exists v\, \varphi(v, u, \vec{p}) \to (\exists v \in y)\varphi(v, u, \vec{p})\big),$

vagyis ha x-nek egy u eleméhez egyáltalán található olyan v, ami a $\varphi(v, u, \vec{p})$ paraméteres formulát kielégíti, akkor ilyen v már az y halmazban is van. A formulában a paraméterek között x is szerepelhet, de y természetesen nem.

Rögzített $\vec{p}$ paraméterek mellett rendeljünk hozzá minden u halmazhoz egy rendszámot a következőképpen. Ha nincs olyan v, amire a $\varphi(v, u, \vec{p})$ formula igaz volna, akkor a hozzárendelt rendszám a 0. Ha pedig ilyen v létezik, akkor legyen ez a minimális olyan α rendszám, ami ilyen v rangja lehet. Ez a hozzárendelés formulával definiálható, tehát operáció, és így A6 miatt az x halmaz elemeihez rendelt rendszámok halmazt alkotnak. Rendszámok tetszőleges halmazának van felső korlátja, esetünkben legyen ez α, vagyis ha x-nek egy tetszőleges u eleméhez egyáltalán létezik olyan v, amire $\varphi(v, u, \vec{p})$ teljesül, akkor olyan v is van, aminek rangja legfeljebb α. Mivel minden legfeljebb α rangú halmaz eleme V_α-nak, azért A6$''$-ben az $y = V_\alpha$ megfelelő választás.

A halmazelmélet ZFC axiómarendszerének a következő változata ezek szerint ekvivalens a 3.1. definícióban megadott rendszerrel. Mivel a továbbiakban kizárólag ezt a változatot fogjuk használni, a ZFC jelölés erre a formulahalmazra fog utalni.

A1	(meghatározottság)	minden halmazt meghatároznak az elemei
A2	(pár)	létezik az $\{x, y\}$ pár
A3′	(unió)	létezik $\cup x$-nél bővebb halmaz
A4′	(hatványhalmaz)	létezik $\mathcal{P}(x)$-nél bővebb halmaz
A5	(végtelenség)	létezik végtelen halmaz
A6″	(gyűjtés)	ha x elemeihez léteznek adott tulajdonságú elemek, akkor ilyeneket egy y halmazba is össze lehet gyűjteni
A7	(regularitás)	minden halmazban van $\in$-minimális elem
A8	(részhalmaz)	halmaz és osztály metszete halmaz
C	(kiválasztás)	minden halmazon létezik kiválasztási függvény

Nem esett szó még a kiválasztási axiómákról. Mikor a halmazelmélet többi axiómái már nagyjából körvonalazódtak, bizonyos állításokat nem sikerült belőlük levezetni *a formális logika szigorú szabályai szerint*, bár szokásos „naív” bizonyítások léteztek. Ilyen állítások voltak például

- megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható;
- minden vektortérben létezik bázis;
- a $[0, 1]$ zárt intervallumnak létezik nem Lebesgue-mérhető része;
- van nem triviális ultraszűrő a természetes számokon.

Számtalan, a hiányzó láncszemet pótlandó, a bizonyítást lehetővé tevő elv és axióma jelent meg, ezek közül a két legfontosabb talán *Ernst Zermelo* jólrendezési tétele (ami szerint minden halmaz jólrendezhető), valamint *Max Zorn* (1906–1993) nevezetes lemmája. Ezek mindegyike egymással ekvivalens (ekvivalenciájuk a többi halmazelméleti axiómából viszonylag egyszerűen bizonyítható), és végül az ekvivalensek egyike, a fent idézett kiválasztási axióma került be a halmazelmélet axiómái közé. Mivel a kiválasztási axióma nem annyira természetes és „nyilvánvaló,” mint a többi, ráadásul a bizonyítások „formai tökéletességét biztosítandó” axiómaként került a többi mellé, a kezdetektől fogva e körül az axióma körül volt a legnagyobb vita. Nem lehetséges, hogy ez az axióma hozza be az ellentmondásokat? Vagy nem lehetséges, hogy fölösleges: levezethető a többiből? Az első kérdésre *Gödel* adta meg a választ 1941-ben, mikor megmutatta, hogy ha a halmazelmélet többi axiómája ellentmondástalan, akkor a kiválasztási axióma hozzáadásával is ellentmondástalan marad. Egészen pontosan megmutatta, hogy ha az axiómák közül elhagyjuk a kiválasztási axiómát és vesszük a maradéknak egy modelljét, annak mindig van egy nagyon szép tulajdonságokkal rendelkező részmodellje, amiben a halmazelmélet axiómái továbbra is igazak, ráadásul még a kiválasztási axióma (meg például az általánosított kontinuum hipotézis) is teljesül. Arra a kérdésre, hogy a kiválasztási axiómára szükség van-e, vajon nem következik-e a többiből, *Paul Cohen* forszolásos módszere adta meg a választ 1963-ban: lehet a halmazelméletnek olyan modelljét konstruálni, amiben a kiválasztási axióma nem igaz.

2. Halmazelméleti modellek

Mint azt már láttuk, a halmazelmélet ZFC axiómarendszere két alapfogalommal operál: ezek a „halmaznak lenni," illetve az ezek között fennálló „eleme" reláció. A halmazelméleti modelljeink ennek megfelelően két komponensből állnak: az $\langle M, E\rangle$ modellben az M alaphalmazból, aminek elemei azok az objektumok, amik a modell „halmazai;" és az M elemein értelmezett E kétváltozós reláció ami az „eleme" fogalmat reprezentálja: ha x és y „halmazok," akkor x „eleme" y-nak, ha az $x\ E\ y$ reláció fennáll. Az E relációt úgy is elképzelhetjük, mint egy irányított gráf éleit: $x\ E\ y$ pontosan akkor, ha y-ból irányított él megy x-be.

A regularitási axióma miatt minden halmaznak van rangja, és ha x eleme y-nak, akkor x rangja határozottan kisebb y rangjánál. Így egyetlen halmaz sem lehet eleme önmagának, és nincsen olyan pár sem, melyeknél mindkettő eleme volna a másiknak. Ezért a regularitási axióma fennállása esetén ez az irányított gráf *egyszerű*: nincsen benne hurokél, és két pont között legfeljebb egyetlen él futhat. Azt is könnyű látni, hogy ebben a gráfban irányított kör sincs.

Az $\langle M, E\rangle$ modellben M maga is halmaz. Az M elemei között az E reláción kívül létezik a valódi halmazok között fennálló valódi „elemének lenni" reláció is. Ha ez a két reláció egybeesik, vagyis $x\ E\ y$ pontosan akkor, ha $x \in y$, akkor a modellről azt írjuk, hogy $\in$*-modell*, és azt mondjuk, hogy *epszilon-modell*. Epszilon-modellek esetén persze az E relációt nem kell külön megadnunk, hiszen azt M elemei már meghatározzák. Ha külön hangsúlyozni akarjuk, hogy $\in$-modellről van szó, akkor az $\langle M, \in\rangle$ jelölést használjuk (tulajdonképpen jogosulatlanul, hiszen $\in$ nem egy M-en értelmezett kétváltozós reláció), egyébként magát a modellt azonosítjuk az alaphalmazával, és egyszerűen csak M-mel jelöljük.

Legyen tehát M egy $\in$-modell. Ebben az M-beli üres halmaz, amit $\emptyset^M$ jelöl, M-nek olyan eleme, amelynek nincs M-ben egyetlen további eleme sem. $\emptyset^M$-nek persze nem kell a valódi üres halmaznak lennie, lehetnek M-től diszjunkt elemei. Sőt az is elképzelhető, hogy M-ben több különböző üres halmaz is van, ilyenkor persze M-ben nem lesz igaz a meghatározottsági (A1) axióma. Hasonlóan adott x, $y \in M$-re az M-beli $\{x, y\}^M$ pár M-nek olyan eleme, aminek az x-en és y-on kívül nincs más M-beli eleme, vagyis aminek M-mel való metszete éppen az $\{x, y\}$ (valódi) pár.

Az $\in$-modellek közül különösen fontosak azok, melyeknek alaphalmaza tranzitív. Az ilyen úgynevezett *tranzitív* $\in$*-modellek* tulajdonságai jobban kezelhetők, könnyebben vizsgálhatók, ugyanakkor pedig eléggé általánosak, amit majd később bizonyítani fogunk. Egy ilyen modellről azt mondjuk, hogy *zárt a* $\{\}$*-ra*, ha két tetszőleges, bár nem feltétlenül különböző a és b elemével együtt az $\{a, b\}$ halmazt is tartalmazza.

Ha most M tranzitív $\in$-modell, akkor $\emptyset^M$ csak a (valódi) üres halmaz lehet. Valóban, ha a világban $\emptyset^M$ halmaznak volna eleme, akkor az M tranzitivitása miatt ez M-ben is benne volna, és így halmazunk már M-ben sem lehetne az üres halmaz. Hasonlóan, $\{a, b\}^M = \{a, b\}$, hiszen akármelyik másik halmaznak vagy nem eleme a és b, vagy van ezeken kívül más eleme is, és ekkor ugyanez igaz M-ben is.

3.2. Definíció Egy $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ halmazelméleti formuláról (fogalomról) azt mondjuk, hogy *abszolút az M-re*, ha tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in M$ esetén $M \models \varphi(\vec{a})$ akkor és csak akkor teljesül, ha a világban is igaz $\varphi(\vec{a})$.

Ha szükséges, egy halmazelméleti fogalomnak az M modellbeli megfelelőjét úgy jelöljük, hogy a fogalom után felső indexként M-et írunk, mint ahogyan azt már fentebb is tettük. Egy fogalom, egy állítás pontosan akkor abszolút, ha erre a megkülönböztetésre valójában nincs szükség, vagyis akár a modellben, akár a világban nézzük, ugyanaz a jelentésük. Láttuk, hogy tranzitív $\in$-modellre az „üres halmaz” valamint a „rendezetlen pár” is abszolút. A következő állításban egy sor ilyen fogalmat sorolunk fel, az olvasóra hagyva annak ellenőrzését, hogy ezek tényleg abszolútak.

3.3. Állítás *Legyen M egy tranzitív $\in$-modell ami zárt a $\{\}$-ra. Ekkor M-re abszolútak a következők:*

(i) *$x \in y$; x üres halmaz; x nem üres halmaz; x és y diszjunktak; $x = \cup y$; $x \subset y$;*
(ii) *x rendezett pár;*
(iii) *x függvény; x függvény és $x(y) = z$; x függvény,* $\mathrm{Dom}(x) = y$ *és* $\mathrm{Range}(x) = z$*;*
(iv) *x rendszám; x rákövetkező rendszám; x limesz rendszám;*
(v) *x a legkisebb limesz rendszám, azaz $x = \omega$.* ■

Tipikus nem abszolút állítások illetve fogalmak a következők:

(i) $y = \mathcal{P}(x)$, hiszen $\mathcal{P}^M(x)$ csak M-beli elemekből áll, míg x elemeinek lehet olyan részhalmaza, ami csak része, de nem eleme M-nek. Tranzitív $\in$-modell esetén $\mathcal{P}^M(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$.
(ii) *x megszámlálható*. Ugyanis x az M modellben pontosan akkor megszámlálható, ha van $f \in M$ kölcsönösen egyértelmű leképezés x és $\omega^M = \omega$ elemei között. Ha most van ilyen $f \in M$, akkor az előző állítás (iii) és (iv) pontjai alapján f a valóságban is kölcsönösen egyértelmű leképezés x és ω között, tehát x tényleg megszámlálható. Ha viszont x megszámlálható, akkor az ezt tanusító leképezés nem feltétlenül eleme M-nek (bár mindenképpen része annak).
(iii) ω_1. Ez ugyanis a legkisebb nem megszámlálható rendszám. Ezért ha $\alpha < \omega_1^M$, akkor van M-ben α és ω között kölcsönösen egyértelmű leképezés, tehát α a világban is megszámlálható. ω_1^M-hez M-ben ilyen leképezés nem létezik, de a világban nyugodtan létezhet. ω_1^M, mint M-beli rendszám a világban is rendszám, s így a legtöbb amit állíthatunk az, hogy $\omega_1^M \leq \omega_1$.
(iv) *κ számosság*. Ha $\kappa \in M$ a valóságban számosság, akkor M-ben is számosság, hiszen ha a világban nincs κ és κ egy eleme között kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor ez M-ben sem lehet (itt használjuk, hogy az ilyen leképezések abszolútak).

Viszont egy rendszám M-ben lehet számosság anélkül, hogy a világban számosság lenne.

(v) *x és y azonos számosságúak*; $|x| = \kappa$. Hasonló megfontolásokkal mint előbb. Még ha x-nek van is M-ben számossága, akkor is csak annyit állíthatunk, hogy $|x| \leq |x|^M$

A kumulatív hierarchia definíciója *Neumann János*tól származik. Ennek definiálásához nincs szükség sem a regularitási, sem a kiválasztási axiómára. Ha $\langle M, E\rangle$ a ZFC többi axiómájának egy tetszőleges modellje, akkor tekinthetjük az M-ben definiált kumulatív hierarchia, vagyis V^M elemeit, alkossák ezek az M-nek az N részét. Ha most csak az N-be tartozó elemeket tartjuk meg, vagyis nézzük az $\langle N, E \restriction N\rangle$ modellt, akkor ebben igazak maradnak a megfelelő ZFC axiómák, sőt itt még a regularitási axióma is teljesül. Ez utóbbi azért, mert ha N-ben definiáljuk a kumulatív hierarchiát, akkor az egész N-et visszakapjuk: $V^N = N$. Így N-ben igaz, hogy minden halmaz eleme a kumulatív hierarchiának – ez pedig a regularitási axióma egyik ekvivalense. Ha $\langle M, E\rangle$-ben teljesül a kiválasztási axióma is, akkor ugyanez igaz marad $\langle N, E \restriction N\rangle$-ben is.

A kumulatív hierarchia elemei, vagyis a V_α halmazok mind tranzitívak, és ha α limesz, akkor V_α zárt a $\{\}$-ra is. Limesz α-ra V_α-ban igaz a meghatározottság (A1), pár (A2), unió (A3), részhalmaz (A8), kiválasztási (C), és természetesen a regularitási (A7) axióma. Ha α reguláris számosság (ekkor persze rendszámként limesz rendszám), akkor V_α-ban a gyűjtés (A6$''$) axióma is teljesül. Két axióma maradt ki: a végtelenségi (A5) és a hatványhalmaz (A4). Ha $\alpha > \omega$ reguláris számosság, akkor természetesen V_α-ban van végtelen halmaz, és így benne a végtelenségi axióma is teljesül. Ahhoz, hogy egy κ számosságra V_κ-ban a hatványhalmaz axióma igaz legyen, az kell, hogy minden $\lambda < \kappa$ számosságra $2^\lambda < \kappa$ álljon, vagyis κ *erős limesz* legyen. Ha tehát $\kappa > \omega$ reguláris erős limesz számosság, akkor V_κ modellje ZFC-nek. A legkisebb végtelen számosság, ω is reguláris erős limesz, ezért V_ω-ban a végtelenségi axióma kivételével a ZFC összes többi axiómája teljesül. V_ω elemeit *öröklődően véges halmazoknak* szokás nevezni, ezek ugyanis azok a halmazok, melyek végesek és minden elemük öröklődően véges.

3. Konzisztencia bizonyítások

A forszolásos módszer úgy működik, hogy vesszük ZFC-nek egy M megszámlálható tranzitív $\in$-modelljét, majd ebből generálunk egy $N \supset M$ (ugyancsak megszámlálható, tranzitív $\in$) ZFC modellt. Az N-beli állítások igazságát a kisebb modellben, M-ben viszonylag egyszerű eszközökkel tudjuk kontrollálni, így biztosíthatjuk például, hogy N-ben ne legyen igaz a kontinuum hipotézis, vagy hogy N-ben legyen Szuszlin-egyenes.

Gödel második nem-teljességi tétele alapján (legalábbis ZFC-ben) nem tudjuk bizonyítani, hogy ZFC konzisztens. Az első teljességi tétel könnyű fele alapján ha ZFC-nek van modellje, akkor ZFC konzisztens is. Következésképp nem tudjuk garantálni, hogy létezzen egyáltalán ZFC modell.

Az előbb láttuk, hogy ha κ reguláris erős limesz, akkor V_κ modellje ZFC-nek. Ezért nem létezhet bizonyítás arra, hogy létezik reguláris erős limesz számosság.

Ha ZFC ellentmondásos, akkor nincs olyan állítás, ami ne következne belőle, ezért mindig feltehetjük, hogy ZFC nem ellentmondásos, tehát van modellje is. Nekünk viszont egy megszámlálható tranzitív $\in$-modellre van szükségünk. Ennek létezését azonban már nem tudjuk garantálni. Ha ugyanis ilyen M modell létezne, akkor természetesen ZFC ellentmondástalan (hiszen van modellje). Az a Con(ZFC)-vel jelölt állítás, miszerint „a ZFC formulahalmazból nem vezethető ellentmondás” valójában a természetes számokról szól: nem létezik olyan természetes szám, ami egy ZFC-ből való ellentmondás levezetésének volna kódja. Tranzitív $\in$-modellekre az ilyen jellegű állítások abszolútak (hiszen a 3.3. állítás szerint ω, azon a rákövetkezés művelete, az összeadás és szorzás is abszolút), ezért M-ben is igaz, hogy ZFC ellentmondástalan. M tehát nem csak ZFC-nek modellje, hanem a $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$-nek is. Ezért nem csak ZFC konzisztens, hanem $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ is. Márpedig ha ZFC konzisztens, akkor ZFC-ből nem bizonyítható saját konzisztenciája, s ezért legalábbis nem zárható ki, hogy $\mathrm{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$ már nem konzisztens.

Legyen $\Gamma_0 = \mathrm{ZFC}$, és $i \in \omega$-ra $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \mathrm{Con}(\Gamma_i)$. Az előbbiek szerint tranzitív $\in$ ZFC modell létezése esetén Γ_1 is konzisztens. Hasonlóan adódik hogy M minden $i \in \omega$-ra modellje Γ_i-nek, sőt $\Gamma_\omega = \bigcup\{\Gamma_i : i \in \omega\}$-nak is. A kívánt tranzitív $\in$-modell létezése sajnos még Γ_ω konzisztenciájából sem következik.

Egészen más a helyzet ZFC *véges* részeire, ezeknek ugyanis mindig van megszámlálható tranzitív $\in$-modellje. Ezt a tényt felhasználva tudjuk igazolni, hogy a forszolásos módszer esetében miért tehetjük mégis fel, hogy van ZFC-nek megszámlálható tranzitív $\in$-modellje.

A módszert követve legyen M egy ilyen megszámlálható tranzitív $\in$-modell, és mondjuk $N \supset M$ az a generált modell, ahol még egy φ állítás is igaz, amiből azt a következtetést vonjuk le, hogy $\mathrm{ZFC} + \varphi$ konzisztens. Ha most kiderül, hogy ez mégsem így van, azaz ZFC-nek következménye φ tagadása: $\mathrm{ZFC} \models \neg\varphi$, akkor $\neg\varphi$ következik ZFC-nek valamely véges Δ részéből is, azaz $\Delta \models \neg\varphi$. Annak bizonyítására, hogy az M-ből generált N-ben egy konkrét ϑ formula igaz, azon kívül hogy M megszámlálható tranzitív $\in$ modell, azt használjuk ki, hogy M-ben ZFC-nek bizonyos (ϑ-tól függő) formulái, de mindenesetre véges sok, igaz. Ahhoz, hogy N-ben Δ összes formulája valamint φ is igaz legyen tehát elég, ha M-ben ZFC-nek egy véges része igaz. A fentiek szerint viszont ennek a véges résznek van egy M megszámlálható tranzitív $\in$-modellje, s az ebből generált N-ben igaz Δ és φ is, noha $\Delta \models \neg\varphi$ alapján ez nem lehet.

A fejezet hátralevő részében a fentebb kimondott és felhasznált állítást bizonyítjuk. A bizonyítás technikájára később nem lesz szükségünk, ezért ez a rész a későbbiek megértésének veszélyeztetése nélkül átugorható.

Elsőként azt mutatjuk meg, hogy a tranzitív $\in$-modellek elég általánosak. Ha a $\langle N, E\rangle$ modellhez egyáltalán létezik vele izomorf tranzitív $\in$-modell, akkor az $\in$ reláció jólfundáltsága miatt az E relációnak is jólfundáltnak kell lenni. *Andrzej Mostowski* (1913–1975) alábbi tétele szerint ez a feltétel nem csak szükséges, hanem elégséges is.

3.4. Tétel (Mostowski suvasztási tétele) *Legyen* $\langle N, E\rangle$ *egy modell, ahol* E *egy jólfundált binér reláció, és* $N \models$ A1. *Ekkor létezik egy és csak egy* M *tranzitív halmaz úgy, hogy az* $\langle N, E\rangle$ *és* $\langle M, \in\rangle$ *struktúrák izomorfak.*

Bizonyítás Elsőként az egyértelműséget igazoljuk. Ha M_1 és M_2 megfelelő tranzitív halmazok, akkor az izomorfia tranzitivitása miatt $\langle M_1, \in\rangle$ és $\langle M_2, \in\rangle$ között is létezik egy f izomorfizmus. Mivel mind M_1 mind M_2 tranzitív, azért tetszőleges $x \in M_1$-re x képe megegyezik az x elemeinek képéből álló halmazzal:

$$f(x) = \{f(y) : y \in x\}. \tag{1}$$

Nézzük M_1 összes olyan elemét, amire f nem az identitás; azt kell megmutatnunk hogy ilyen elem nincs. Ha mégis volna, akkor a jól fundáltság miatt ezen elemek között van $\in$-minimális, vagyis olyan $x \in M_1$, hogy $f(x) \neq x$, de ha $y \in x$ (M_1 tranzitivitása miatt ekkor $y \in M_1$), akkor $f(y) = y$. De (1) szerint ekkor $f(x) = x$, ellentmondás, ami az unicitást adja.

Nevezzünk egy f leképezést *jónak*, ha $\mathrm{Dom}(f) \subset N$ zárt E-re (azaz $x \in \mathrm{Dom}(f)$ és $y\ E\ x$ esetén $y \in \mathrm{Dom}(f)$), $\mathrm{Range}(f)$ tranzitív és ezen kívül még f izomorfizmus $\langle \mathrm{Dom}(f), E\rangle$ és $\langle \mathrm{Range}(f), \in\rangle$ között. Persze f-et egy E-re zárt részre megszorítva továbbra is jó leképezést kapunk. Ebből és az előbb bizonyított egyértelműségből adódik, hogy jó leképezések uniója is leképezés. Ha most F egy ilyen unió, akkor persze $\mathrm{Range}(F)$ tranzitív, és mivel az unió elemei izomorfizmust adnak meg, azért $F(x) = \{F(y) : y\ E\ x\}$ valahányszor $x \in \mathrm{Dom}(F)$. Ahhoz, hogy F jó legyen, még csak azt kell megmutatnunk, hogy $x_1 \neq x_2$ esetén $F(x_1) \neq F(x_2)$. Tegyük fel, hogy ez nem így van. Legyen x_1 E-minimális olyan elem, amihez van tőle különböző x_2, amire $F(x_1) = F(x_2)$. Az N-ben igaz meghatározottsági axióma (A1) miatt az x_1-gyel E relációban levő elemek és az x_2-vel E relációban levő elemek különböző halmazt alkotnak, ezeknek F szerinti képe viszont a $F(x_1) = F(x_2)$ miatt megegyezik. Ez csak úgy lehetséges, ha vannak olyan *különböző* $y_1\ E\ x_1$ és $y_2\ E\ x_2$ elemek, hogy $F(y_1) = F(y_2)$, ami ellentmond x_1 minimalitásának.

Tehát jó leképezések uniója is jó leképezés, ezért a tétel „létezik” részének igazolásához elegendő megmutatnunk, hogy N minden eleme benne van valamelyik jó leképezés értelmezési tartományában. Képzeljük hogy nem így volna, és legyen $x \in N$ egy E-minimális ellenpélda, vagyis minden $y\ E\ x$ esetén létezik f_y jó leképezés, amire $y \in \mathrm{Dom}(f_y)$, de x-hez ilyen nincs. Legyen F az f_y leképezések uniója, ez a fentiek szerint szintén jó, továbbá $y\ E\ x$ esetén $y \in \mathrm{Dom}(F)$. Értelmezzük F-et még az x helyen a következőképpen:

$$F(x) = \{F(y) : y\ E\ x\}.$$

Ezzel $\mathrm{Range}(F)$ továbbra is tranzitív halmaz, és így F jó leképezés marad. Vagyis x mégis eleme egy jó leképezés értelmezési tartományának, amivel Mostowski suvasztási tételét igazoltuk. ∎

A tétel speciális esete egy jóval általánosabb elvnek. A transzfinit indukció és rekurzió mintájára tetszőleges E jólfundált reláció esetén is működik az E-szerinti indukció: ha minden x-re abból, hogy az összes $y\ E\ x$-re teljesül a $\Phi(y)$ formula, következik hogy $\Phi(x)$ is igaz, akkor minden halmaz az E értelmezési tartományában teljesíti Φ-t. Hasonlóan az E szerinti rekurzív definíció is működik: ha egy leképezést úgy adunk meg, hogy értékét az x helyen ugyanennek a leképezésnek a „korábbi” $y\ E\ x$ helyeken felvett értékeiből definiáljuk, akkor ilyen leképezés mindig létezik, és pontosan egy. A fenti tranzitív $\in$-modellt éppen az

$$F(x) = \{F(y) : y\ E\ x\}$$

E-rekurzív definícióval megadott (létező és egyértelmű) leképezés értékkészlete adja meg; ez pontosan akkor izomorfizmus, ha nem húz össze különböző elemeket, vagyis ha E-re a meghatározottsági axióma teljesül.

Végezetül bizonyítjuk, hogy a ZFC véges részeinek létezik tranzitív $\in$ modellje. A bizonyítás az *Azriel Lévy* és *Robert Montague* (1930-1971) nevéhez fűződő *tükrözési elv* néven emlegetett tételt használja. A bizonyítást egy lemmával kezdjük.

3.5. Lemma *Legyen $\varphi_1(x,\vec{p}_1)$, ..., $\varphi_n(x,\vec{p}_n)$ véges sok* ZFC *formula, X pedig tetszőleges halmaz. Található olyan $M \supset X$ halmaz, hogy minden k-ra és $\vec{a}$ M-beli halmazokra, ha egyáltalán létezik olyan b halmaz, amivel $\varphi_k(b,\vec{a})$ igaz, akkor ilyen b már M-ben is van.*

Bizonyítás Legyen $X_0 = X$, és ha $i \in \omega$-ra X_i már megvan, akkor legyen $X_{i+1} \supset X_i$ olyan, hogy ha $\vec{a} \in X_i$-hez létezik olyan b, amivel $\varphi_k(b,\vec{a})$ igaz, akkor van ilyen már X_{i+1}-ben is. Ilyen halmaz létezése a gyűjtési axióma (A6$''$) következménye: adott k-ra alkalmazzuk az axiómát az $X_i^{\ell_k}$ halmazra és a $\varphi_k(b,\vec{a})$ formulára, ahol ℓ_k a formulában az $\vec{a}$ mérete, és az axióma szerint létező halmazokat $k = 1, \ldots, n$ értékekre uniózzuk hozzá X_i-hez. Végezetül legyen $M = \bigcup\{X_i : i \in \omega\}$, ez nyilván megfelelő lesz. ■

Az állítás véges sok helyett végtelen sok formulával már nem feltétlenül igaz, és a bizonyítás sem működik. A probléma az, hogy a gyűjtési axiómát minden egyes formulára külön-külön kell alkalmaznunk, és végtelen sok formula esetén ez már nem megy.

3.6. Tétel (Tükrözési elv) *Tegyük fel, hogy a Φ formula igaz. Ekkor van olyan $\langle M, \in\rangle$ $\in$-modell, amire $M \models \Phi$.*

Mivel a Φ formula szempontjából az M modell ugyanúgy viselkedik, mint az egész világ, azt mondjuk, hogy M *visszatükrözi*, vagy egyszerűen csak *tükrözi* a Φ-t. Innen a tétel elnevezése.

Bizonyítás Vegyük a Φ (zárt) formula összes részformuláját. Ezek mindegyikében az összes lehetséges módon a szabad változók közül az egyiket válasszuk ki és jelöljük meg x-szel, az így adódó formulák legyenek $\varphi_1(x,\vec{p}_1)$, ..., $\varphi_n(x,\vec{p}_n)$. Alkalmazzuk az előző lemmát ezekre a formulákra, és legyen M a lemma szerint létező halmaz. Állítjuk, hogy M megfelelő lesz. A formulák felépítésére vonatkozó indukcióval bizonyítjuk, hogy ha egy $\psi(\vec{p})$ részformula összes szabad változójának értékét M-ből választjuk, akkor $\psi(\vec{a})$ akkor és csak akkor igaz, ha $M \models \psi(\vec{a})$. Ez már bizonyítja a tételt is, hiszen Φ szerepel a részformulák között, és nincs szabad változója.

Az állítás prímformulákra, vagyis $x \in y$ és $x = y$ alakú formulákra nyilvánvalóan teljesül. Hasonlóképpen ha indukciós feltevésként az ekvivalencia igaz φ-re és ψ-re, akkor igaz marad a $\neg\varphi$-re, $\varphi \vee \psi$-re, $\varphi \wedge \psi$-re, és a többi logikai összekötő jelre. Ha most egy részformula $\exists x\, \varphi(x, \vec{p})$ alakú, akkor egyrészt az indukciós feltevés szerint ha x és $\vec{p}$ értékét M-ből választjuk, mondjuk b-nek és $\vec{a}$-nak, akkor a $\varphi(b, \vec{a})$ pontosan akkor igaz a világban, ha M-ben. Ezért ha $M \models \exists x\, \varphi(x, \vec{a})$, akkor valamilyen $b \in M$ értékre $M \models \varphi(b, \vec{a})$, vagyis a világban is igaz a $\varphi(b, \vec{a})$ formula, és így a világban is teljesül hogy $\exists x\, \varphi(x, \vec{a})$. Fordítva, ha létezik egyáltalán olyan b, amivel $\varphi(b, \vec{a})$ teljesül, akkor $\varphi(x, \vec{p})$ szerepelt azok között a formulák között, amire az előző lemmát alkalmaztuk, tehát ilyen b már az M-ben is található. Megint az indukciós feltevés szerint ez esetben $M \models \varphi(b, \vec{a})$ is igaz, vagyis $M \models \exists x\, \varphi(x, \overline{a})$. Ezzel az ekvivalenciát erre az esetre is megmutattuk, az univerzális kvantorral az $\forall x\, \varphi(x, \vec{p}) \leftrightarrow \neg\exists x\, \neg\varphi(x, \vec{p})$ ekvivalencia alapján nem kell külön foglalkoznunk, arra az ekvivalencia már következik a korábbiakból. ■

3.7. Tétel ZFC *minden véges részének van megszámlálható tranzitív* $\in$*-modellje.*

Bizonyítás A véges sok axiómához adjuk hozzá a meghatározottsági (A1) axiómát, ha nem szerepelt volna, azután mindegyiket írjuk fel mint zárt formulát, és kapcsoljuk őket össze $\wedge$ jellel. Az így adódó egyetlen Φ formula persze ekvivalens a véges sok axióma uniójával, ezért elegendő találnunk Φ-nek egy megfelelő modellt. Mivel a világban igaz a ZFC, azért speciálisan igaz a Φ is, következésképp a tükrözési tétel miatt van olyan $\langle N, \in\rangle$ modell, amiben Φ igaz. A leszálló Löwenheim-Skolem tétel szerint ennek van megszámlálható elemi része, vagyis olyan megszámlálható $N' \subset N$, amire $\langle N', \in\rangle$ elemi része $\langle N, \in\rangle$-nek. Ez többek között azt jelenti, hogy minden N-ben igaz formula igaz N'-ben is, tehát speciálisan $N' \models \Phi$ is teljesül. Tudjuk, hogy az N' elemein az $\in$ reláció jólfundált (mert az eleme reláció egyébként is az), továbbá N'-ben igaz a meghatározottsági axióma (mert Φ-nek egyik összetevője). A suvasztási tétel miatt ekkor van olyan M tranzitív halmaz, hogy $\langle N', \in\rangle$ és $\langle M, \in\rangle$ izomorfak. Az izomorfizmusból egyrészt következik, hogy M is megszámlálható, másrészt M-ben és N'-ben ugyanazok a zárt formulák igazak, következésképp $M \models \Phi$. Tehát M modellje a véges sok axiómának, ahogyan állítottuk. ■

Feladatok

1. A valós számokon értelmezett, valós értéket felvevő függvényeken az összeadás a szokásos, két ilyen függvény szorzata pedig legyen a kompozíciójuk. Mutassuk meg, hogy ez a szorzás az egyik oldalról disztributív, míg a másikról nem az.
2. Mutassuk meg, hogy a V-vel jelölt kumulatív hierarchia valóban osztály, vagyis adjunk meg olyan formulát, ami V elemeit definiálja (a regularitási axióma felhasználása nélkül). Igazoljuk, hogy az a leképezés, ami egy halmazhoz a rangját rendeli, operáció.
3. Igazoljuk, hogy a regularitási axióma ekvivalens azzal, hogy minden halmaz eleme a kumulatív hierarchiának, vagyis V-beli.

4. Definiáljuk az $\langle M, E\rangle$ modellt úgy, hogy az M alaphalmaz a természetes számok halmaza, továbbá az i természetes szám „eleme” a j természetes számnak (vagyis fennáll közöttük az $i \; E \; j$ reláció), ha j kettes számrendszerbeli alakjában 2^i együtthatója 1. Melyik természetes szám felel meg az $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ halmaznak? Igazoljuk, hogy $\langle M, E\rangle$-ben a végtelenségi axióma kivételével ZFC összes többi axiómája teljesül.
5. Legyen N részhalmaza az $\langle M, E\rangle$ modell alaphalmazának. N-ről azt mondjuk, hogy *tranzitív*, ha zárt az E relációra. Tegyük fel, hogy $\langle M, E\rangle$-ben a regularitási és kiválasztási axióma kivételével ZFC többi axiómája teljesül, és N tranzitív része M-nek. Legyen $\alpha \in N$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy $N \models$ „α rendszám” akkor és csak akkor, ha $M \models$ „α rendszám.”
6. Igazoljuk a tükrözési tételnek a következő általánosítását: minden Φ zárt igaz formulához található olyan α rendszám, hogy $V_\alpha \models \Phi$.
7. Egy M osztály *majdnem univerzális*, ha tetszőleges x halmazra, ha $x \subset M$, akkor található M-ben x-et majoráló elem, vagyis olyan $y \in M$ amire $x \subset y$. Tegyük fel, hogy az M osztály tranzitív, zárt a $\{\}$-ra és majdnem univerzális. Mutassuk meg, hogy M-ben igaz az A1, A2, A3′, A4′, A5, A6″ és A7 axióma.
8. Tegyük fel, hogy a ZFC-nek van tranzitív $\in$-modellje. Adjunk meg a ZFC-nek olyan $\langle M, E\rangle$ modelljét, hogy az ω^M halmazon az E reláció nem jólfundált.
9. Bővítsük ki a ZFC nyelvét egy új M konstansjellel, és legyen Γ az a (végtelen) formulahalmaz, mely azt írja le, hogy M megszámlálható tranzitív halmaz, és $\langle M, \in\rangle$-ben a ZFC axiómái teljesülnek. Mutassuk meg, hogy ZFC-nek akkor és csak akkor van modellje, ha ZFC $\cup\, \Gamma$-nak.