2. fejezet

Parciális rendezések

Egy P halmazon egy $\leq$-vel jelölt kétváltozós reláció *parciális rendezés* vagy *részben rendezés*, ha a reláció reflexív, vagyis $p \leq p$ minden $p \in P$-re; tranzitív: ha $p \leq q$ és $q \leq r$ akkor $p \leq r$; végül antiszimmetrikus: $p \leq q$ és $q \leq p$ egyszerre csak úgy állhat, ha $p = q$. Ha még bármely két elem összehasonlítható, akkor *teljes rendezésről*, vagy egyszerűen csak *rendezésről* beszélünk. Ha külön hangsúlyozni akarjuk, hogy mi a rendezés, akkor a $\langle P, \leq \rangle$ jelölést használjuk, egyébként P jelenti az alaphalmazt és rajta a rendezést is. Feltesszük, hogy P-ben mindig van legnagyobb elem, ezt 1_P jelöli; ha félreértésre nem ad okot, a P indexet lehagyjuk. Ha $p \leq q$, akkor azt mondjuk, hogy p *kiterjesztése* q-nak. Ennek a furcsa elnevezésnek az okára később visszatérünk.

A P két eleméről, p és $q \in P$-ről azt mondjuk, hogy *kompatibilis*, jelben $p \parallel q$, ha van közös kiterjesztésük, vagyis ha van olyan $r \in P$, hogy $r \leq p$ és $r \leq q$ egyaránt teljesül. Ha p és q nem kompatibilis, akkor azt $p \nparallel q$ jelöli, és azt mondjuk, hogy p és q *inkompatibilisek*. P-nek páronként inkompatibilis elemekből álló részhalmazát *antiláncnak* nevezzük. Egy *lánc* páronként összehasonlítható (és nem csak kompatibilis) elemekből álló részhalmaz, másképpen egy lánc P-nek teljesen rendezett része. A $p \in P$ elem *atom*, ha p-nek nincs valódi kiterjesztése, és P *atommentes*, ha benne egyáltalán nincs atom.

Részben rendezés egy halmaz részhalmazai között a „bővebb” reláció: p kiterjesztése q-nak ha $p \supset q$. Maximális elem az üres halmaz, továbbá bármely p és q kompatibilis, hiszen $p \cup q$ közös kiterjesztésük. Ennek egy speciális esete a következő. Legyenek A és B adott halmazok. f egy *parciális függvény* A-ból B-be, ha $\mathrm{Dom}(f) \subset A$ és $\mathrm{Range}(f) \subset B$. A P elemei ezek a parciális függvények, és p *kiterjeszti* q-t, vagyis $p \leq q$, ha p mint függvény kiterjeszti q-t, azaz $p \supset q$. A *kiterjesztés* elnevezés is innen adódik. Más szavakkal $p \leq q$, ha $\mathrm{Dom}(p) \supset \mathrm{Dom}(q)$, és $p \restriction \mathrm{Dom}(q) = q$. Két függvény, mint a részben rendezett halmaz két eleme pontosan akkor kompatibilis, ha mint függvények kompatibilisek, vagyis ha értelmezési tartományaik metszetén ugyanazokat az értékeket veszik fel. Még másképpen: ha $p \cup q$ is függvény. Ez a parciális rendezés nem atommentes, hiszen egy teljes függvénynek nincsen valódi kiterjesztése. Ha azonban A végtelen és megszorítjuk P-t a véges parciális függvényekre, akkor az így kapott parciális rendezés atommentes lesz.

A P *elágazó*, ha elemei a kompatibilitás szempontjából különbözőképpen viselkednek, vagyis ha p, $q \in P$ különbözők, akkor található hozzájuk olyan elem, ami az egyikkel kompatibilis, a másikkal nem. A következő állítás magyarázza ezt az elnevezést.

2.1. Állítás *Ha P atommentes és elágazó, akkor minden elemének vannak inkompatibilis kiterjesztései.*

Bizonyítás Legyen $p \in P$, mivel P atommentes, ezért van p-nek valódi kiterjesztése; jelöljük az egyiket q-val. Most p és q különböznek, tehát az elágazási tulajdonság miatt találunk olyan $r \in P$-t, ami az egyikkel kompatibilis, a másikkal nem. Mivel $q \leq p$, ezért ami q-val kompatibilis, az kompatibilis p-vel is, tehát csak az lehet, hogy r kompatibilis p-vel, ám inkompatibilis q-val. Ekkor r-nek van egy r' kiterjesztése p alatt (mert kompatibilisek), ugyanakkor r kiterjesztései inkompatibilisek q-val. p-nek a keresett két inkompatibilis kiterjesztése tehát q és r'. ■

Az általunk használt valamennyi parciálisan rendezett halmaz atommentes és elágazó lesz, bár ennek ellenőrzését minden esetben az olvasóra hagyjuk. Így például ha P azokból a parciális függvényekből áll, melyekre $\mathrm{Dom}(f) \subset A$, $\mathrm{Range}(f) \subset B$, továbbá B legalább két elemű, elágazó. Valóban, ha f és g két különböző ilyen parciális függvény, akkor vagy már maguktól inkompatibilisek, vagy pedig van olyan $a \in A$ hely, ahol az egyik, mondjuk f, értelmezve van, a másik, vagyis g pedig nincsen. Terjesszük ki g-t egy g'-vé úgy, hogy az a helyen más értéket vegyen fel, mint f. Ekkor f és g' inkompatibilisek, míg g és g' kompatibilis.

1. Sűrű, nyílt és reguláris halmazok

A $D \subset P$ részhalmaz *sűrű P-ben*, ha P minden eleme alatt van D-beli, vagyis ha minden $q \in P$-hez van $r \leq q$, hogy $r \in D$. A *D sűrű $p \in P$ alatt*, ha minden $q \leq p$-hez létezik $r \leq q$, amire $r \in D$. Persze ha D sűrű p alatt, akkor sűrű p-nek minden kiterjesztése alatt is. Minden $p \in P$-re jelöljük O_p-vel a p kiterjesztéseinek halmazát: $O_p = \{q \in P : q \leq p\}$. Az $A \subset P$ halmazról azt mondjuk, hogy *nyílt*, ha bármely elemével együtt annak összes kiterjesztését is tartalmazza. Más szavakkal A akkor nyílt, ha minden $p \in A$-ra $O_p \subset A$. Ezzel a jelöléssel p és q pontosan akkor kompatibilisek, ha $O_p \cap O_q \neq \emptyset$.

A legszűkebb A-t tartalmazó nyílt halmaz mindig létezik, és az A elemeinek az összes lehetséges kiterjesztéseiből áll. Ezt a halmazt $\mathrm{O}(A)$-val jelöljük:

$$\mathrm{O}(A) = \{q \in P : q \leq p \text{ valamilyen } p \in A\text{-ra}\}.$$

Természetesen $\mathrm{O}(\{p\}) = O_p$, ilyenkor a jelölések egyszerűsítése végett a p körüli kapcsos zárójeleket lehagyjuk, és csak $\mathrm{O}(p)$-t írunk. Egy halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha ő a legszűkebb saját magát tartalmazó nyílt, és ezért például $\mathrm{O}(\mathrm{O}(A)) = \mathrm{O}(A)$.

Tetszőleges $A \subset P$-re jelölje $\mathrm{R}(A)$ mindazoknak a P-beli elemeknek a halmazát, melyek alatt A sűrű. Az A *reguláris*, ha P-nek pontosan azokból az elemeiből áll, amik alatt ő sűrű, azaz ha $A = \mathrm{R}(A)$.

Sűrű halmazok egy sokat és jól használható tulajdonságát adja meg az alábbi

2.2. Állítás *Legyen D sűrű p alatt. Ekkor $D' = D \cup \{q \in P : p \text{ és } q \text{ inkompatibilisek}\}$ sűrű P-ben.*

Bizonyítás Legyen $q \in P$ tetszőleges. Olyan $r \leq q$-t keresnünk, amire $r \in D'$. Ha most p és q inkompatibilisek, akkor r-nek választhatjuk magát q-t. Ha viszont p és q kompatibilis, akkor legyen r' közös kiterjesztésük. Mivel D sűrű p alatt és $r' \leq p$, azért van $r'' \leq r'$ ami D-beli. De $r' \leq q$ is áll, ezért most is találtunk q alatt D-beli elemet, és így D'-beli elemet is, ahogyan kívántuk. ∎

Nyílt és reguláris halmazok néhány egyszerű tulajdonságát foglaljuk össze az alábbi állításban.

2.3. Állítás (i) *Nyílt halmazok metszete és uniója is nyílt;*
(ii) *minden reguláris halmaz nyílt;*
(iii) $A \subset \mathrm{O}(A)$*, továbbá ha* A *nyílt, akkor* $A \subset \mathrm{R}(A)$*;*
(iv) *ha* $A \subset B$*, akkor* $\mathrm{O}(A) \subset \mathrm{O}(B)$ *valamint* $\mathrm{R}(A) \subset \mathrm{R}(B)$*;*
(v) $\mathrm{R}(A)$ *nyílt, továbbá* $\mathrm{R}(\mathrm{R}(A)) = \mathrm{R}(A)$*, vagyis* $\mathrm{R}(A)$ *reguláris.*

Bizonyítás (i) – (iv) azonnal adódik a nyílt illetve reguláris halmaz definíciójából, ezek ellenőrzését az olvasóra hagyjuk, és csak (v)-t bizonyítjuk. Legyen először $p_1 \in \mathrm{R}(A)$, vagyis A sűrű p_1 alatt. Ekkor A sűrű p_1 minden kiterjesztése alatt is, vagyis ha $p_2 \leq p_1$, akkor $p_2 \in \mathrm{R}(A)$. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $\mathrm{R}(A)$ nyílt, ami az állítás első fele. Innen (iii) szerint következik, hogy $\mathrm{R}(A) \subset \mathrm{R}(\mathrm{R}(A))$, így elegendő megmutatnunk, hogy $\mathrm{R}(\mathrm{R}(A)) \subset \mathrm{R}(A)$. Tegyük fel tehát, hogy $p \in \mathrm{R}(\mathrm{R}(A))$, vagyis hogy $\mathrm{R}(A)$ sűrű p alatt, megmutatjuk hogy ekkor $p \in \mathrm{R}(A)$, vagyis hogy A is sűrű p alatt. Legyen ehhez $q \leq p$ tetszőleges, keresnünk kell q alatt egy A-beli elemet. Mivel $\mathrm{R}(A)$ sűrű p alatt, van $r \in \mathrm{R}(A)$, amire $r \leq q$. Most $r \in \mathrm{R}(A)$ miatt A sűrű r alatt, így speciálisan van $r' \leq r \leq q$ is amire $r' \in A$. A keresett elemet tehát megtaláltuk, amivel (v) második felét is igazoltuk. ∎

2.4. Állítás *Reguláris halmazok metszete is reguláris.*

Bizonyítás Legyen $i \in I$ esetén A_i reguláris halmaz, és legyen $A = \bigcap\{A_i : i \in I\}$. Az előző lemma (ii) pontja szerint mindegyik A_i nyílt, ezért (i) szerint metszetük, vagyis A is nyílt lesz, és így (iii) miatt $A \subset \mathrm{R}(A)$. Másrészt $A \subset A_i$, tehát (iv) szerint $\mathrm{R}(A) \subset \mathrm{R}(A_i) = A_i$, vagyis $\mathrm{R}(A) \subset \bigcap\{A_i : i \in I\} = A$. Ezeket egybevetve $A = \mathrm{R}(A)$, ahogyan kívántuk. ∎

Az unióra a lemma állítása nem igaz, általában még két reguláris halmaz uniója sem reguláris. Viszont létezik legszűkebb mindkettőt tartalmazó reguláris halmaz, nevezetesen az uniójukat tartalmazó összes reguláris halmaz metszete ilyen.

A P egy A részhalmazának *reguláris lezártja*, amit $\mathrm{RO}(A)$-val jelölünk, a legszűkebb A-t tartalmazó reguláris halmaz. $\mathrm{RO}(A)$ az előző lemma szerint létezik és nem más, mint az A-tartalmazó összes reguláris halmaz metszete. Egy elemű halmaz esetén $\mathrm{RO}(\{p\})$ helyett $\mathrm{RO}(p)$-t írunk.

2.5. Állítás (i) $A \subset \mathrm{RO}(A)$*, továbbá ha* $A \subset B$*, akkor* $\mathrm{RO}(A) \subset \mathrm{RO}(B)$*;*
(ii) $\mathrm{RO}(\mathrm{RO}(A)) = \mathrm{RO}(A)$*;*
(iii) *tetszőleges* $A \subset P$ *halmazra* $\mathrm{RO}(A) = \mathrm{R}(\mathrm{O}(A))$*.*

Bizonyítás (i) RO(A) az A-t tartalmazó halmazok metszete, így A-t tartalmazza. Másrészt RO(B) kevesebb reguláris halmaz metszeteként áll elő mint RO(A), ezért RO$(A) \subset$ RO(B).
(ii) Mivel RO(A) a legszűkebb A-t tartalmazó reguláris halmaz, azért minden A-t tartalmazó reguláris egyúttal RO(A)-t is tartalmazza. Tehát RO(RO$(A)) \subset$ RO(A). A fordított irányú tartalmazás (i)-ből adódik.
(iii) R(O(A)) egy A-t részként tartalmazó reguláris halmaz, így elegendő megmutatnunk, hogy minden más, A-t tartalmazó regulárisnak része. Legyen ehhez B egy tetszőleges A-t tartalmazó reguláris halmaz. Minden reguláris egyúttal nyílt is, tehát O$(A) \subset B$. A 2.2. lemma (iv) pontja szerint ekkor R(O$(A)) \subset$ R$(B) = B$, ahogyan kívántuk. ■

A reguláris lezárás egy másik jellemzését adja meg az alábbi állítás.

2.6. Állítás *Legyen $A \subset P$ tetszőleges. $p \in$ RO(A) akkor és csak akkor, ha p minden kiterjesztése kompatibilis A valamelyik elemével.*

Bizonyítás Az előző lemma szerint $p \in$ RO$(A) =$ R(O(A)) pontosan akkor, ha O(A) sűrű p alatt, vagyis ha p minden kiterjesztése alatt megtalálható A egy elemének kiterjesztése. Más szavakkal, p minden kiterjesztése kompatibilis valamelyik $q \in A$-val, ami éppen a lemma állítása. ■

Ennek az alábbi egyszerű következményeit sokat fogjuk használni:

2.7. Következmény *Ha D sűrű p alatt, akkor $p \in$ RO(D); illetve ha D sűrű P-ben, akkor* RO$(D) = P$.

Bizonyítás Ha D sűrű p alatt, akkor p minden kiterjesztése alatt van D-beli, ezért kompatibilis is valamilyen D-belivel. ■

2.8. Állítás *Legyenek A és B diszjunkt nyílt halmazok. Ekkor* RO(A) *és* RO(B) *is diszjunkt.*

Bizonyítás Az A és B nyílt halmazok, tehát RO(A) illetve RO(B) azokból az elemekből áll, amik alatt A illetve B sűrű. Azt kell megmutatnunk, hogy nincs olyan $p \in P$, ami alatt mind A, mint B sűrű volna. Tegyük fel, hogy p mégis egy ilyen elem. A sűrűsége alapján vegyünk ki p alatt egy $q \in A$ elemet, azután B sűrűsége alapján vegyünk ki $q \leq p$ alatt egy $r \in B$ elemet. Mivel $r \leq q$ és A nyílt, azért r beleesik A-ba is, ellentmondásban azzal, hogy A és B diszjunkt. ■

Itt szükséges feltétel, hogy A és B nyílt legyen. Például ha P-ben veszünk két diszjunkt sűrű részt, mindkettőnek reguláris lezártja az egész P.

2.9. Állítás *Legyen A nyílt, és B az A-nak egy maximális, páronként inkompatibilis elemekből álló része. Ekkor* RO$(A) =$ RO(B).

Bizonyítás Mivel A nyílt, azért $p \in$ RO(A) pontosan akkor, ha p alatt A sűrű. Megmutatjuk, ha p ilyen, akkor minden kiterjesztése kompatibilis B valamelyik elemével. Ekkor a 2.6. állítás alapján $p \in$ RO(B). Ez már adja a lemma állítását, hiszen a másik oldalról $A \supset B$ miatt $\mathrm{RO}(A) \supset \mathrm{RO}(B)$. Vegyünk tehát egy $q \leq p$ elemet, megmutatjuk, hogy q kompatibilis B valamelyik elemével. Mivel A sűrű p alatt, van q alatt A-beli a elem. Ez az a kompatibilis valamelyik $b \in B$-vel (mert B maximális), vagyis van közös r kiterjesztésük. Erre egyrészt $r \leq a \leq q$, másrészt $r \leq b$, tehát q és b is kompatibilisek, ahogyan kívántuk. ■

2.10. Állítás *A P akkor és csak akkor elágazó, ha P-nek bármely két különböző p és q elemére, vagy $p \notin \mathrm{RO}(q)$, vagy $q \notin \mathrm{RO}(p)$.*

Bizonyítás Tegyük fel tehát először, hogy P elágazó, vagyis bármely két eleme a kompatibilitás szempontjából másképp viselkedik. Legyen tehát r olyan, hogy (mondjuk) p-vel kompatibilis, q-val pedig nem, és legyen r' közös kiterjesztése p-nek és r-nek. Most r' még mindig inkompatibilis q-val, vagyis nincs alatta q-nak egyetlen kiterjesztése sem. Ez pedig azt jelenti, hogy $r' \leq p$ alatt nincs $\mathrm{O}(q)$-beli, és ezért p alatt $\mathrm{O}(q)$ nem sűrű, ami azt jelenti, hogy $p \notin \mathrm{R}(\mathrm{O}(q))$.

Fordítva tegyük fel, hogy $p \notin \mathrm{RO}(q)$. Ekkor p-nek van olyan r kiterjesztése, ami alatt nincs $\mathrm{O}(q)$-beli pont. Ez az r persze ekkor kompatibilis p-vel, de nem kompatibilis q-val, ahogyan kívántuk. ■

Parciális rendezésekben az eddig bevezetett fogalmak és állítások jó részének topológiai jelentése (is) van. Bár erre később nem lesz szükségünk, ismeretük megkönnyítheti a megértést. Minden részben rendezett halmazon lehet definiálni az úgynevezett *rendezés topológiát*. Ennek bázis nyílt halmazai az $O_p = \{q \in P : q \leq p\}$ alakú halmazok. Természetesen ellenőrizni kell, hogy ezek tényleg alkothatják egy topológia bázisát, amihez (azon kívül, hogy minden pont beleesik valamelyik bázishalmazba) az kell, hogy két bázis nyílt halmaz metszetéből tetszőleges r pontot kivéve létezzen olyan bázis nyílt halmaznak, ami r-et tartalmazza, és része mindkét eredeti halmaznak. Esetünkben, ha $r \in O_p \cap O_q$, akkor O_r megfelelő. Ebben a topológiában a p pont környezetbázisát az egyetlen halmazból álló $\{O_p\}$ rendszer alkotja, hiszen tetszőleges p-t tartalmazó nyílt halmaz részként tartalmazza O_p-t is.

Az $A \subset P$ topológiai értelemben *nyílt*, ha minden pontjával együtt annak egy környezetét is tartalmazza, vagyis $p \in A$ esetén $O_p \subset A$. Ez egybeesik azzal, ahogyan fentebb P-nek nyílt részeit definiáltuk. A topológiában egy D halmaz *sűrű*, ha minden (bázis) nyílt halmazt elmetsz, azaz tetszőleges $p \in P$-re $O_p \cap D \neq \emptyset$, vagyis minden p-nek van D-beli kiterjesztése, egyetértésben a sűrű halmaz korábbi definíciójával. Egy $A \subset P$ halmaz $\overline{A}$ *lezártja* azokból a $q \in P$ elemekből áll, melyek minden környezete elmetszi A-t, vagyis

$$\overline{A} = \{q \in P : O_q \cap A \neq \emptyset\} = \{q \in P : \text{ van } r \leq q \text{ hogy } r \in A \};$$

az A *belseje* pedig azokból a pontokból áll, melyeknek van olyan környezete, ami teljes egészében A-ban van:

$$\operatorname{int} A = \{q \in P : O_q \subset A\} = \{q \in P : \text{ minden } r \leq q\text{-ra } r \in A \}.$$

Könnyű látni, hogy A-nak $\overline{A}$ lezártja zárt (azaz $\overline{A}$ komplementere nyílt), valamint hogy $\operatorname{int} A$ nyílt. Tetszőleges $A \subset P$-ra $\operatorname{int} \overline{A}$ vagyis az A lezártjának belseje esetünkben a következő:

$$\operatorname{int} \overline{A} = \{p \in P : (\forall q \leq p)(\exists r \leq q)(r \in A)\},$$

vagyis éppen azon p pontok halmaza, amelyek alatt A sűrű, tehát ez a halmaz éppen $\mathrm{R}(A)$. Egy $A \subset P$ *reguláris nyílt*, ha megegyezik saját lezártjának belsejével: $A = \operatorname{int} \overline{A}$ – ez pedig a P-beli reguláris halmazok definíciójának felel meg. A részben rendezett halmazok reguláris részeiről bizonyított állítások tetszőleges topológikus tér reguláris nyílt halmazaira is igazak, mint például tetszőleges A-ra A lezártjának belseje mindig reguláris nyílt.

2. Filterek

A $G \subset P$ részhalmaz *filter* vagy *szűrő*, ha (i) felszálló, azaz $p \in G$ és $p \leq q$ esetén $q \in G$, valamint (ii) G bármely két eleme G-ben kompatibilis, azaz $p \in G$ és $q \in G$-hez mindig lehet találni $r \in G$-et, amire $r \leq p$ és $r \leq q$. Világos, hogy egy filter és egy antilánc metszete legfeljebb egy elemű lehet. Legyen M egy tetszőleges halmaz. G-ről azt mondjuk, hogy *M-filter*, ha P-nek minden olyan D sűrű részére, melyre $D \in M$, a $G \cap D$ metszet nem üres. Filterek létezéséről szóló alapvető tétel *Helena Rasiowa* (1917–1994) és *Roman Sikorski* (1920–1983) nevét viseli.

2.11. Tétel (Rasiowa–Sikorski) *Legyenek $i \in \omega$-ra D_i sűrű részei P-nek, és válasszuk ki $p \in P$-t tetszőlegesen. Ekkor van olyan $G \subset P$ filter, ami tartalmazza p-t és elmetszi az összes D_i sűrű halmazt.*

Bizonyítás Legyen $p_0 \leq p$ és $p_0 \in D_0$. Mivel D_0 sűrű, ilyen p_0 biztosan létezik. Legyen továbbá $i \in \omega$-ra $p_{i+1} \leq p_i$ olyan, hogy $p_{i+1} \in D_{i+1}$; ilyen elem D_{i+1} sűrűsége miatt létezik. Legyen végül

$$G = \{q \in P : \text{ valamely } i \in \omega\text{-ra } p_i \leq q\}. \tag{1}$$

Könnyű látni, hogy G filter, és rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. ∎

A Rasiowa–Sikorski tétel bizonyítását használva egy kicsit erősebb állítást is tudunk igazolni, nevezetesen a következőt. Legyen A egy reguláris része P-nek, és $p \in P$ olyan, ami nincs A-ban. Ekkor létezik olyan G filter is, amely azon kívül hogy a megszámlálhatóan sok sűrű D_i halmaz mindegyikét elmetszi, tartalmazza p-t, még A-t is elkerüli. Ugyanis $p \notin A$ miatt p alatt a reguláris A nem sűrű, vagyis van p-nek olyan p' kiterjesztése, ami alatt A-nak már egyáltalán nincs pontja. Legyen $p_0 \leq p'$ és $p_0 \in D_0$, majd a p_i elemeket válasszuk úgy mint a tétel bizonyításában. Az (1) alatt definiált G megfelelő lesz. Ugyanis p, $p' \geq p_0$ miatt p és p' is G-ben van. Másrészt p' egyetlen A-beli elemmel sem kompatibilis, míg tetszőleges két G-beli elem kompatibilis. Ezért G elkerüli A-t.

Megszámlálhatóan sok sűrű halmazt ezek szerint mindig el lehet metszeni egyetlen filterrel, az alábbi állítás szerint az összes sűrű halmazzal ezt már nem mindig tudjuk megtenni.

2.12. Állítás *Tegyük fel, hogy P atommentes és elágazó. Ekkor nincs olyan G filter, amely az összes $D \subset P$ sűrű halmazt elmetszené.*

Bizonyítás Legyen G egy tetszőleges filter, ehhez elkészítünk egy D sűrű halmazt a következőképpen: minden $p \in P$-hez választunk q és r inkompatibilis elemeket p alatt. Mivel G elemei kompatibilisek, q és r közül legfeljebb az egyik lehet G-ben. Tegyük a másik elemet D-be. Világos, hogy az így elkészített D sűrű lesz, és hogy $D \cap G = \emptyset$, ahogyan kívántuk. ∎

3. Antilánc feltétel és teljesség

Legyen κ egy számosság. P-ről azt mondjuk, hogy teljesíti a *κ-antilánc feltételt*, ha P-ben nincs κ számosságú antilánc. Más szavakkal, akárhogyan is választjuk ki P-nek κ darab elemét, lesz közöttük (legalább) két kompatibilis. P-ről azt mondjuk, hogy *MAF-os* (a megszámlálható antilánc feltétel rövidítéseként), ha teljesíti az ω_1 antilánc feltételt. Az angol terminológiában ugyanerre a *ccc* jelölést használják a megszámlálható láncfeltétel (countable chain condition) kezdőbetűiből, ami természetesen hibás, ámde széles körben elterjedt elnevezés.

A κ-antilánc feltétel igazolására igen jól használhatók az úgynevezett Δ-rendszerek, melyeket *Erdős Pál* (1913–1996) és *Richard Rado* (1906–1989) vizsgáltak először módszeresen. Az $\mathcal{F}$ halmazrendszert *Δ-rendszernek* nevezzük, ha létezik olyan D halmaz – a Δ-rendszer *magja* –, hogy $\mathcal{F}$ bármely két különböző F_1 és F_2 elemére $F_1 \cap F_2 = D$. Az $F_i - D$ különbségeket sziromnak, fülnek, vagy kevésbé költőien *futó rész*nek szokták hívni. Mi ez utóbbi elnevezést fogjuk használni.

2.13. Tétel *Legyen $\kappa > \omega$ reguláris számosság, és álljon a κ számosságú $\mathcal{F}$ halmazrendszer csupa véges halmazból. Ekkor kiválasztható $\mathcal{F}$-ből egy κ számosságú Δ-rendszer.*

Bizonyítás Osszuk $\mathcal{F}$ elemeit szét a szerint, hogy hány eleműek. Ezzel megszámlálhatóan sok részt kapunk, tehát valamelyik rész még mindig κ számosságú lesz. Ezért feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$-ben minden halmaz ugyanannyi elemű, legyen ez $k \in \omega$. A k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$-re $\mathcal{F}$-ben κ darab egy elemű halmaz van, ezek egy üres magú Δ-rendszert alkotnak.

Tegyük fel tehát, hogy az állítást k-ra már tudjuk, és álljon $\mathcal{F}$ csupa $k+1$ elemű halmazból. Ha most van olyan x, hogy $\mathcal{F}$-nek legalább κ eleme tartalmazza x-et, akkor készen vagyunk: csak ezeket a $k+1$-eseket véve hagyjuk el mindegyikből x-et. Ezzel kaptunk κ darab k elemű halmazt, amiből az indukciós feltétel szerint kiválaszthatunk egy κ-s Δ-rendszert. A kiválasztott halmazokhoz x-et visszarakva szintén Δ-rendszert kapunk.

Feltehetjük tehát, hogy minden x-et $\mathcal{F}$-nek κ-nál kevesebb eleme tartalmaz. Ekkor transzfinit rekurzióval definiáljuk $\alpha < \kappa$-ra $\mathcal{F}$-nek páronként diszjunkt elemeit. Tegyük fel tehát, hogy $\xi < \alpha$-ra $F_\xi \in \mathcal{F}$ már definiálva van, és legyen $X = \bigcup\{F_\xi : \xi < \alpha\}$. Ez a halmaz κ-nál kisebb számosságú, minden elemét $\mathcal{F}$-ből κ-nál kevesebb halmaz tartalmazza, ezért van $\mathcal{F}$-ben (még mindig κ darab) olyan, ami X-től diszjunkt. Legyen F_α ezek egyike. Ezzel sikerült $\mathcal{F}$-ből kivennünk κ darab páronként diszjunkt elemet, ami persze szintén egy Δ-rendszer. ■

Nem véges halmazokból álló halmazrendszerek esetén is tudjuk garantálni nagy Δ-rendszerek létezését. Az alábbi tételt nem bizonyítjuk, és még csak nem is teljes általánosságban mondjuk ki.

2.14. Tétel (Erdős–Rado) *Legyen a κ és λ olyan végtelen számosság, melyekre $\kappa^\lambda = \kappa$. Álljon a κ-nál nagyobb számosságú $\mathcal{F}$ halmazrendszer csupa legfeljebb λ számosságú halmazból. Ekkor kiválasztható $\mathcal{F}$-ből egy κ-nál nagyobb számosságú Δ-rendszer.* ∎

Legyen A végtelen, B véges, és legyenek P elemei az A-ból B-be képező *véges* parciális függvények. A kiterjesztés a szokásos: f kiterjeszti g-t, ha f mint függvény kiterjeszti g-t. Állítjuk, hogy ez a parciálisan rendezett halmaz MAF-os, vagyis nincsen benne ω_1-es antilánc. Vegyünk ugyanis ω_1 darab ilyen parciális függvényt, kell keresnünk közöttük két kompatibilist. Függvényeink értelmezési tartománya A egy-egy véges részhalmaza. Alkalmazva ezekre a halmazokra a 2.13. Δ-rendszeres tételt, az adott függvények közül ki tudunk választani ω_1 darabot, melyek értelmezési tartománya egy D magú Δ-rendszert alkot. Két ilyen f_1 és f_2 függvény értelmezési tartománya a D-n kívül diszjunkt, tehát f_1 és f_2 kompatibilis, ha D-re megszorítva ugyanazt a függvényt adja. Ám D-re megszorított függvényből csak véges sok különböző létezik (mert B véges), tehát valamelyik megszorítás ω_1-szer előfordul. Végül is az adott függvények közül ω_1-et is ki tudtunk választani úgy, hogy közülük bármely kettő kompatibilis.

Válasszuk most P elemeinek az A-ból B-be képező parciális függvények közül azokat, melyek értelmezési tartománya *megszámlálható*, a rendezés megint a szokásos. Ez a P teljesíti a $(2^\omega)^+$-antilánc feltételt. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint az előbb, csak most a 2.14. tételt használjuk $\lambda = \omega$ és $\kappa = 2^\omega$ választással. Az adott κ^+ darab függvény értelmezési tartományából válasszunk ki egy κ^+-os Δ-rendszert. A mag most megszámlálható, abból egy véges halmazba legfeljebb kontinuum sok, azaz legfeljebb κ sok különböző függvény mehet. Így most is találunk a megadott függvények között κ^+ darabot, melyek a magon megegyeznek, ezek viszont páronként kompatibilisek.

Általában ha A végtelen és B legfeljebb 2^λ számosságú, akkor az a P, ami az A-ból B-be képező legfeljebb λ-s parciális függvényekből áll, teljesíti a $(2^\lambda)^+$-antilánc feltételt.

A P elemeinek egy $\langle p_\xi \rangle$ sorozata *csökkenő*, ha a nagyobb indexű tagok a kisebb indexűek alatt vannak, vagyis ha $\xi < \eta$ esetén $p_\xi \geq p_\eta$. A P parciálisan rendezett halmazról azt mondjuk, hogy *κ-teljes*, ha akárhogyan veszünk ki P-ből egy legfeljebb κ hosszúságú csökkenő láncot, ahhoz tudunk találni olyan elemet, ami a lánc összes eleme alatt van. Vagyis ha $\alpha \leq \kappa$ egy rendszám, $\langle p_\xi : \xi < \alpha \rangle$ egy α hosszúságú csökkenő sorozat, akkor van olyan $p \in P$, hogy $p_\xi \geq p$ minden ξ-re.

Az a P, aminek elemei az A-ból B-be képező megszámlálható parciális függvények a szokásos rendezéssel, ω-teljes. Valóban, ha $f_0, f_1, \ldots$ ilyen parciális függvényeknek egy csökkenő sorozata, akkor persze mindegyik függvény kiterjeszti az összes megelőzőt. Ezért $\bigcup\{f_i : i < \omega\}$ is függvény, értelmezési tartománya megszámlálható – ezért P-ben van –, és nyilván mindegyik f_i-nek kiterjesztése.

4. Beágyazások

A P parciálisan rendezett halmaz reguláris részeit fogjuk egy kicsit jobban megvizsgálni. Ezek maguk is egy parciálisan rendezett halmazt alkotnak a tartalmazásra nézve: a P-nek az A és B reguláris részeire legyen $A \leq B$ pontosan akkor, ha A részhalmaza B-nek. Mivel mind az üres, mind az egész P is reguláris, azért ebben a rendezésben van legkisebb és van legnagyobb elem is. A 2.4. állítás szerint akárhány reguláris halmaznak létezik a reguláris halmazok között legnagyobb alsó korlátja (ami megegyezik a halmazelméleti metszetükkel), és ugyancsak ezen állítás szerint létezik a legkisebb felső korlát is, ami az összeset tartalmazó reguláris halmazok metszete. Ez a korlát persze nem más, mint az unió reguláris lezártja, ami már nem feltétlenül egyezik meg magával az unióval. A P reguláris elemei tehát minimális és maximális elemmel rendelkező *teljes hálót* alkotnak. A következő állításokban azt mutatjuk meg, hogy ez a háló *komplementeres*.

2.15. Állítás *Minden $A \subset P$ nyílt halmazhoz található pontosan egy olyan tőle diszjunkt A' reguláris halmaz, amire $A \cup A'$ sűrű P-ben.*

Bizonyítás A keresett halmaz az A-tól diszjunkt nyílt halmazok uniója lesz. Először is ez az A' nyilván diszjunkt A-tól. Másodszor $A \cup A'$ sűrű: ha p-nek egyetlen kiterjesztése sincs A-ban, akkor a p alatti elemek halmaza, vagyis a nyílt $\mathrm{O}(p)$ és A diszjunkt, tehát $\mathrm{O}(p) \subset A'$ és $p \in \mathrm{O}(p)$. Harmadszor A' reguláris, hiszen ha A' sűrű p alatt, akkor p egyetlen kiterjesztése sem lehet az A'-től diszjunkt nyílt A-ban. Ezért $\mathrm{O}(p)$ és A diszjunkt, $p \in \mathrm{O}(p) \subset A'$.

Az unicitás igazolásához tegyük fel, hogy A_1 és A_2 is rendelkezik az állításban kimondott tulajdonságokkal. Az A_2 egyetlen eleme alatt sem lehet A-beli, hiszen A_2 speciálisan nyílt is, vagyis A_2 elemei alatti elemek is A_2-ben vannak, továbbá A_2 és A diszjunktak. Másrészt $A \cup A_1$ sűrű P-ben, ezért A_1-nek kell sűrűnek lennie A_2 elemei alatt, amiből $A_2 \subset \mathrm{R}(A_1) = A_1$. Hasonlóan abból, hogy $A \cup A_2$ sűrű P-ben, adódik hogy A_2 sűrű A_1 elemei alatt, amiből $A_1 \subset \mathrm{R}(A_2) = A_2$. Ezek együtt bizonyítják, hogy $A_1 = A_2$, amint állítottuk. ■

Megjegyezzük, hogy az A és A' elemei páronként inkompatibilisek, hiszen ezek speciálisan diszjunkt nyílt halmazok is. Ha az A nem csak nyílt hanem reguláris is, akkor az állítás szimmetrikus A-ban és A'-ben, ezért ha A-hoz A' tartozik, akkor A'-höz A, vagyis $A'' = A$. Ha A nyílt, akkor csak annyit mondhatunk, hogy $A \subset A''$ (hiszen A az A'-től diszjunkt nyílt halmaz). Viszont A' mindig reguláris, tehát $A''' = A'$ mindig igaz.

2.16. Állítás *Az előző állítás jelöléseit használva* (i) *ha A és B diszjunkt nyílt halmazok, akkor $B \subset A'$;* (ii) *minden A nyíltra $p \in A'$ pontosan akkor, ha $\mathrm{O}(p) \cap A = \emptyset$;* (iii) *$p \in A'$ pontosan akkor, ha A komplementere sűrű p alatt.*

Bizonyítás Az A' az A-tól diszjunkt nyílt halmazok uniója, ebből közvetlenül adódik az első két állítás. Ha $p \in A'$, akkor $\mathrm{O}(p) \subset A'$ is teljesül, tehát p alatt A' is sűrű, márpedig A komplementere bővebb A'-nél. Fordítva, ha $P - A$ sűrű p alatt, akkor p egyetlen kiterjesztése sem lehet A-beli, ezért A és $\mathrm{O}(p)$ diszjunktak. ■

Egy struktúra *Boole-algebra*, ha a $+$ és $\cdot$ kétváltozós, a negálás egyváltozós művelet, a 0 és 1 konstansok valamint a $\leq$ parciális rendezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

asszociativitás:	$x+(y+z)=(x+y)+z,\ \ x{\cdot}(y{\cdot}z)=(x{\cdot}y){\cdot}z$
kommutativitás:	$x+y=y+x,\ \ x{\cdot}y=y{\cdot}x$
idempotencia:	$x+x=x,\ \ x{\cdot}x=x$
disztributivitás:	$x{\cdot}(y+z)=(x{\cdot}y)+(x{\cdot}z)$
	$x+(y{\cdot}z)=(x+y){\cdot}(x+z)$
deMorgan szabályok:	$-(x+y)=(-x){\cdot}(-y)$
	$-(x{\cdot}y)=(-x)+(-y)$
kétszeres negálás:	$-(-x)=x$
0–1 szabályok:	$x+0=x,\ \ x{\cdot}0=0,\ \ x+1=1,\ \ x{\cdot}1=x$
	$x+(-x)=1,\ \ x{\cdot}(-x)=0$
rendezés:	$x\leq y \Leftrightarrow x+y=y \Leftrightarrow x{\cdot}y=x$

Könnyű látni, hogy x és y legkisebb felső korlátja $x{+}y$, legnagyobb alsó korlátja pedig $x{\cdot}y$. A Boole-algebra elemeinek egy tetszőleges A részhalmazára A-nak a $\leq$ rendezés szerinti *legkisebb felső korlátját*, ha egyáltalán létezik, $\sum A$ jelöli, a *legnagyobb alsó korlátot* pedig, megint csak ha létezik, $\prod A$. A Boole-algebra M*-teljes*, ha alaphalmazának M-beli részeinek van legkisebb felső és van legnagyobb alsó korlátja, és ezekre a halmazokra igaz a disztributivitás és a deMorgan azonosság, vagyis $A\in M$ esetén

disztributivitás:	$x{\cdot}\sum A=\sum\{x{\cdot}y : y\in A\}$
	$x+\prod A=\prod\{x+y : y\in A\}$
deMorgan szabályok:	$-\sum A=\prod\{-y : y\in A\}$
	$-\prod A=\sum\{-y : y\in A\}$

úgy értve, hogy a jobb oldalak szintén léteznek és egyenlők a megfelelő bal oldallal. A Boole-algebra *teljes*, ha M-teljes olyan M-mel, ami az algebra alaphalmazának összes részét tartalmazza.

A továbbiakban rögzítjük a P parciálisan rendezett halmazt. A P reguláris részhalmazainak jelölésére az a, b, c betűket fogjuk használni. Ezeken $a\leq b$, ha $a\subset b$. Az a és b reguláris részhalmazoknak (a fentiek szerint létező) legkisebb felső korlátját $a+b$-vel, legnagyobb alsó korlátját (vagyis metszetét) pedig $a{\cdot}b$-vel jelöljük. A 2.15. állítás szerinti egyértelmű komplementum jele $-a$.

2.17. Tétel *A P reguláris részhalmazai ezekkel a műveletekkel teljes Boole-algebrát alkotnak.*

Bizonyítás Az egész P valamint az üres halmaz is reguláris, ezek alkotják a $\mathcal{B}$ Boole-algebra legnagyobb valamint legkisebb elemét: $1_{\mathcal{B}}=P$ illetve $0_{\mathcal{B}}=\emptyset$. A 2.7. következmény szerint egy P-ben sűrű halmaznál bővebb reguláris halmaz csak az egész $P = 1_{\mathbb{B}}$. Ha $a \subset P$ tetszőleges reguláris halmaz, akkor a 2.15. állítás szerint a és $-a$ diszjunktak, továbbá $a \cup -a$ sűrű P-ben. Tehát $a\cdot(-a) = 0$ valamint $a + (-a) = 1$. Az, hogy $-(-a) = a$, szintén ugyanebből az állításból következik.

Következőnek az általános deMorgan azonosságokat ellenőrizzük. Láttuk, hogy az a_i reguláris halmazok legnagyobb alsó korlátja a metszetük, legkisebb felső korlátja pedig az uniójuk reguláris lezártja. Ha tehát $A = \bigcup\{a_i : i \in I\}$ valamint $B = \bigcap\{-a_i : i \in I\}$, akkor $\sum\{a_i : i \in I\} = \mathrm{R}(A)$, és $\prod\{-a_i : i \in I\} = B$.

Először is $\mathrm{R}(A)$ és B diszjunktak. Ugyanis a_i és $-a_i$ diszjunktak, ezért B, mint a $-a_i$ halmazok metszete is diszjunkt a_i-től, és így a 2.16. állítás szerint $a_i \subset -B$. Ezek szerint $-B$ felső korlátja az a_i halmazok mindegyikének, ezért ezek legkisebb felső korlátja is része $-B$-nek. Tehát $\mathrm{R}(A) \subset -B$, B és $-B$ diszjunktak, tehát $\mathrm{R}(A)$ és B is diszjunktak.

Másrészt állítjuk, hogy $\mathrm{R}(A) \cup B$ sűrű P-ben. Ha $p \in P$-nek nincs kiterjesztése a_i-ben, akkor p alatt a_i komplementere sűrű, ami $-a_i$ definíciója szerint annyit tesz, hogy $p \in (-a_i)$. Így tehát egy tetszőleges p-nek vagy van valamelyik a_i-ben kiterjesztése – és ekkor $\mathrm{R}(A)$-ban is –, vagy pedig p mindegyik $(-a_i)$-nek eleme, tehát eleme ezek metszetének, vagyis B-nek is.

Tehát $\mathrm{R}(A)$ és B diszjunkt reguláris halmazok, továbbá uniójuk sűrű P-ben. A 2.15. állítás unicitási része miatt ezekből már következik, hogy $\mathrm{R}(A) = -B$, vagyis

$$\sum\{a_i : i \in I\} = -\prod\{-a_i : i \in I\},$$

amivel igazoltuk az egyik deMorgan azonosságot. A másik innen azonnal jön az a_i és $-a_i$ felcserélésével.

A disztributivitás kivételével a többi Boole-azonosság könnyen adódik abból, hogy a műveleteket egy parciális rendezésből definiáltuk; a disztributivitást is csak az egyik alakjában kell megmutatnunk, abból a deMorgan azonossággal megkapható a másik. Mondjuk azt akarjuk megmutatni, hogy

$$b\cdot \sum\{a_i : i \in I\} = \sum\{b\cdot a_i : i \in I\}.$$

A bal oldal b-nek azon elemeiből áll, amik alatt az $A = \bigcup\{a_i : i \in I\}$ halmaz sűrű. Egy ilyen elem alatt $b \cap A$ is sűrű, hiszen b (mint reguláris halmaz) nyílt, és ezért egy elemének minden (speciálisan A-beli, ha van olyan) kiterjesztése egyúttal b-nek is eleme. A jobb oldal éppen $\mathrm{R}(b \cap A)$, vagyis azon P-beli elemek halmaza, amik alatt $b \cap A$ sűrű. Így igazoltuk, hogy a bal oldal része a jobb oldalnak. Másrészt világos, hogy a bal oldalon álló reguláris halmaz felső korlátja az összes $b\cdot a_i = b \cap a_i$ halmaznak, tehát bővebb azok legkisebb felső korlátjánál, vagyis a jobb oldalnál. Tehát a két oldal egyenlő, amit igazolni akartunk. ■

Ugyanez a tétel érvényben marad tetszőleges topológikus tér reguláris nyílt halmazaira, vagyis ezek is teljes Boole-algebrát alkotnak a megfelelően definiált műveletekkel.

Tetszőleges (teljes) Boole-algebrát részben rendezett halmaznak is tekinthetünk, ha elfelejtkezünk a minimális 0 eleméről. Az így adódó részben rendezett halmazban a és b pontosan akkor kompatibilis, ha $a{\cdot}b \neq 0$, és akkor inkompatibilis, ha $a{\cdot}b = 0$.

Legyen $\mathcal{B}$ a P parciálisan rendezett halmaz reguláris részeiből alkotott teljes Boole-algebra. Tekintsük azt a $\varphi : P \to \mathcal{B}$ leképezést, ami a $p \in P$ ponthoz a $\varphi(p) = \mathrm{RO}(p)$ reguláris halmazt rendeli. Ennek a leképezésnek a következő tulajdonságai vannak:

(i) *ha $p \leq q$, akkor $\varphi(p) \leq \varphi(q)$*;

(ii) *P képe sűrű $\mathcal{B}$-ben*, vagyis a Boole-algebra minden a nem nulla eleméhez létezik olyan $p \in P$, hogy $\varphi(p) \leq a$;

(iii) *φ kompatibilitástartó*, vagyis p és q akkor és csak akkor kompatibilis P-ben, ha $\varphi(p)$ és $\varphi(q)$ kompatibilisek $\mathcal{B}$-ben.

Az első kettő a definíciókból és abból, hogy $p \in \varphi(p)$ azonnal következik. A harmadiknál ha p és q a P-nek kompatibilis elemei, akkor van olyan $r \in P$, hogy $r \leq p$ valamint $r \leq q$. Ekkor viszont $\varphi(r) \leq \varphi(p)$ és $\varphi(r) \leq \varphi(q)$ az (i) szerint, tehát $\varphi(p)$ és $\varphi(q)$ is kompatibilisek. Ha viszont p és q inkompatibilisek, akkor O_p és O_q diszjunkt nyílt halmazok. A 2.8. állítás szerint ebben az esetben $\mathrm{RO}(O_p)$ és $\mathrm{RO}(O_q)$ is diszjunktak, vagyis a metszetük üres: $\varphi(p){\cdot}\varphi(q) = 0$, azaz $\varphi(p)$ és $\varphi(q)$ is inkompatibilisek.

2.18. Tétel *A P parciális rendezéshez izomorfia erejéig egyetlen teljes Boole-algebra és egyetlen $\varphi : P \to \mathcal{B}$ leképezés létezik, ami rendelkezik a fenti* (i)–(iii) *tulajdonságokkal.*

Bizonyítás Legyen $\mathcal{B}$ egy teljes Boole-algebra és a $\varphi : P \to \mathcal{B}$ leképezés ilyen. Természetesen azt fogjuk megmutatni, hogy $\mathcal{B}$ izomorf a P reguláris részeiből alkotott algebrával, és a $\varphi(p) = \mathrm{RO}(p)$.

Legyen $b \in \mathcal{B}$ a Boole-algebra tetszőleges eleme, és legyen $P_b \overset{\text{def}}{=} \{p \in P : \varphi(p) \leq b\}$, valamint $B_b \overset{\text{def}}{=} \{\varphi(p) : p \in P_b\}$. Állítjuk elsőként, hogy B_b legkisebb felső korlátja, vagyis $\sum B_b$ éppen b. Mivel B_b minden eleme b alatt van, azért a legkisebb felső korlát is legfeljebb b, vagyis $\sum B_b \leq b$. Ha e két mennyiség nem volna egyenlő, akkor $b{\cdot}(-\sum B_b) \neq 0$, vagyis P képének sűrűsége miatt volna $q \in P$, amire $\varphi(q) \leq b$, valamint $\varphi(q) \leq -\sum B_b$. Ez utóbbi szerint $0 = \varphi(q){\cdot}\sum B_b$, vagyis $\varphi(q)$ és $\sum B_b$ inkompatibilis, és ebből következően $\varphi(q)$ és B_b elemei is inkompatibilisek. Az (iii) tulajdonság miatt ekkor q és P_b elemei is inkompatibilisek, speciálisan $q \notin P_b$, ellentétben P_b definíciójával és azzal, hogy $\varphi(q) \leq b$.

Másodszor állítjuk, hogy P_b a P-nek reguláris része. Először is P_b nyílt, hiszen ha $q \in P_b$ és $r \leq q$, akkor $\varphi(r) \leq \varphi(q) \leq b$ miatt $\varphi(r) \leq b$ is igaz, vagyis r is eleme P_b-nek. Ezért csak azt kell látnunk, hogy ha P_b sűrű $q \in P$ alatt, akkor $q \in P_b$. Legyen tehát q ilyen, és nézzük $\varphi(q)$-t. Ha ez b alatt van, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor $\varphi(q){\cdot} - b \neq 0$, és ekkor van olyan $r \in P$, aminek képe $\varphi(q)$ és $-b$ alatt van, vagyis $\varphi(r)$ és $\varphi(q)$ kompatibilis (hiszen $\varphi(r) \leq \varphi(q)$), míg $\varphi(r)$ és b nem (hiszen $\varphi(r){\cdot}b = 0$), és így $\varphi(r)$ és a b alatti $\varphi(p)$ elemek sem kompatibilisek. Az (iii) feltétel miatt ekkor r és q is kompatibilisek, míg $p \in P_b$ esetén r és p nem. Ekkor q-nak és r-nek van közös

r' kiterjesztése, és r' továbbra is inkompatibilis P_b összes elemével, speciálisan r' alatt nincs P_b-nek egyetlen eleme sem. Következésképp P_b nem lehetett sűrű q alatt, ami adja a kívánt ellentmondást.

Legyen most $q \in P$ tetszőleges, $b = \varphi(q)$, és nézzük a P_b halmazt. A definíciók szerint ez P-nek azokból a p elemeiből áll, amikre $\varphi(p) \leq \varphi(q)$. Állítjuk, hogy $P_b = \mathrm{RO}(q)$. Ez a P_b az előzőek alapján reguláris, tartalmazza az összes q alatti elemet, ezért $P_b \supset \mathrm{RO}(q)$. Ha most ez a tartalmazás valódi volna, akkor lenne olyan $p \in P_b$, ami nem eleme $\mathrm{RO}(q)$-nak. A 2.6. állítás szerint ekkor p-nek van olyan r kiterjesztése, ami q-val inkompatibilis. Az (iii) feltétel szerint $\varphi(r)$ és $\varphi(q)$ is inkompatibilis, speciálisan $\varphi(r)$ nincs $\varphi(q)$ alatt, tehát $r \notin P_b$. Ugyanakkor $p \in P_b$, P_b nyílt és $r \leq p$, vagyis $r \in P_b$, ellentmondás.

Végül azt mutatjuk meg, hogy ha P-nek vesszük két különböző reguláris részét, A_1-et és A_2-t, akkor az $a_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum\{\varphi(p) : p \in A_1\}$ valamint $a_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum\{\varphi(p) : p \in A_2\}$ a Boole-algebra különböző elemei. Mivel A_1 és A_2 különbözők, azért van olyan P-beli elem, ami az egyikben benne van, a másikban nincs, mondjuk $p \in A_1$ és $p \notin A_2$. Ekkor A_2 nem sűrű p alatt, tehát van p-nek olyan q kiterjesztése, hogy q alatt A_2-nek már egyetlen eleme sincs, más szóval q és A_2 összes eleme inkompatibilis. Persze $q \in A_1$, mivel A_1 nyílt, ezért $\varphi(q) \leq a_1$. Másrészt A_2 összes elemének képe $-\varphi(q)$ alatt van, hiszen a képek és $\varphi(q)$ inkompatibilisek, és így ez igaz a képek legkisebb felső korlátjára, a_2-re is: $a_2 \leq -\varphi(q)$. Ezt összevetve a korábban kapott $\varphi(q) \leq a_1$-gyel láthatjuk hogy a_1 és a_2 valóban különböző.

Igazoltuk tehát, hogy $\mathcal{B}$ elemei és P reguláris részei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető úgy, hogy a $q \in P$ képe éppen a $\mathrm{RO}(q)$, valamint a Boole-algebrában a rendezés megfelel a reguláris részek tartalmazás szerinti rendezésének. Innen a tétel állítása már következik, hiszen az algebra műveleteit a rendezés már egyértelműen meghatározza. ∎

A $\varphi : P \to \mathcal{B}$ beképezés a parciális rendezés p és q elemeit pontosan akkor viszi $\mathcal{B}$-nek ugyanabba az elemébe, ha $\mathrm{RO}(p) = \mathrm{RO}(q)$. Ha P elágazó, akkor ez különböző p és q-ra sohasem következhet be, hiszen ilyenkor p és q a kompatibilitás szempontjából különbözőképpen viselkednek, tehát képeiknek is különbözőképpen kell viselkedniük. Elágazó parciális rendezés esetén tehát φ rendezéstartó beágyazás is, az ilyen parciális rendezések tehát izomorfak a teljes Boole-algebrák sűrű részeivel.

A $\mathcal{B}$ Boole-algebra egy F részhalmaza *filter*, ha felszálló, vagyis $p \in F$ és $p \leq q$ esetén $q \in F$; metszetzárt, vagyis ha $p \in F$, $q \in F$, akkor $p \cdot q \in F$, végül $0 \notin F$. Ha most P egy parciális rendezés, $\mathcal{B}$ a P reguláris részeinek Boole-algebrája, és $\varphi : P \to \mathcal{B}$ a megfelelő beképezés, akkor a P-beli és a $\mathcal{B}$-beli filterek kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak a következő módon: ha $F \subset \mathcal{B}$ egy $\mathcal{B}$-beli filter, akkor $\{p \in P : \varphi(p) \in F\}$ egy P-beli filter lesz; ha pedig $G \subset P$ egy P-beli filter, akkor $\{b \in \mathcal{B} : b \geq \varphi(p)$ valamilyen $p \in G\text{-re}\}$ egy $\mathcal{B}$-beli filter. Ez a két leképezés ráadásul éppen egymás inverze.

A forszolás alaptételeinek bizonyításakor egyszerűbb lenne P helyett P reguláris részeiből alkotott teljes Boole-algebrát használni. Mi azonban nem ezt az utat fogjuk követni, mert majdnem kivétel nélkül mindegyik alkalmazásban egy–egy konkrétan definiált parciális rendezést használunk, aminek reguláris részei már nem alkotnak P-hez hasonló szép és könnyen kezelhető struktúrát.

Feladatok

1. Igaz-e, hogy minden parciális rendezésnek van olyan sűrű része, ami elágazó?
2. Igazoljuk, hogy $\mathrm{RO}(p) = \mathrm{RO}(q)$ pontosan akkor, ha p és q kompatibilitás szempontjából egyformák.
3. Tegyük fel, hogy P minden elemének vannak inkompatibilis kiterjesztései. Mutassuk meg, hogy egy F filter nem metszheti el az összes maximális antiláncot.
4. Legyen A és B két halmaz, és álljon P azokból a véges f függvényekből, amikre $\mathrm{Dom}(f) \subset A$ és $\mathrm{Range}(f) \subset B$. Legyen $x \in A$-ra $D_x = \{f \in P : x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ illetve $D^y = \{f \in P : y \in \mathrm{Range}(f)\}$. Mutassuk meg, hogy ezek a halmazok sűrűk P-ben.
5. Legyen P mint az előző feladatban, és G olyan filter, ami az összes D_x valamint D^y halmazt elmetszi. Mutassuk meg, hogy $g = \bigcup G$ egy függvény, ami A-t B-re képezi, vagyis $\mathrm{Dom}(g) = A$ és $\mathrm{Range}(g) = B$.
6. Álljon P azokból a véges f függvényekből, melyekre $\mathrm{Dom}(f) \subset A$ valamint $\mathrm{Range}(f) \subset B$, és f semelyik értéket sem veszi fel kétszer (f ráképezés). Tegyük fel, hogy a G filter elmetszi a D_x valamint D^y halmazokat. Igazoljuk, hogy $\bigcup G$ kölcsönösen egyértelmű leképezés A és B között.
7. Legyenek P elemei az ω-ból a $\{0,1\}$-be képező véges függvények, a kiterjesztés a függvények szokásos kiterjesztése. Álljon $A \subset P$ azokból az f függvényekből, melyekre $0 \in \mathrm{Dom}(f)$ és $f(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy A reguláris és keressük meg A komplementerét. Álljon B azon f-ekből, melyekre $\{0,1,2\} \in \mathrm{Dom}(f)$, továbbá vagy $f(0) = f(1)$, vagy $f(1) = f(2)$. Igazoljuk, hogy B nyílt, de nem reguláris és keressük meg B reguláris lezártját. Adjunk meg P-ben két reguláris halmazt, melyek uniója nem reguláris.
8. A P parciálisan rendezett halmaz nyílt részeire definiáljuk az $a \to b$ *relatív pszeudokomplementert* a következőképpen: legyen ez mindazon $c \subset P$ nyíltak uniója, melyekre $c \cap a \subset b$. Mutassuk meg, hogy a, b, c nyíltakra (i) $(a \cap b) \to c = (a \to (b \to c))$; (ii) $a \to (b \cap c) = (a \to b) \cap (a \to c)$; (iii) ha b reguláris, akkor $a \to b$ azokból az elemekből áll, amik alatt $-a \cup b$ sűrű.
9. Adjunk meg olyan P parciálisan rendezett halmazt, amelyben minden elemnek vannak inkompatibilis kiterjesztései, de P nem elágazó.
10. Legyen P elágazó, és $G \subset P$ egy olyan filter, hogy ha $p \in G$-nek van valódi kiterjesztése P-ben, akkor van valódi kiterjesztése G-ben is. Következik ebből, hogy G maximális?
11. Legyen κ egy szinguláris számosság. Adjunk meg kételemű halmazoknak olyan κ számosságú halmazát, amiből nem lehet egy κ-s Δ-rendszert kiválasztani.
12. Adjunk meg olyan P-t, ami egyszerre ω-teljes és MAF-os. Lehet ez a P elágazó is?
13. Tegyük fel, hogy P parciális rendezésnek a $\mathcal{B}$ Boole-algebrába való $\varphi : P \to \mathcal{B}$ beképezése rendezés- és kompatibilitástartó, továbbá P képe sűrű. Legyen $q \in P$ és $A \subset P$ tetszőleges. Igazoljuk, hogy $\varphi(q) \leq \sum\{\varphi(p) : p \in A\}$ akkor és csak akkor, ha $\bigcup\{O_p : p \in A\}$ sűrű q alatt.
14. Tegyük fel, hogy a φ_1 és φ_2 leképezések a P-t rendezés- és kompatibilitástartó módon beképezik a $\mathcal{B}_1$ illetve $\mathcal{B}_2$ teljes Boole-algebrákba úgy hogy P képe mindkét algebrában sűrű. $b \in \mathcal{B}_1$-re legyen

$$f(b) \stackrel{\text{def}}{=} \textstyle\sum_2\{\varphi_2(p) : p \in P \text{ és } \varphi_1(p) \leq_1 b\}.$$

Mutassuk meg közvetlenül, hogy f izomorfizmus $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ között.