Kövezések, elhelyezések és fedések a hiperbolikus térben

ifj. Böröczky Károly*

1. Bevezetés

A cikk fő témája a $\mathbb{H}^n$ hiperbolikus térbeli egybevágó konvex testekkel való elhelyezések és fedések sűrűsége. Erről a témáról további információ található a L. Fejes Tóth [28] és K. Böröczky, Jr. [17] monográfiákban, és G. Fejes Tóth, W. Kuperberg [26] áttekintő cikkében.

Miután az $\mathbb{E}^n$ euklidészi térbeli elhelyezések és fedések tulajdonságait is áttekintjük, a fő fogalmakat mind a két térre definiáljuk. Jelölje $B(x,r)$ az x közepű, r sugarú gömböt, és $V(\cdot)$ a térfogatot. A később fellépő hányados tereken indukált mértéket is $V(\cdot)$-vel jelöljük az egyszerűség kedvéért. Legyen K egy konvex test $\mathbb{E}^n$-ben vagy $\mathbb{H}^n$-ben. K egybevágó példányainak halmazát elrendezésnek hívjuk, ha minden kompakt halmazt csak véges sok példány metsz, és létezik R, hogy bármely R sugarú gömb belemetsz valamely példányba. Az elrendezés elhelyezés (kitöltés), ha a példányok belsejei páronként diszjunktak, és fedés, ha a példányok úniója a teljes tér.

Az $\mathbb{E}^n$ euklidészi térben a témakör nagyon jól kidolgozott (lásd például C.A. Rogers [54], L. Fejes Tóth [30] vagy G. Fejes Tóth és W. Kuperberg [26]). Röviden áttekintjük a legfontosabb eredményeket. A K konvex test egybevágó példányai egy $\mathcal{C}$ elrendezésének $\Delta_+(\mathcal{C})$ felső ill. $\Delta_-(\mathcal{C})$ alsó sűrűsége tetszőleges rögzített $x \in \mathbb{E}^n$ pontra

$$\Delta_+(\mathcal{C}) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))} \qquad (1)$$

$$\Delta_-(\mathcal{C}) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))}. \qquad (2)$$

*OTKA 068398 és 049301 támogatásával

Miután nagy gömbök felszíne elhanyagolható a térfogathoz képest az euklidészi térben, nem nehéz belátni, hogy a jobb oldali $\limsup$ és $\liminf$ nem függ az x választásától. Az is igaz, ha megadunk $\mathbb{E}^n$ egy olyan $\mathcal{P}$ cellafelbontását konvex poliéderekre, hogy a cellák beírt gömb sugaraira létezik pozitív alsó, a körülírt gömb sugaraira létezik felső korlát, akkor a cellákbeli sűrűségekre adott felső becslés $\Delta_+(\mathcal{C})$-ra is felső becslés, és a cellákbeli sűrűségekre adott alsó becslés $\Delta_-(\mathcal{C})$-ra is alsó becslés. Tehát ha minden cellában ugyan az a Δ a sűrűség, akkor $\Delta = \Delta_+(\mathcal{C}) = \Delta_-(\mathcal{C})$.

Ezek után a $\delta(K)$ elhelyezési sűrűség a $\Delta_+(\mathcal{C})$ értékek szuprémuma K egybevágó példányainak összes $\mathcal{C}$ elhelyezésére, és a $\vartheta(K)$ fedési sűrűség a $\Delta_-(\mathcal{C})$ értékek infimuma K egybevágó példányainak összes $\mathcal{C}$ fedésére. Ismert, hogy létezik olyan $\mathcal{E}$ elhelyezés és $\mathcal{F}$ fedés K egybevágó példányaival, hogy

$$\begin{aligned}
\delta(K) &= \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{E}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))} \\
\vartheta(K) &= \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{F}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))}.
\end{aligned}$$

Továbbá $\delta(K) = 1$ ill. $\vartheta(K) = 1$ pontosan akkor, ha K egybevágó példányaival kikövezhető a tér.

A hiperbolikus térben nagy gömbök felszíne lényegében arányos a térfogattal, ezért a fenti tulajdonságokat nem lehet az euklidészi esethez hasonlóan bizonyítani. Körülbelül két évtizedig kitartott a remény, hogy egy ügyes bizonyítás elvezet majd ezekre a tulajdonságokra, különösen azok után, hogy L. Fejes Tóth [27] bizonyos cellákra vonatkozó sűrűségbecsléseket igazolni tudott a hiperbolikus síkon is (lásd 5. Fejezet). Végül Böröczky K. [12] éppen itt a Matematikai Lapokban mutatta meg, hogy a hiperbolikus síkon léteznek elhelyezések és fedések egybevágó körökkel, melyekre egyáltalán nem teljesülnek a fenti tulajdonságok, azaz nem létezik a sűrűségnek az euklidészit másoló defníciója a hiperbolikus síkon. A [12]-beli példák magasabb dimenziós változatait V.S. Makarov [40] írta le. Ezek után a hiperbolikus elhelyezések és fedések elmélete több szálon fejlődött. Egyrészt a sűrűségtől különböző mennyiségek extremalitását vizsgálták intenzíven (lásd 4. Fejezet). A sűrűség esetén az első természetes problémák a cellarendszerekbeli sűrűség becslése (lásd 5. Fejezet), és a véges elrendezések sűrűsége (lásd 6. Fejezet). Bár periódikus elrendezésekre már korábban sikerült kiterjeszteni a sűrűség definícióját analitikus ezközökkel, ennél általánosabb elrendezésekre csak a XXI. században sikerült (lásd 6. Fejezet). Ezen témák előkészítéséül a 2. Fejezetben áttekintjük a hiperbolikus terek kövezéseit, és a 3. Fejezetben pedig a Dirichlet-Voronoj és a Delone kövezések kerülnek ismertetésre.

2. Kövezések

A $\mathbb{H}^n$ n-dimenziós hiperbolikus térben az x és y pontok távolságát $d(x,y)$ jelöli. Kövezésen $\mathbb{H}^n$-beli (különböző) konvex poliéderek egy olyan $\mathcal{P}$ családját értjük, melyre

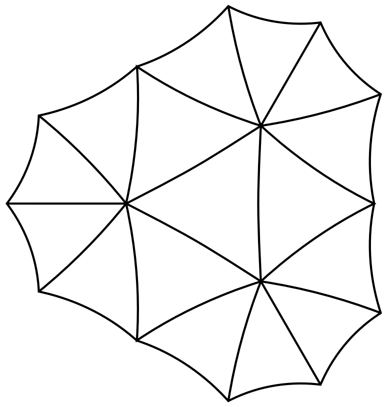
- $\mathcal{P}$ elemei lefedik $\mathbb{H}^n$-t;
- bármely kompakt halmazt $\mathcal{P}$-nek csak véges sok eleme metsz;
- $\mathcal{P}$ bármely két elemének metszete közös lap.

A kövezést periódikusnak hívjuk, ha a szimmetria csoportja szerinti faktora kompakt (lásd J.G. Ratcliffe [52], vagy Molnár E., Prok I., Szirmai J. [43]). Másszóval létezik olyan konvex poliéder (ún. alaptartomány), melynek a szimmetriacsoport szerinti képei kikövezik a teret. A periódikusság ekvivalens olyan $\rho > 0$ és $x \in \mathbb{H}$ létezésével, melyekre a $B(gx,\rho)$ gömbök lefedik a teret, ahogy g végigfut $\mathcal{P}$ szimmetria csoportjának elemein. Az ún. Selberg lemma (lásd J.G. Ratcliffe [52]) szerint ebben az esetben található olyan kompakt hiperbolikus sokaság, melyen $\mathcal{P}$ egy véges kövezést indukál.

A hiperbolikus sík egyik meghatározó tulajdonsága, hogy "exponenciálisan" tágul, ahogy egy rögzített pontjától távolodunk. Ez az észrevétel talán segít megérteni, hogy szabályos háromszögekkel való kövezésben a csúcsok foka tetszőleges nagy lehet. Pontosabban legyenek p és q olyan pozitív egészek, melyekre

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Miután a hiperbolikus síkon egy p-szög szögeinek összege kisebb $(p-2)\pi$-nél, nem nehéz belátni a következő kövezés létezését. A kövek szabályos egybevágó p-szögek, és minden csúcsban q kő találkozik (lásd az 1. ábrát a $p=3$, $q=7$ esetről, és a 2. ábrát, ahol a kövezés a duálisával, a $p=7$ és $q=3$ esettel együtt látható). Könnyen látható, hogy a fenti kövezések a hiperbolikus síkon mind periódikusak. Megjegyzem, ha $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, akkor az euklidészi síkon, ha pedig $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ és $p,q\geq 3$, akkor a gömbfelületen létezik hasonló kövezés. Ha $p=3$, akkor C. Bavard, K.J. Böröczky, I. Prok, L. Vena, G. Wintsche [3] tetszőleges $q\geq 7$-re megkonstruálta a legkisebb területű olyan kompakt hiperbolikus felületet, mely szabályos háromszögekkel kövezhető, és minden csúcsban q háromszög találkozik. Z. Lučić és E. Molnár [39] igen sok alapvető eredményt bizonyít,

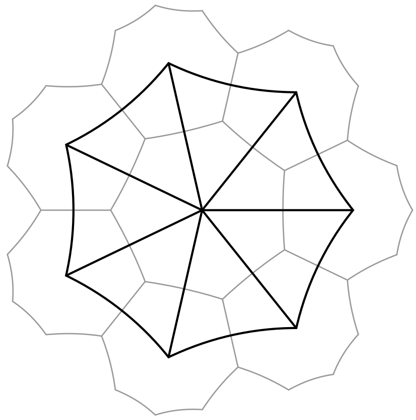


1. ábra.

például osztályozták a szabályos sokszögekkel való uniform (csúcstranzitív) kövezéseket.

A hiperbolikus síkot nagyon sokféleképpen lehet periodikusan kövezni (lásd például L. Fejes Tóth [28], vagy J. Molnár [46]). Ezzel együtt előfordulhat, hogy egy konvex sokszög egybevágó példányaival ki lehet kövezni a hiperbolikus síkot, de ez sehogysem tehető meg periodikus módon. Ilyen konvex sokszöget először Böröczky K. [12] konstruált, később G.A. Margulis, S. Mozes [41] a síkban, és V.S. Makarov [40] magasabb dimenziós terekben talált további példákat. Megjegyzem, hogy mai napig nyitott probléma, hogy az euklidészi síkon is létezik-e hasonló tulajdonságú konvex sokszög.

A síkbeli kövezések sokfélesége után talán meglepő, hogy a legalább három dimenziós hiperbolikus terek közül egyedül a három és négy dimenzióst lehet egy szabályos poliéder egybevágó példányaival kövezni. Ezek leírásához bevezetem az ún. Schläfli szimbólumot, mely tetszőleges állandó görbületű térbeli szabályos poliéder egybevágó példányaival történő kövezés megadására a legáltalánosabban használt jelölés. Egy ilyen kövezésben egy adott csúcsból kiinduló élek végpontjai szintén szabályos poliédert alkotnak, mely egybevágóság erejéig nem függ a csúcs választásától, és a kövezés csúcsalakzatának hívjuk. Továbbá minden csúcsra az őt tartalmazó kövek körülírt gömb (kör) középpontjai is valamely szabályos poliéder csúcsai, és ezen utóbbi egybevágó szabályos poliéderek alkotják az ún. duális kövezést. Megjegyzem, hogy a $(k-1)$-dimenziós gömbfelület kövezései megfelelnek a k-dimenziós szabályos poliédereknek (melyek minden állandó görbületű térben léteznek). Ezek után a minket érdeklő kövezések a követ-



2. ábra.

kezőképpen adhatóak a Schläfli szimbólum segítségével a dimenzióra vonatkozó indukcióval. Ha a síkban a kövek p-szögek és a csúcsalakzatok q-szögek, akkor a kövezés Schläfli szimbóluma (p,q). Például a gömbfelületen (azaz ha $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$) a $(3,3)$ a szabályos tetraédert, a $(4,3)$ a kockát, az $(5,3)$ a dodekaédert, a $(3,4)$ az oktaédert és a $(3,5)$ az ikozaédert határozza meg. Három dimenzióban, ha a kövek maguk (p,q), a csúcsalakzatok (q,r) szimbólumhoz tartoznak, akkor a kövezés Schläfli szimbóluma (p,q,r) (itt a q közös érték a kövek egy csúcsba futó éleinek a száma). Például a négy dimenziós szabályos poliéderek (azaz a három dimenziós gömbfelület kövezései) és Schläfli szimbólumaik a (3,3,3) szimplex, a $(4,3,3)$ hiperkocka, a $(3,3,4)$ keresztpoliéder, a $(3,4,3)$ 24-cella, az $(5,3,3)$ 120-cella, és végül a $(3,3,5)$ 600-cella. Az utolsó három poliéder elnevezése a hiperlapok (azaz a megfelelő három dimeziós gömbfelületi kövezés köveinek) számát adja meg. $\mathbb{H}^3$-ban a következő Schläfli szimbólumú kövezések léteznek: $(3,5,3)$, $(4,3,5)$, $(5,3,4)$, $(5,3,5)$. Négy dimenzióban, ha a kövek Schläfli szimbóluma (p,q,r), akkor a csúcsalakzatok a (q,r,s) szimbólumhoz tartoznak valamely s-re, és a kövezés Schläfli szimbóluma (p,q,r,s). $\mathbb{H}^4$-ben a következő Schläfli szimbólumú kövezések léteznek: $(3,3,3,5)$, $(5,3,3,3)$, $(4,3,3,5)$, $(5,3,3,4)$, $(5,3,3,5)$. Megjegyzem, bármely dimenzióban a duális kövezés Schläfli szimbóluma egyszerűen az eredeti Schläfli szimbólum számjegyei sorrendjének megfordításával kapható.

A Böröczky-féle gömbelhelyezésekre vonatkozó szimplex korlát miatt (lásd K. Böröczky [13]) fontos a szabályos szimplexekkel történő kövezés. A legalább háromdimenziós hiperbolikus terekben ilyen csak egy van, a $\mathbb{H}^4$-beli $(3,3,3,5)$

kövezés, mely $2r$ oldalhosszú szabályos szimplexekkel történik, ahol $\operatorname{ch} r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ennek duálisa, melynek csúcsai a szimplexek körülírtgömbközéppontjai, a 120-cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezés.

A $\mathbb{H}^4$-beli kövezések közül még a $(5,3,3,5)$ vált igen nevezetessé. Itt egy kő olyan 120-cella, melynek egy megfelelő szimmetriacsoport szerinti képei kikövezik a teret. Pontosabban M.W. Davis [21] konstruált hiperbolikus sokaságot ennek a 120-cella megfelelő oldalpárjainak párosításával. A Davis-féle 4-sokaság főbb tulajdonságait J.G. Ratcliffe és S. Tschantz [53] írta le.

Magasabb dimenziós kövezések leírása megtalálható H.S.M. Coxeter klasszikus [19] könyvében (ami a nem kompakt poliédereket is tárgyalja). Ezen cikk szempontjai szerint igen hasznos olvasmány J. Szirmai [55]. További tulajdonságokért lásd például a L. Németh [50] vagy I. Vermes [56] cikkeket, illetve Molnár E., Prok I., Szirmai J. [43] irodalomjegyzében szereplő műveket.

3. Dirichlet-Voronoj cellarendszer és Delone háromszögelés

Ebben a fejezetben adott $\mathcal{P}$ ponthalmazhoz rendelünk két klasszikus kövezést, melyeknek gömbelrendezések esetén igen jelentős szerepük van. Feltesszük, hogy bármely kompakt halmaz $\mathcal{P}$-nek csak véges sok elemét tartalmazza, és létezik olyan pozitív R, hogy bármely R sugarú gömb tartalmazza $\mathcal{P}$ valamely elemét.

Bármely $p \in \mathcal{P}$ pont D_p Dirichlet-Voronoj celláját a következőképpen definiáljuk. Legyen D_p azon $x \in \mathbb{H}^n$ pontok halmaza, melyekre $d(x,p) \leq d(x,q)$ teljesül bármely $q \in \mathcal{P}$ esetén. Természetesen D_p függ magától $\mathcal{P}$-től is, de ezt nem szokás jelölni.

Adott p-től különböző $q \in \mathcal{P}$-re a $d(x,p) \leq d(x,q)$ egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza azon p-t tartalmazó féltér, melyet a pq szakasz felezőmerőlegese határol. Tehát D_p az ilyen félterek metszete, azaz konvex. A $\mathcal{P}$-re adott feltétel miatt $D_p \subset B(p,R)$. Ebből az is következik, hogy D_p a $\mathcal{P}$ azon (p-től különböző) elemeihez tartozó félterek metszete, melyek p-től való távolsága legfeljebb $2R$, vagyis D_p egy poliéder. Egy Dirichlet-Voronoj cella D_p lapstruktúrája visszatükrözi $\mathcal{P}$-nek p körüli pontjainak geometriáját. Ha F egy k-dimenziós lap, akkor található $\mathcal{P}$-nek $n+1-k$ olyan pontja, melyek nincsenek egy $(n-k)$-dimenziós altérben, és a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az F által kifeszített k-dimenziós altér.

A Dirichlet-Voronoj cellák együttese nyilván a tér egy kövezését adja. Könnyen látható, hogy bármely két metsző cella metszete egy közös lap. Ha $\mathcal{P}$ bármely két pontjának távolsága legalább $2r$, $r > 0$, akkor $B(p,r) \subset D_p$ minden $p \in \mathcal{P}$ esetén.

A $\mathcal{P}$-hez tartozó Delone kövezés a fenti Dirichlet-Voronoj cellarendszer duálisa, melyet B.N. Delone definiált [22] cikkében. Egy $\mathbb{H}^n$-beli gömböt nevezzünk üres gömbnek, ha a belseje nem tartalmaz $\mathcal{P}$-beli pontot, de a határa tartalmazza $\mathcal{P}$-nek olyan legalább $n+1$ pontját, melyek nincsenek egy $(n-1)$ dimenziós altérben. Vegyük észre, hogy hogy az üres gömbök középpontjai a Dirichlet-Voronoj cellák csúcsai. Minden üres gömbhöz rendeljük hozzá azt a konvex poliédert, melynek csúcsai a $\mathcal{P}$-nek a gömb határán lévő pontjai. Az így kapott ún. Delone-cellák alkotják a Delone kövezést. Bár nem triviális, de azért viszonylag könnyen látható, hogy valóban kövezést kaptunk, és ismét bármely két metsző cella metszete egy közös lap. Ha minden egyes Delone-cellát szimplexekre osztunk a cella egy rögzített csúcsából kiinduló átlók segítségével, akkor $\mathbb{H}^n$-t lapokban csatlakozó szimplexekre bonthatjuk. Bármely ilyen kövezést Delone háromszöglésnek hívunk. Megjegyezzük, hogy míg a Delone kövezés egyértelműen rendelődik $\mathcal{P}$-hez, a Delone háromszöglés függ attól, hogyan osztjuk szimplexekre a Delone-cellákat.

A 2. ábra a hiperbolikus sík szabályos háromszögekkel való kövezését mutatja hetedfokú csúcsokkal. Ha a pontrendszer a háromszögek csúcsaiból áll, akkor a Dirichlet-Voronoj cellák a szabályos hétszögek, a Delone cellák pedig a szabályos háromszögek.

Természetesen, ha a kinduló pontrendszer periodikus volt, akkor a kapcsolódó Dirichlet-Voronoi cellarendszer és Delone cellarendszer is periódikus. Továbbá ilyenkor mindig létezik periodikus Delone háromszögelés is. Ha valamely kompakt hiperbolikus sokaságot $\mathbb{H}^n$ szimmetriáinak (izometriáinak) egy olyan csoportja határoz meg, mely invariánsan hagyja a pontrendszert, akkor könnyen látható (lásd például J. Horváth és Á.H. Temesvári [33]), hogy a pontrendszer természetesen beágyazódik a sokaságba, és $\mathbb{H}^n$ bármely fenti periodikus kövezése a kompakt sokaság egy kövezését határozza meg.

A Dirichlet-Voronoj és Delone kövezések egybevágó gömbökkel való elhelyezések és fedések esetén jutnak nagy szerephez. Elhelyezések esetén igen sok eredmény hátterében áll L. Fejes Tóth [27] (síkbeli eset) és K. Böröczky [13] (térbeli eset) következő, Dirichlet-Voronoj cellákra vonatkozó becslése. Tekintsük r sugarú gömbök egy elhelyezését, és legyen x egy gömbközéppont. Ekkor x Dirichlet-Voronoj cellájának bármely k-dimenziós lapjának az x-től való távolsága legalább akkora, mint a $(n-k)$-dimenziós $2r$ élhosszú szabályos szimplex körülírt köre. Ez a becslés nem javítható $\mathbb{H}^n$-ben semmilyen $n \geq 2$-re és $r > 0$-ra. Továbbá, ha az elhelyezés egy szabályos sokszögekkel ($n = 2$) vagy 120-cellákkal

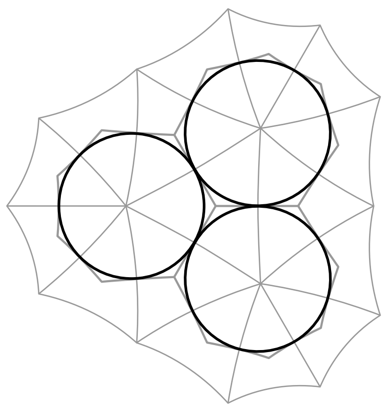
($n = 4$) való $(5,3,3,3)$ kövezés beírt köreiből ill. gömbjeiből áll, és minden csúcsban $n+1$ kő találkozik (lásd 3. ábra), akkor a kövek a Dirichlet-Voronoj cellák, és minden Dirichlet-Voronoj cellalapra éles a becslés.

4. Szoliditás, telítettség, szorosság

Ebben a fejezetben olyan fogalmakat tárgyalunk, amelyekkel megkerülhető a sűrűség definíciójának problémája.

Fejes Tóth Lászlótól (lásd [29]) ered a következő definíció. Egy K konvex test egybevágó példányaival való elhelyezést szolidnak hívjuk, ha belőle véges sok példány átrendezésével csak az eredetivel egybevágó módon kaphatunk elhelyezést. Hasonlóan K egybevágó példányaival való fedést szolidnak hívjuk, ha belőle véges sok példány átrendezésével csak az eredetivel egybevágó módon kaphatunk fedést.

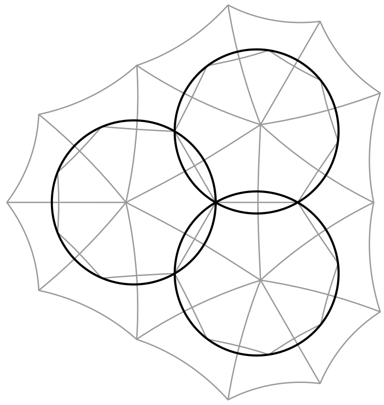
A hiperbolikus síkon a $2\pi/3$ szögű szabályos p-szögekkel való kövezés (tehát $p \geq 7$) beírt ill. körülírt körei szolid elhelyezést ill. fedést alkotnak (lásd 3. és 4. ábra). Ezt L. Fejes Tóth [29] bizonyította háromszögkorlátjára alapozva (lásd



3. ábra.

még M. Imre [34]). L. Fejes Tóth [29] azt is sejtette, hogy a fenti körelhelyezésből egy kört kivéve, a maradék elhelyezés is szolid. Ezt a sejtést A. Bezdek [4] igazolta $k \geq 8$-ra (lásd még L. Fejes Tóth [32] megjegyzéseit). Ennek a sejtésnek $p = 7$ esete még ma is nyitott.

Magasabb dimenzióban gömbök esetén csak két eredmény ismert szoliditásról. Tekintsük H^4-ben a 120-cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezését. Ekkor a kövek



4. ábra.

beírt gömbjei, melyek r sugarára $\operatorname{ch} r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ teljesül, szolid elhelyezést alkotnak K. Böröczky [13] szimplexkorlátja alapján. Továbbá ha K olyan konvex poliéder, melynek egybevágó példányaival egybevágóság erejéig pontosan egyféle módon kövezhető $\mathbb{H}^n$, akkor a kövezés nyilván szolid elhelyezés és szolid fedés is.

A szolid elhelyezések definícióját természetes módon ki lehet terjeszteni olyan körelhelyezésekre, melyekben több fajta kör is szerepel. G. Fejes Tóth [24] látta be, hogy több úgynevezett félig szabályos (másképp Archimédészi) kövezés beírt körei is szolid elhelyezést alkotnak.

A szoliditás fogalmának hiányossága, hogy nem minden K konvex testnek létezik szolid elhelyezése vagy fedése. Például ha K' a $2\pi/3$ szögű szabályos p-szögekkel való kövezés beírt köre, és K-t kis sapka rátételével kapjuk K'-ből, akkor K-nak nem léteznek szolid elhelyezései.

G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg [25] a $\mathbb{H}^n$-beli K konvex test egybevágó példányaival való elhelyezést teljesen telítettnek hívja, ha belőle véges sok példányt kivéve nem lehet eggyel több példányt visszatenni úgy, hogy elhelyezést kapjunk. Hasonlóan K egybevágó példányaival való fedést teljesen telítettnek hívja, ha belőle véges sok példányt kivéve nem lehet eggyel kevesebb példányt visszatenni úgy, hogy fedést kapjunk. A K bármely szolid maximális elhelyezése ill. minimális fedése teljesen telített (ha az elhelyezést nem nem lehet kiegészíteni újabb példánnyal, vagy a fedésnél minden példányra szükség van). G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg [25] sejtette, hogy bármely $\mathbb{H}^n$-beli K konvex test egybevágó példányaival létezik teljesen telített elhelyezés és szolid fedés. A sejtést L. Bowen és Ch. Radin [10] igazolta ergodikus elhelyezések felhasználásával (lásd 7. Fejezet).

Az euklidészi térben könnyen látható, hogy egy tetszőleges konvex test szolid vagy teljesen telített elhelyezése legsűrűbb, és szolid vagy teljesen telített fedése legritkább. Meglepő módon L. Bowen és Ch. Radin [10] módszereivel konstruálható olyan poliéder, melynek egybevágó példányaival egyrészt kövezhető $\mathbb{H}^n$, másrészt létezik olyan teljesen telített elhelyezése ill. fedése is, amelyek egyike sem kövezés. Sőt ennek a teljesen telített elhelyezésnek a sűrűsége bármely szóbajöhető értelemben kisebb, mint egy, ill. a fedés sűrűsége nagyobb, mint egy. Azaz a hiperbolikus térben teljesen telített elhelyezés nem biztos, hogy legsűrűbb, és teljesen telített fedés nem biztos, hogy legritkább, ellentétben az euklidészi térrel.

Egy másik, szintén Fejes Tóth Lászlótól eredő fogalom a szorosság (lásd L. Fejes Tóth [31] ekvivalens, de eltérő definíciójával). $\mathbb{H}^n$-ben K konvex test egybevágó példányaival való elhelyezés szorossága a példányok által kihagyott helybe írható gömbök sugarainak szuprémuma. Ha K egy r sugarú gömb, és a szorosság ρ, akkor $r+\rho$ a gömbközéppontok és a hozzájuk tartozó Dirichlet-Voronoj cellák csúcsai közötti távolságok szuprémuma. Ebből következik, hogy a sík a $2\pi/3$ szögű szabályos p szögekkel való kövezése, ill. $\mathbb{H}^4$-nek 120-cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezése a beírt körökkel ill. gömbökkel legkisebb szorosságú elhelyezést indukál.

Végül Molnár József vezette be a következő fogalmat (lásd például J. Horváth, Á.H. Temesvári [33]). Adott $R>r>0$ esetén, az r sugarú körök elhelyezése kielégíti a R tágassági feltételt, ha bármely körközépponttól a saját Dirichlet-Voronoj cellája csúcsai legalább R távolságra vannak. Legyenek p és q olyan pozitív egészek, melyek kielégítik (3)-t, tehát $\mathbb{H}^2$ kövezhető szabályos p-szögekkel és q-adfokú csúcsokkal. Legyen $r_{p,q}$ a p-szögek beírt köreinek a sugara, és $R_{p,q}$ a körülírt körök sugara. Ekkor az $r_{p,q}$ sugarú, $R_{p,q}$ tágassági feltételt kielégítő körelhelyezések közül a szabályos kövezés adja a legkisebb szorosságút. Ilyen módon bármely síkbeli szabályos kövezés szolgáltat extremális elhelyezést.

5. Sűrűségbecslések cellarendszerekre vonatkozóan

Adott $\mathbb{H}^n$-beli $\mathcal{G}$ gömbelrendezés és C konvex test esetén a $\mathcal{G}$ sűrűsége C-re vonatkozóan

$$\frac{\sum_{B\in G} V(B\cap C)}{V(C)} \tag{4}$$

(itt $\mathcal{G}$ véges is lehet). Legyen T egy szabályos szimplex $\mathbb{H}^n$-ben, és legyen $2r$ az élhossz, és R a körülírt gömb sugara. Ha T minden csúcsába r sugarú gömböt teszünk, akkor elhelyezést kapunk, és $\sigma(r)$-rel jelöljük ennek sűrűségét T-re vonatkozóan. Továbbá ha T minden csúcsába R sugarú gömböt teszünk, akkor a gömbök fedik T-t, és $\vartheta(R)$-rel jelöljük ennek sűrűségét T-re vonatkozóan. Az alábbiakban gömbelrendezésekről lesz szó, és a Dirichlet-Voronoj vagy Delone cellákat a gömbök középpontjaihoz rendeljük hozzá.

A hiperbolikus elrendezések vizsgálatát Fejes Tóth László kezdte (lásd klasszikus [28] könyvét). L. Fejes Tóth [27] belátta, hogy a hiperbolikus síkon r sugarú körök tetszőleges elhelyezése esetén az elhelyezés sűrűsége legfeljebb $\sigma(r)$ bármely Dirichlet-Voronoj cellára vontakozóan. Továbbá, ha a körök által kimaradó részbe nem lehet további r sugarú kört helyezni, akkor az elhelyezés sűrűsége legfeljebb $\sigma(r)$ bármely Delone cellára vontakozóan is. Ezeket az eredményeket az elhelyezésekre vonatkozó háromszögkorlátnak hívjuk. Ezek a becslések nyilván élesek, ha a körök a $2\pi/3$ szögű szabályos sokszögekkel való kövezés beírt körei (lásd 3. ábra). Más r esetén J. Molnár [45] javította kismértékben a háromszögkorlátot. Maga $\sigma(r)$ az r-nek monoton növekvő függvénye, melynek határértéke a végtelenben $\frac{3}{\pi}$. Továbbá, ha r nullához tart, akkor $\sigma(r)$ határértéke $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$, az euklidészi háromszögkorlát egybevágó körökkel való elhelyezésekre.

Egybevágó körök egyéb szabályos elhelyezéseit J. Molnár [46] vizsgálta. Különböző sugarú körök elhelyezéseire J. Molnár [47] adott becslések megfelelő cellákra vonatkozóan.

Magasabb dimenzióban Böröczky Károly látta be az ún. szimplexkorlátot H.S.M. Coxeter sejtését igazolva, lásd K. Böröczky és A. Florian [15] az $n = 3$ és K. Böröczky [13] az $n \geq 4$ esetben. Eszerint $\mathbb{H}^n$-beli r sugarú gömbök tetszőleges elhelyezése esetén az elhelyezés sűrűsége legfeljebb $\sigma(r)$ bármely Dirichlet-Voronoj cellára vontakozóan. Ha $n \geq 3$ akkor becslés pontosan akkor éles, ha $n = 4$, és az elhelyezés a 120-cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezés beírt gömbjeiből áll. Magasabb dimenzió esetén akkor ismert, hogy $\sigma(r)$ az r-nek monoton növekvő függvénye, ha $n = 3$ (lásd K. Böröczky és A. Florian [15]), vagy ha n nagyon nagy (lásd T.H. Marshall [42]).

Fedések esetén csak síkban léteznek eredmények, igaz, akkor kétféle definícóval is igazolásra került háromszögkorlát. Mindkét eredmény $\mathbb{H}^2$ tetszőleges r sugarú körökkel való fedése esetén a Delone háromszögeket tekinti, és persze feltesszük, hogy bármely kompakt halmaz csak véges sok kört metsz. A fenti (4) definíció szerint Böröczky K. [14] látta be, hogy a sűrűség legalább $\vartheta(r)$ bármely Delone cellára vonatkozóan. Ennek az eredménynek a bizonyítása igen bonyolult. Könyvében L. Fejes Tóth [28] egy egyszerűen bizonyítható, és sok alkalmazáshoz elégséges becslést látott be. Legyen T egy Delone háromszög, és legyenek

α, β, γ a háromszög szögei. Ekkor a T-hez hozzárendelt sűrűség az r sugarú kör α, β, γ szögű körcikkjeinek összterületének és T területének a hányadosa. Erről igazolta L. Fejes Tóth [28] hogy legalább $\vartheta(r)$. Maga $\vartheta(r)$ az r-nek monoton csökkenő függvénye L. Fejes Tóth [28] szerint, melynek határértéke a végtelenben $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$. Továbbá, ha r nullához tart, akkor $\vartheta(r)$ határértéke $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$, az euklidészi háromszögkorlát egybevágó körökkel való fedésekre.

6. Sűrűségbecslések véges elhelyezésekre és fedésekre

A Dirichlet-Voronoj és a Delone cellarendszerekre való becslések elvezetnek véges térfogatú hiperbolikus sokaságokon való gömbelhelyezésekre és fedésekre való sűrűségbecslésekhez. Bármely X n-dimenziós hiperbolikus sokasághoz létezik egy $\pi : \mathbb{H}^n \to X$ szürjektív leképezés, mely bármely $p \in \mathbb{H}^n$ egy kis környezetében izometria πp egy környezetére. Másszóval X valamely diszrét szimmetriacsoport szerinti faktora a $\mathbb{H}^n$-nek, és π a hányadosleképezés. Egy X-be ágyazott r sugarú gömbön valamely $B(x,r) \subset \mathbb{H}^n$ képét értjük, amennyiben π injektív $B(x,r)$ belsején.

Elhelyezések esetén legyen X egy tetszőleges n dimenziós véges térfogatú hiperbolikus sokaság. Az előző fejezetbeli Fejes Tóth-féle háromszögkorlátból illetve a Böröczky-féle szimplexkorlátból következik, ha X tartalmaz k darab elhelyezést alkotó r sugarú beágyazott gömböt, akkor $V(X) \geq k \cdot V(B(x,r))/\sigma(r)$. T.H. Marshall [42] belátta, hogy $\sigma(r) \geq 2^{-0.5n+o(n)}$. Másrészt G.A. Kabatjanskii, V.I. Levenšteĭn [35] becsléséből következik, hogy $V(X) \geq k \cdot V(B(x,r)) \cdot 2^{0.599n+o(n)}$, mely ezek szerint erősebb becslés a szimplexkorlátnál nagy n-re.

A szimplex korlát esetén egyenlőség, azaz $V(X) = k \cdot V(B(x,r))/\sigma(r)$ a következő esetekben teljesül. Ha $n = 2$, és a körelhelyezés a $2\pi/3$ szögű szabályos sokszögekkel való kövezés beírt köreiből származik, vagy $n = 4$, és a gömbelhelyezés a 120 cellákkal való $(5,3,3,3)$ kövezés beírt gömbjeiből származik.

Fedések esetén csak a két dimenziós esetben ismert becslés. Ha X egy kompakt hiperbolikus felület, mely lefedhető k beágyazott r sugarú körrel, akkor Böröczky K. [14] vagy L. Fejes Tóth [28] háromszögbecsléséből is következik, hogy X felszíne legfeljebb $k \cdot V(B(x,r))/\vartheta(r)$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a körfedés a $2\pi/3$ szögű szabályos sokszögekkel való kövezés körülírt köreiből származik.

A kétdimenziós körelhelyezéses és körfedéses eredmények közös általánosítása az ún. Momentum Tétel hiperbolikus felületeken (lásd B. Orvos–Nagyné Farkas [51]).

A hiperbolikus sokaságokon való gömbelhelyezésekre adott szimplexkorlátnak jelentős szerepe van e sokaságok térfogatára adott alsó becslésekben. Egy X véges térfogatú sokaság ρ injektivitási sugara a maximális sugara az X-be beágyazható gömböknek. A szimplexkorlát szerint $V(X) \geq V(B(x,\rho))/\sigma(\rho)$. Itt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 2$, és X egy $2\pi/3$ szögű szabályos $6m$-szög, $m \geq 2$, oldalazonosításaiból származik. A megfelelő oldalazonosítások létezését C. Bavard [2] látta be. Általában az injektivitási sugarat könnyebb becsülni, mint a térfogatot. Így a Böröczky-féle szimplex korlát igen sok esetben vezetett rendkívül jó alsó korláthoz hiperbolikus sokaságok térfogatára, akár a minimumot is megadva a megfelelő sokaságosztályban (lásd például C. Adams [1], ill. R. Kellerhals [36] és [37]).

A továbbiakban $\mathbb{H}^n$-beli véges elrendezések sűrűségét vizsgáljuk. Tetszőleges dimenzióban csak Molnár J. [44] eredménye ismert. Ha P egy $\mathbb{H}^n$-beli poliéder, akkor tetszőleges F $(n-2)$-lapjánál fekvő dihedrális szög az F-t tartalmazó két hiperlap belső szöge. Ha a P poliéderben minden dihedrális szöge legfeljebb $2\pi/3$, akkor [44] módszere szerint r sugarú gömbök bármely P-beli elhelyezésének sűrűsége P-re vonatkozóan legfeljebb $\sigma(r)$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha egy P-beírt gömbünk van, és vagy $n = 2$, és P egy $2\pi/3$ szögű szabályos sokszög, vagy $n = 4$, $\operatorname{ch} r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, és P egy szabályos 120 cella. Az eredmény a Fejes Tóth-féle háromszögkorlát illetve a Böröczky-féle szimplexkorlát egyszerű alkalmazása.

Végül hiperbolikus síkbeli eredményeket tekintünk. K. Bezdek [5] látta be, ha egy kör tartalmaz legalább két r sugarú kört, akkor az r sugarú körök sűrűsége a nagy körhöz képest legfeljebb $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$. A becslés nem mindig teljesül tetszőleges konvex síkidomban vett körelhelyezésre nagy r esetén, de K. Bezdek [6] talált egy elég általános családját konvex síkidomnak, amelyekben teljesül a becslés (lásd még K. Böröczky, Jr. [16]). Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus háromszögkorlát $\sigma(r)$ nagyobb $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$-nél, az euklidészi háromszögkorlátnál elhelyezésekre. Másrészt K. Böröczky, Jr. [18] mutatta meg, ha egy kört lefed legalább két r sugarú kör, akkor az r sugarú körök összterületének és a lefedett kör területének hányadosa legalább $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$. Ez az eredmény is általánosítható megfelelő konvex síkidom fedésére, de nem teljesül tetszőleges konvex síkidom fedésére nagy r esetén. Megjegyezzük a hiperbolikus háromszögkorlát $\vartheta(r)$ kisebb $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$-nél, az euklidészi háromszögkorlátnál fedésekre. Nyitott probléma, hogy ha a (4) definíciót használjuk egy körnek legalább két r sugarú körrel való fedésére, akkor az r sugarú körök sűrűsége a lefedett körre vonatkozóan legalább $\vartheta(r)$-e.

7. Periódikus és ergodikus elrendezések sűrűsége

Legyen K konvex test $\mathbb{R}^n$-ben. Ebben a fejezetben olyan eredményeket tárgyalunk, melyek mégis lehetővé teszik egy az euklidészihez hasonló sűrűség fogalom használatát, ha legalább speciális elrendezésekre is.

Legyen $\mathcal{C}$ egy periódikus elrendezés K egybevágó példányaival, és legyen X egy olyan kompakt hiperbolikus sokaság, mely $\mathcal{C}$ szimmetriacsoportjának egy Γ részcsoportja határoz meg. Feltehető, hogy a hányadosleképezés $\mathcal{C}$ bármely elemén injektív (lásd G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg [25]). Ha Γ a $\mathcal{C}$ elemeit k ekvivalenciaosztályba osztja, akkor analitikus ezközökkel bizonyítható (lásd például P.D. Lax és R.S. Phillips [38]), hogy bármely rögzített x-re

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))} = \frac{kV(K)}{V(X)}. \tag{5}$$

Bár a síkbeli esetben a periódikusság nem tűnik túl nagy megszorításnak, a periódikus elrendezések igen "kevesen vannak" a magas dimenziós terekben. A teret "egyenletesen betöltő" elrendezések megfelelő osztályát Lewis Bowen és Charles Radin találta meg. Elég nagy $R,N>0$-ra, legyen Z a K példányaival való azon elrendezések halmaza, melyek bármely pontot legfeljebb N-szer fednek, és melyek komplementere nem tartalmaz R sugarú gömböt. Bár maga a tér persze függ az R,N megválasztásától, de a fő eredmények nem. L. Bowen és Ch. Radin [9] Z-n olyan topológiát definiál, melyben a tér kompakt, és rajta a $\mathbb{H}^n$ tér G^n szimmetriacsoportjának természetes hatása folytonos.

Rögzítünk egy $o\in\mathbb{H}^n$ pontot, és definiáljuk az $\omega : Z\to\mathbb{Z}$ függvény a

$$\omega(\mathcal{C}) = \#\{G\in\mathcal{C} : o\in G\}$$

formulával. Az o választása nem befolyásolja az alábbi állítások helyességét. Egy Z-n értelmezett μ Borel mértéket ergodikusnak hívunk, ha $\mu(Z)=1$ (azaz μ valószínűségi mérték), μ invariáns G^n hatására, és bármely G^n invariáns $A\subset Z$ esetén vagy $\mu(A)=0$, vagy $\mu(A)=1$. Könnyen látható, hogy az X-n értelmezett invariáns valószínűségi mértékek konvex halmazának extremális pontjai ergodikusak. Bármely periodikus $\mathcal{C}\in Z$ definiál egy $\mu_{\mathcal{C}}$ ergodikus mértéket a következő tulajdonsággal. Legyen X egy olyan kompakt hiperbolikus sokaság, mely $\mathcal{C}$ szimmetriacsoportjának egy Γ részcsoportja határoz meg. Ha Γ a $\mathcal{C}$ elemeit k ekvivalenciaosztályba osztja, akkor

$$\int_Z \omega\, d\mu_{\mathcal{C}} = \frac{kV(K)}{V(X)}. \tag{6}$$

Megjegyzzük, hogy $\mu_{\mathcal{C}}$ tartója a $\mathcal{C}$-vel egybevágó elrendezésekből áll. A. Nevo [48] és A. Nevo és E.M. Stein [49] eredményeit felhasználva L. Bowen és Ch. Radin [9] bizonyítja, ha $\mathcal{C} \in Z$ egy μ ergodikus mérték tartójába esik, akkor bármely rögzített x-re

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))} = \int_Z \omega\, d\mu.$$

Tehát (6) szerint periodikus elrendezésekre visszakapjuk (5)-t. De mindjárt meglátjuk, az új elmélet sok olyan érdekes tulajdonságú elrendezést szolgáltat, melyeket nem találunk meg a periodikusak között.

Legyen Z_e és Z_f a Z-beli elhelyezések ill. fedések tere. Továbbá jelöljük $\mathcal{M}(Z_e)$ és $\mathcal{M}(Z_f)$-fel azon ergodikus mértékek halmazát, melyek tartója Z_e-be ill. Z_f-be esik. L. Bowen és Ch. Radin [9] azt is belátta, hogy létezik

$$\delta_{\mathrm{erg}}(K) = \max_{\mu\in\mathcal{M}(Z_e)} \int_Z \omega\, d\mu \tag{7}$$

$$\vartheta_{\mathrm{erg}}(K) = \min_{\mu\in\mathcal{M}(Z_f)} \int_Z \omega\, d\mu. \tag{8}$$

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{C} \in Z_e$ optimális elhelyezés az ergodikus sűrűségre nézve, ha benne van egy olyan $\mu \in \mathcal{M}(Z_e)$ ergodikus mérték tartójában, mely egyenlőséget szolgáltat (7)-ben. Tehát ha $\mathcal{C} \in Z$ optimális elhelyezés az ergodikus sűrűségre nézve, akkor bármely rögzített x-re

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))} = \delta_{\mathrm{erg}}(K).$$

Továbbá egy $\mathcal{C} \in Z_f$ optimális fedés az ergodikus sűrűségre nézve, ha benne van egy olyan $\mu \in \mathcal{M}(Z_f)$ ergodikus mérték tartójában, mely egyenlőséget szolgáltat (8)-ben. Tehát ha $\mathcal{C} \in Z$ optimális fedés az ergodikus sűrűségre nézve, akkor bármely rögzített x-re

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{G\in\mathcal{C}} V(G\cap B(x,r))}{V(B(x,r))} = \vartheta_{\mathrm{erg}}(K).$$

L. Bowen és Ch. Radin [10] azt is belátta, ha $\mathcal{C} \in Z$ optimális elhelyezés vagy fedés az ergodikus sűrűségre nézve, akkor teljesen telített (lásd 4. Fejezet).

L. Bowen és Ch. Radin [9] szerint létezik olyan megszámlálható halmaz, hogy ha K egy ρ sugarú gömb $\mathbb{H}^n$-ben, és ρ nem esik ebbe a halmazba, akkor legfeljebb egyetlen az ergodikus sűrűségre nézve optimális elhelyezés vagy fedés sem periodikus. Másrészt, ha $n = 2$ és K kör, akkor L. Bowen [8] belátta, hogy (tetszőleges sugár esetén) $\delta_{\rm erg}(K)$ a K periódikus elhelyezéseinek (6) szerinti sűrűségeinek szuprémuma. Továbbá $n = 2$ és K kör esetén az ergodikus sűrűségre nézve optimális elhelyezések egybevágóak (lásd L. Bowen, C. Holton, C. Radin, L. Sadun [11]).

Bár az ergodikus sűrűségfogalom elégséges "szép" elrendezést szolgáltat, azért vannak hiányosságai. Legyen K egy olyan konvex poliéder, mellyel egybevágóság erejéig pontosan egyféleképpen lehet kövezni $\mathbb{H}^n$-t, és a kövezés nem periódikus. Ekkor azt várnánk, hogy optimális elhelyezési vagy fedési sűrűsége 1. Másrészt L. Bowen és Ch. Radin [10] módszerei mutatják, hogy

$$\delta_{\rm erg}(K) < 1 < \vartheta_{\rm erg}(K).$$

Köszönetnyilvánítás: Ezúton köszönöm meg Molnár Emilnek, Moussong Gábornak és Wintsche Gergelynek a hathatós segítséget.

Hivatkozások

[1] C. Adams: The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimum volume. Proc. AMS, 100 (1987), 601–606.

[2] C. Bavard: Disques extrémaux et surfaces modulaires. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 5 (1996), 191–202.

[3] C. Bavard, K.J. Böröczky, B. Orvos–Nagyné Farkas, I. Prok, L. Vena, G. Wintsche: Regularly triangulated hyperbolic surfaces. készülő kézirat.

[4] A. Bezdek: Solid packing of circles in the hyperbolic plane. Studia Sci. Math. Hungar. 14 (1979), 203–207

[5] K. Bezdek: Ausfüllungen eines Kreises durch kongruente Kreise in der hyperbolische Ebene. Studia Sci. Math. Hung., 17 (1982), 353–366.

[6] K. Bezdek: Ausfüllungen in der hyperbolische Ebene durch endliche Anzahl kongruente Kreise. Ann. Univ. Sci. Budapest, 27 (1984), 113–124.

[7] F. Bolyai: Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae, Elementaris Ac Sublimioris, Methodo Intuituitiva, Evidentiaque Huic Propria, Introducendi. First edition, 1832-33; Second edition, 1904.

[8] L. Bowen: Circle packing in the hyperbolic plane. Math. Phys. Electron. J., 6:paper No. 6, 2000.

[9] L. Bowen, Ch. Radin: Densest packing of equal spheres in hyperbolic space. Disc. Comp. Geom., 29 (2003), 23–29.

[10] L. Bowen, Ch. Radin: Optimally dense packings of hyperbolic space. Geom. Dedicata, 104 (2004), 37–59.

[11] L. Bowen, C. Holton, C. Radin, L. Sadun: Uniqueness and symmetry in problems of optimally dense packings. Math. Phys. Electron. J. 11(2005), Paper 1, 34pp. (electronic).

[12] Böröczky K.: Gömbelhelyezések állandó görbületű terekben, I. Mat. Lapok, 25 (1974), 265–306.

[13] K. Böröczky: Packing of spheres in spaces of constant curvature. Acta Math. Hungar., 32 (1978), 243–261.

[14] Böröczky K.: Körfedések hiperbolikus síkon. készülő kézirat.

[15] K. Böröczky, A. Florian: Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum. Acta Math. Hungar., 15 (1964), 237–245.

[16] K. Böröczky, Jr.: Discrete point sets in the hyperbolic plane. Studia Sci. Math. Hung., 39 (2002), 21–36.

[17] K. Böröczky, Jr.: Finite packing and covering. Cambridge University Press, 2004.

[18] K. Böröczky, Jr.: Finite coverings in the hyperbolic plane. Disc. Comp. Geom., 33 (2005), 165–180.

[19] H.S.M. Coxeter: Regular polytopes. Third edition. Dover Publications, Inc., New York, 1973.

[20] H.S.M. Coxeter: Non-Euclidean geometry. Sixth edition. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1998.

[21] M.W. Davis: A hyperbolic 4-manifold. Proc. Amer. Math. Soc., 93 (1985), 325–328.

[22] B.N. Delone: Sur la sphère vide. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. Ser., (1934), 793–800.

[23] G.L. Dirichlet: Über die Reduction der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. J. reine angew. Math., 40 (1850), 216–219.

[24] G. Fejes Tóth: Solid sets of circles. Studia Sci. Math. Hungar., 9 (1974), 101–109.

[25] G. Fejes Tóth, G. Kuperberg, W. Kuperberg: Highly saturated packings and reduced coverings. Monats. Math., 125 (1998), 127–145.

[26] G. Fejes Tóth, W. Kuperberg: Packing and covering. In: Handbook of Convex Geometry, P.M. Gruber, J.M. Wills (eds.), North Holland, 1993, 799-860.

[27] L. Fejes Tóth: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 4 (1953), 103–110.

[28] L. Fejes Tóth: Regular Figures. Pergamon Press, 1964.

[29] L. Fejes Tóth: Solid circle-packings and circle-coverings. Studia Sci. Math. Hungar., 3 (1968), 401–409.

[30] L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1972.

[31] L. Fejes Tóth: Remarks on the closest packing of convex discs. Comment. Math. Helv., 53 (1978), 536–541.

[32] L. Fejes Tóth: Solid packing of circles in the hyperbolic plane. Studia Sci. Math. Hungar., 15 (1980), 299–302.

[33] J. Horváth, Á.H. Temesvári: Einige Extremumaufgaben für D-V Zellensysteme von diskreten Punktsystemen. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 46 (2003), 3–18.

[34] M. Imre. Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung: Acta Math. Hungar., 15 (1964), 115–121.

[35] G.A. Kabatjanskii, V.I. Levenšteĭn: Bounds for packings on a sphere and in a space. Problems. Inform. Transmission, 14 (1978), 1–17.

[36] R. Kellerhals: Regular simplices and lower volume bounds for hyperbolic n-manifolds. Ann. Global Anal. Geom., 13 (1995), 377–392.

[37] R. Kellerhals: Ball packings in spaces of constant curvature and the simplicial density function. Dedicated to Martin Kneser on the occasion of his 70th birthday. J. Reine Angew. Math., 494 (1998), 189–203.

[38] P.D. Lax, R.S. Phillips: The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces. Internat. Ser. umer. Math., 60, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., (1981), 373–383.

[39] Z. Lučić, E. Molnár: Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings. Geom. Dedicata 40 (1991), 125–143.

[40] V.S. Makarov. On a nonregular partition of an n-dimensional Lobachevskiĭspace by congruent polytopes. Proc. Steklov Inst. Math., (1992), 103–106. (Trudy Mat. Inst. Steklov., 196 (1991), 93–96.)

[41] G.A. Margulis, S. Mozes: Aperiodic tilings of the hyperbolic plane by convex polygons. Israel J. Math. 107 (1998), 319–325.

[42] T.H. Marshall: Asymptotic volume formulae and hyperbolic ballpacking. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 24 (1999), 31–43.

[43] Molnár E., Prok I., Szirmai J.: Szimmetrikus kövezések végtelen sorozata a hiperbolikus térben. Mat. Lapok, ezen kötet.

[44] J. Molnár: Estensione del teorema di Segre-Mahler allo spazio. (Italian) Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 35 (1963), 166–168.

[45] J. Molnár: Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung. Math. Ann. 158 (1965), 365–376.

[46] J. Molnár: Collocazioni di cerchi con esigenza di spazio. (Italian) Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 9 (1966), 71–86.

[47] J. Molnár: Kreispackungen und Kreisüberdeckungen auf Flächen konstanter Krümmung. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 18 (1967), 243–251.

[48] A. Nevo: Pointwise ergodic theorems for radial averages on simple Lie groups. I. Duke Math. J., 76 (1994), 113–140.

[49] A. Nevo, E.M. Stein: Analogs of Wiener's ergodic theorems for semisimple groups. I. Ann. of Math. (2), 145 (1997), 565–595.

[50] L. Németh: On the 4-dimensional hyperbolic hypercube mosaic. Publ. Math. Debrecen, 70 (2007), 291–305.

[51] B. Orvos–Nagyné Farkas: The hyperbolic momentum theorem and its stability. kézirat.

[52] J.G. Ratcliffe: Foundations of hyperbolic manifolds. Springer, 1994.

[53] J.G. Ratcliffe, S. Tschantz: On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology Appl., 111 (2001), 327–342.

[54] C.A. Rogers: Packing and covering. Cambridge University Press, 1964.

[55] J. Szirmai: The optimal ball and horoball packings to the Coxeter honeycombs in the hyperbolic d-space. Beitr. Algebra Geom., 48 (2007), 35-47.

[56] I. Vermes: Über die Parkettierungsmöglichkeit des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes durch kongruente Polyeder. Studia Sci. Math. Hungar., 7 (1972), 267–278.

[57] G.F. Voronoi: Deuxième Mémoire. Recherches sur les parallélloèdres primitifs. J. reine angew. Math., 134 (1908), 198–287.

ifj. Böröczky Károly
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
és ELTE TTK Geometria tsz.
carlos@renyi.hu