JEGYZET

Geometria 2., tanárszak

Hálás köszönet a segítségért Marosi Pollának, Kiss Györgynek, Lakos Gyulának, Tóth Árpádnak, Wintsche Gergőnek.

Felhasznált fogalmak

Felhasználjuk a valós vektortér és mátrix fogalmát, és azok szorzását illetve determinánsát. A síkot úgy tekintjük, mint a két dimenziós valós vektortér $\mathbb{R}^2$, a teret pedig, mint a három dimenziós valós vektortér $\mathbb{R}^3$. Az origót mint pontot O, mint nullvektort $\bar{o}$ jelöli. Hasonlóan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ vektorokhoz rendelt pontot a megfelelő nagybetűvel, $A, B, C, \ldots$-vel jelöljük (pl. $\bar{a}$ a A "helyvektora"). Számokat görög betűk vagy kisbetűk jelölnek.

Contents

1 Alap fogalmak: pont, egyenes, sík

Definíció Az A térbeli vagy síkbeli pontból a B pontba mutató vektor $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$.

Megjegyzés A geometria számára a vektortérstruktúra csak segédezköz, mert minden pont "egyenrangú". Másszóval bármelyik síkbeli ill. térbeli pontot kinevezhetjük origónak, és akkor az abból a pontból a többibe mutató vektorok adnak egy új vektortér struktúrát.

Definíció *(Koordináták)*

- *Sík:* Rögzítünk független $\bar{i}$ és $\bar{j}$ vektorokat ("bázis vektorok"). Ha $\bar{x} = t\bar{i} + s\bar{j}$ valamely $t, s \in \mathbb{R}$-re, akkor az X ill. $\bar{x}$ koordinátái (t, s).
- *Tér:* Rögzítünk független $\bar{i}$, $\bar{j}$ és $\bar{k}$ vektorokat ("bázis vektorok"). Ha $\bar{x} = t\bar{i} + s\bar{j} + r\bar{k}$ valamely $t, s, r \in \mathbb{R}$-re, akkor az X ill. $\bar{x}$ koordinátái $X = (t, s, r)$.

Definíció *(Egyenes)* Adott térbeli vagy síkbeli A pont és $\bar{v} \neq \bar{o}$ vektor által meghatározott egyenes helyvektorai

$$\{\bar{a} + t\bar{v} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma Bármely két $B \neq C$ ponton pontosan egy egyenes megy át (az ún. BC egyenes), mely pontjainak helyvektorai

$$\{\bar{b} + t(\bar{c} - \bar{b}) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Definíció *(Sík)* Adott térbeli A pont és független $\bar{v}$ és $\bar{w}$ vektorok által meghatározott sík helyvektorai

$$\{\bar{a} + t\bar{v} + s\bar{w} : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma Bármely három nem egy egyenesen fekvő térbeli B, C, D pontot pontosan egy sík tartalmaz (az ún. BCD sík), mely pontjainak helyvektorai

$$\{\bar{b} + t(\bar{c} - \bar{b}) + s(\bar{d} - \bar{b}) : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma Ha A, B, C térbeli pontok nincsenek egy egyenesen, akkor D pontosan akkor van az ABC síkon, ha $\det[\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}] = 0$.

Tétel Az A, B, C síkbeli vagy térbeli pontok pontosan akkor vannak egy egyenesen, ha $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, ahol $\alpha + \beta = 1$. Továbbá α, β egyértelmű.

Tétel Ha A, B, C térbeli pontok nincsenek egy egyenesen, akkor D pontosan akkor van az ABC síkon, ha $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, ahol $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Továbbá α, β, γ egyértelmű.

Tétel Ha A, B, C, D térbeli pontok nincsenek egy síkban, akkor tetszőleges P ponthoz egyértelműen léteznek $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, melyekre

$$\bar{p} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \delta\bar{d} \;\text{ és }\; \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1.$$

Tétel Ha A, B, C síkbeli pontok nincsenek egy egyenesen, és $\bar{p} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, ahol $\alpha + \beta + \gamma = 1$ és $\beta + \gamma \neq 0$, akkor AP egyenes abban a Q pontban metszi a BC egyenest, melyre $\bar{q} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\,\bar{b} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\,\bar{c}$.

Bizonyítás Legyen

$$\bar{q} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\,\bar{b} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\,\bar{c}.$$

Miután $\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} = 1$, a Q pont rajta van a BC egyenesen. Másrészt $1 - \alpha = \beta + \gamma$-ből következik, hogy

$$\alpha\,\bar{a} + (1-\alpha)\bar{q} = \alpha\,\bar{a} + (\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}\,\bar{b} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\,\bar{c}\right) = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{p}.$$

Vagyis A, P, Q egy egyenesen helyezkedik el, tehát Q az AP és BC egyenesek metszéspontja. $\square$

Tétel Ha A, B, C, D térbeli pontok nincsenek egy síkban, és $\bar{p} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \delta\bar{d}$, ahol $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ és $\beta + \gamma + \delta \neq 0$, akkor AP egyenes abban a Q pontban metszi a BCD síkot, melyre

$$\bar{q} = \tfrac{\beta}{\beta+\gamma+\delta}\,\bar{b} + \tfrac{\gamma}{\beta+\gamma+\delta}\,\bar{c} + \tfrac{\delta}{\beta+\gamma+\delta}\,\bar{d}.$$

Definíció *(Szakasz)* Tetszőleges $A \neq B$ térbeli vagy síkbeli pontokra az $[A, B]$ szakasz pontjainak helyvektorai

$$\begin{aligned}\{\bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) : t \in [0,1]\} &= \{(1-t)\bar{a} + t\bar{b} : t \in [0,1]\}\\ &= \{\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} : \alpha + \beta = 1 \text{ és } \alpha, \beta \geq 0\}.\end{aligned}$$

Megjegyzés Az $[A, B]$ szakasz része az AB egyenesnek, és A és B a szakasz végpontjai.

Definíció *(Félegyenes)* Tetszőleges $A \neq B$ térbeli vagy síkbeli pontokra az A kezdőpontú, B-n áthaladó félegyenes pontjainak helyvektorai

$$\begin{aligned}\{\bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) : t \geq 0\} &= \{(1-t)\bar{a} + t\bar{b} : t \in [0,1]\}\\ &= \{\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} : \alpha + \beta = 1 \text{ és } \beta \geq 0\}.\end{aligned}$$

Megjegyzés Tetszőleges $A \neq B$ térbeli vagy síkbeli pontok az AB egyenest az $[A, B]$ szakaszra és két félegyenesre osztják.

2 Skaláris szorzat

Definíció Az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ skaláris szorzata

- **síkban** $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, ha $\bar{a} = (a_1, a_2)$ és $\bar{b} = (b_1, b_2)$;
- **térben** $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, ha $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Megjegyzés Az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ térbeli vagy síkbeli vektorok skaláris szorzata kielégíti a következő tulajdonságokat:

- $\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0$, egyenlőség pontosan akkor, ha $\bar{a} = \bar{o}$;
- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
- $(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) \cdot \bar{c} = \alpha\bar{a} \cdot \bar{c} + \beta\bar{b} \cdot \bar{c}$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definíció Az $\bar{a}$ térbeli vagy síkbeli vektor hossza $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}$.
Megjegyzés Síkban, ha $\bar{a} = (t, s)$, akkor $|\bar{a}| = \sqrt{t^2 + s^2}$.
Térben, ha $\bar{a} = (t, s, r)$, akkor $|\bar{a}| = \sqrt{t^2 + s^2 + r^2}$.

Lemma *(Vektorhossz tulajdonságai)*

- $|\bar{a}| \geq 0$, egyenlőség pontosan akkor, ha $\bar{a} = \bar{o}$;
- $|\lambda\bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$;
- *Háromszög-egyenlőtlenség:* $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\bar{a} = \bar{o}$, $\bar{b} = \bar{o}$ vagy $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ valamely $\lambda > 0$-ra.

Megjegyzés Az első kettő egyszerű, a harmadikat túloldalt bizonyítom.

Definíció A és B pontok *távolsága* $AB = |\bar{b} - \bar{a}|$. Másszóval AB-t az $[A, B]$ szakasz hosszának is hívjuk.

Lemma *(Távolság tulajdonságai)*

- $AB \geq 0$, egyenlőség pontosan akkor, ha $A = B$;
- $BA = AB$;
- *Háromszög-egyenlőtlenség:* $AB \leq AC + CB$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $C \in [A, B]$.

Bizonyítás Nyilván $AB = |\bar{b} - \bar{a}| \geq 0$. Ha $AB = 0$, akkor $\bar{b} - \bar{a} = 0$, azaz $A = B$. A második tulajdonsághoz

$$BA = |\bar{a} - \bar{b}| = |(-1)(\bar{b} - \bar{a})| = |-1| \cdot |\bar{b} - \bar{a}| = AB.$$

Végül a harmadik tulajdonság:

$$AB = |\bar{b} - \bar{a}| = |(\bar{b} - \bar{c}) + (\bar{c} - \bar{a})| \leq |\bar{b} - \bar{c}| + |\bar{c} - \bar{a}| = CB + AC.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A = C$ vagy $B = C$, avagy $\bar{c} - \bar{a} = \lambda(\bar{b} - \bar{c})$ valamely $\lambda > 0$-ra. Az utolsó feltétel $C \in [A, B]$-vel ekvivalens. □

Megjegyzés Ha $a > 0$, akkor az $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ egyenlet gyökei $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Itt $D = b^2 - 4ac$ a diszkrimináns. Ha $D > 0$, akkor két gyök van (és $f(\lambda) < 0$ a két gyök között), ha $D = 0$, akkor egy gyök van (és $f(\lambda) \geq 0$), és ha $D < 0$, akkor nincs gyök (és $f(\lambda) > 0$).

Lemma *(Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség)* $\bar{a} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\bar{a} = \bar{o}$, $\bar{b} = \bar{o}$ vagy $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ valamely $\lambda > 0$-ra.
Megjegyzés Továbbá $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$ is teljesül.

Bizonyítás Ha $\bar{a} = \bar{o}$ vagy $\bar{b} = \bar{o}$, akkor mindkét oldal 0, tehát feltehetjük, hogy $\bar{a} \neq \bar{o}$ és $\bar{b} \neq \bar{o}$.

Legyen $f(\lambda) = (\bar{a} - \lambda\bar{b}) \cdot (\bar{a} - \lambda\bar{b})$, azaz $f(t) \geq 0$ bármely $\lambda \in \mathbb{R}$-re. Miután a skaláris szorzat alaptulajdonságai miatt

$$f(\lambda) = (\bar{b} \cdot \bar{b}) \cdot \lambda^2 - 2(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \lambda + \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{b}|^2 \cdot \lambda^2 - (2\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \lambda + |\bar{a}|^2.$$

egy másodfokú polinom, mely diszkriminánsa $(2\bar{a} \cdot \bar{b})^2 - 4|\bar{b}|^2|\bar{a}|^2 \leq 0$. Ebből 4-gyel való osztás és gyökvonás után kapjuk, hogy $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, amiből $t \leq |t|$ miatt adódik a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget.

Ha $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ valamely $\lambda > 0$-ra, akkor teljesül az egyenlőség a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségben. Másrészt, ha egyenlőség áll fenn a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségben, akkor a diszkrimináns 0, tehát $f(\lambda) = 0$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re. Ebből következik, hogy $\bar{a} - \lambda\bar{b} = \bar{o}$, azaz $\bar{a} = \lambda\bar{b}$. Miután a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségben a jobb oldal pozitív, ezért a bal oldal is, tehát $\lambda > 0$. □

Vektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség bizonyítása: A háromszög-egyenlőtlenség írható $|\bar{a} + \bar{b}|^2 \leq (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2$ alakba, melyet kifejtve adódik

$$\bar{a} \cdot \bar{a} + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| + |\bar{b}|^2.$$

Egyszerűsítés mutatja, hogy az utolsó egyenlőtlenség ekvivalens a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséggel, az egyenlőség esetét is beleértve. □

Definíció Síkbeli $\bar{u}$ és $\bar{v}$ vektorok ortonormált bázist alkotnak, ha $|\bar{u}| = |\bar{v}| = 1$ és $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$. Továbbá térbeli $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ és $\bar{u}_3$ vektorok ortonormált bázist alkotnak, ha $|\bar{u}_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, és $\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = 0$, ha $i \neq j$.

Megjegyzés Egy ortonormált bázis ténylegesen bázisa a vektortérnek. Ha a síkbeli esetben $\bar{u}$ és $\bar{v}$ ortonormált bázist alkotnak, $\bar{a} = \alpha_1\bar{u} + \alpha_2\bar{v}$, és $\bar{b} = \beta_1\bar{u} + \beta_2\bar{v}$, akkor

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (\alpha_1\bar{u} + \alpha_2\bar{v}) \cdot (\beta_1\bar{u} + \beta_2\bar{v}) = \\ &= \alpha_1\beta_1\bar{u} \cdot \bar{u} + \alpha_1\beta_2\bar{u} \cdot \bar{v} + \alpha_2\beta_1\bar{v} \cdot \bar{u} + \alpha_2\beta_2\bar{v} \cdot \bar{v} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2. \end{aligned}$$

Ha a térbeli esetben $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ és $\bar{u}_3$ ortonormált bázist alkotnak, $\bar{a} = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \alpha_3\bar{u}_3$, és $\bar{b} = \beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2 + \beta_3\bar{u}_3$, akkor

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \sum_{i=1,2,3;\, j=1,2,3} \alpha_i\beta_j \cdot \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\beta_i \cdot \bar{u}_i \cdot \bar{u}_i = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Tehát a skaláris szorzat nem függ az ortonormált bázis megválasztásától.

Definíció Az $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{o}$ vektorok szöge az a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség szerint létező $\alpha \in [0, 1]$, melyre

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha.$$

Megjegyzés Ezek szerint $t\bar{a}$ és $s\bar{b}$ szöge is α bármely $t, s > 0$ esetén, és $\bar{a}$ és $-\bar{b}$ szöge a kiegészítő szög, azaz $\pi - \alpha$.

Lemma Ha $\bar{u}$, $\bar{v}$ a sík egy ortonormált bázisa, és egy $\bar{a}$ egységvektor $\alpha \in [0, \pi]$ szöget zár be $\bar{u}$-val, akkor $\bar{a} = \bar{u}\cos\alpha + \bar{v}\sin\alpha$ vagy $\bar{a} = \bar{u}\cos\alpha - \bar{v}\sin\alpha$.
Megjegyzés Az első esetben, az adott irányítás mellett az $\bar{a}$ és $\bar{u}$ irányított szöge α, a második esetben $-\alpha$.

Definíció $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorokat *párhuzamosnak* mondjuk, ha $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ vagy $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re. Továbbá $\bar{a}$ és $\bar{b}$ merőleges, ha $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Lemma *(Vektorra merőleges és azzal párhuzamos vetület)* Adott $\bar{a}$ és $\bar{b} \neq \bar{o}$ vektorokhoz egyértelműen léteznek $\bar{b}'$ és $\bar{b}''$ vektorok, melyekre $\bar{b} = \bar{b}' + \bar{b}''$, $\bar{b}'$ párhuzamos $\bar{a}$-val, és $\bar{b}''$ merőleges $\bar{a}$-ra. Továbbá

$$\bar{b}' = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|^2} \cdot \bar{a}.$$

Lemma Ha $\bar{v} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{w}$ valamely $\lambda, \mu > 0$-ra és $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \neq \bar{o}$-ra, továbbá $\bar{u}$ és $\bar{v}$ szöge α, $\bar{v}$ és $\bar{w}$ szöge β, és $\bar{u}$ és $\bar{w}$ szöge γ, akkor $\gamma = \alpha + \beta$.

Bizonyítás Feltehetjük, $|\bar{u}| = |\bar{v}| = |\bar{w}| = 1$. Válasszuk úgy a $\bar{v}'$ egységvektort, hogy $\bar{v}$, $\bar{v}'$ a sík egy ortonormált bázisát alkossa, és $\bar{u} = \bar{v}\cos\alpha + \bar{v}'\sin\alpha$. Ekkor $\bar{v} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{w}$ miatt $\bar{w} = \bar{v}\cos\beta - \bar{v}'\sin\beta$, $\lambda\cos\alpha + \mu\cos\beta = 1$, és $\lambda\sin\alpha - \mu\sin\beta = 0$. Tehát

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \bar{u}\cdot\bar{w} = \cos\gamma;\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \tfrac{\sin\alpha}{\mu}(\mu\cos\beta + \lambda\cos\alpha) = \tfrac{\sin\alpha}{\mu} > 0,\end{aligned}$$

amelyekből következik $\gamma = \alpha + \beta$. $\square$

Definíció Ha A, B, C nincs egy egyenesen, akkor az ABC háromszög A-nál fekvő szöge $\bar{b} - \bar{a}$ és $\bar{c} - \bar{a}$ szöge, A-val szemközti oldala hossza BC.

Tétel Egy háromszög három szögéneknek összege π.

Tétel *(Koszinusz tétel háromszögekre)* Ha $[A, B, C]$ háromszög A, B, C-nél fekvő szöge α, β, γ, és a velük szemközti oldalak hosszai a, b, c, akkor

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Lemma Ha $[A, B, C]$ háromszög A, B, C-nél fekvő szöge $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$, és a velük szemközti oldalak hosszai a, b, c, akkor $a^2 + b^2 = c^2$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ és $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Tétel *(Szinusz tétel háromszögekre)* Ha $[A, B, C]$ háromszög A, B, C-nél fekvő szöge α, β, γ, és a velük szemközti oldalak hosszai a, b, c, akkor

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Továbbá a C távolsága az A és B egyenesétől (a “magasság”) $b\sin\alpha$.

3 Vektoriális szorzat

Definíció Ha $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ortonormált bázisa a térnek, akkor az $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ és $\bar{b}(b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzata

$$\bar{a} \times \bar{b} = \det \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\bar{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\bar{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\bar{k}.$$

Megjegyzés Az $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ térbeli vektorok vektoriális szorzata kielégíti a következő tulajdonságokat:

- $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;
- $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{o}$;
- $(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}) \times \bar{c} = \alpha\bar{a} \times \bar{c} + \beta\bar{b} \times \bar{c}$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \det[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$;
- $\det[\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}] \geq 0$, azaz $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{a} \times \bar{b}$ "jobbrendszert" alkot;
- $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\alpha$, ahol α az $\bar{a}$ és $\bar{b}$ szöge.

Megjegyzés $\bar{a}$ és $\bar{b}$ pontosan akkor párhuzamos, ha $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{o}$.

Megjegyzés A vektoriális szorzat nem vátozik, ha az $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ bázist egy vele egyező irányítású $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ortonormált bázisra cseréljük. Ekkor $|\bar{u}| = |\bar{v}| = 1$, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, és $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$.

4 Egyenesek további tulajdonságai

Definíció Ha $A \neq B$ egy síkbeli vagy térbeli egyenes pontjai, akkor $\bar{v} = \bar{b} - \bar{a}$ az egyenes egy irányvektora.
Megjegyzés Tehát az AB egyenest a $\{\bar{a} + t\bar{v} : t \in \mathbb{R}\}$ helyvektorok írják le. Továbbá a többi irányvektor $s\bar{v}$ alakú, ahol $s \neq 0$ valós.

Definíció *(Egyenesek párhuzamossága)* Két síkbeli vagy térbeli egyenes párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak.

Definíció *(Egyenesek merőlegessége)* Két síkbeli vagy térbeli egyenes merőleges, ha irányvektoraik merőlegesek.

Lemma Két egy síkba eső egyenes vagy párhuzamos, vagy pontosan egy közös pontjuk van.

Definíció Két egyenes *kitérő*, ha nincsenek egy síkban.

Lemma *(Normális tranzverzális)* Két L és L' kitérő egyenesek nincs közös pontja, és egyértelműen létezik egy N egyenes, mely merőlegesen metszi L-t és L'-t is.
Megjegyzés Az N egyenes az L és L' normális tranzverzálisa. Ha $A \in L$ és $A' \in L'$, továbbá $\bar{v}$ és $\bar{v}'$ az L illetve L' irányvektorai, akkor $\bar{a} + t\bar{v}$ és $\bar{a}' + s\bar{v}'$ az N metszés pontjai, ahol $\bar{a} - \bar{a}' + t\bar{v} - s\bar{v}'$ merőleges $\bar{v}$-re és $\bar{v}'$-re.

Lemma *(Síkbeli egyenesek normálvektoros egyenlete)* Ha $\bar{v}$ az L síkbeli egyenes irányvektora, $A \in L$, és $\bar{u} \neq \bar{o}$ merőleges $\bar{v}$-re, akkor az egyenes helyvetorainak normálvektoros egyenlete

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \bar{u} \cdot \bar{x} = \bar{u} \cdot \bar{a}\}.$$

Lemma *(Merőleges vetület egyenesre)* Adott L egyenes és rajta nem fekvő P esetén egyértelműen létezik egy $T \in L$ pont, melyre $\overline{TP}$ merőleges L-re.
Megjegyzés Ekkor $TP = \min_{A \in L} AP$ a P távolsága L-től. Továbbá az L tetszőleges A pontjára $\overline{AT}$ az $\overline{AP}$ vektornak az L-lel párhuzamos vetülete.

Definíció *(Metsző egyenesek szöge)* Tegyük fel, hogy L és L' metsző egyenesek egy-egy irányvektorának szöge α. Ekkor az L és L' szöge α, ha $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, és $\pi - \alpha$, ha $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.

Definíció *(Félegyenesek)* Adott A pont és $\bar{v} \neq \bar{o}$ vektor az A kezdőpontú $F = \{\bar{a} + t\bar{v} : t \geq 0\}$ félegyenest határozza meg. Ha F' egy másik félgyenes, melyet egy $\bar{v}' \neq \bar{o}$ határoz meg, akkor F és F' szöge megegyezik $\bar{v}$ és $\bar{v}'$ szögével.
Megjegyzés Egy egyenes két $A \neq B$ pontja három részre oszt: az $[A, B]$ szakaszra, és két félegyenesre. Továbbá, ha egy A kezdőpontú félegyenes átmegy a $P \neq A$ ponton, akkor azt AP félegyenesnek hívjuk.

Lemma *(Felezőmerőleges egyenes)* $A \neq B$ síkbeli pontokra, az A és B-től egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az $[A, B]$ szakasz felezőmerőlegese.
Megjegyzés Ez egy olyan egyenes, mely merőleges AB egyenesre, és átmegy az $[A, B]$ szakasz felezőpontján.

Lemma *(Szögfelező félegyenes)* Ha A, B és C pontok nincsenek egy egyenesen, akkor az AB és AC félegyenesektől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az AB és AC félgyenesek szögfelezője.
Megjegyzés Például ha $AB = AC$, akkor szögfelező az AD félgyenes, ahol D a BC szakasz felezőpontja.

5 Síkok további tulajdonságai

Lemma *(Sík normálvektoros egyenlete)* Ha A, B, C egy S sík nem egy egyenesen fekvő pontjai, és $\bar{u} = \overline{AB} \times \overline{AC}$, akkor a sík helyvektorainak normálvektoros egyenlete

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{u} \cdot \bar{x} = \bar{u} \cdot \bar{a}\}.$$

Megjegyzés Az $\bar{u}$ vektort, és tetszőleges vele párhuzamos nem nulla vektort az L normálvektorainak hívjuk. A normálvektorok merőlegesek bármely S-beli egyenesre.

Definíció Két sík párhuzamos, ha normálvektoraik párhuzamosak.

Lemma Két sík vagy párhuzamos, és akkor nem metszi egymást, vagy egy egyenesben metszik egymást.
Megjegyzés Ha $\bar{u}$ illetve $\bar{u}'$ a két sík egy-egy normálvektora, akkor $\bar{u} \times \bar{u}'$ a metszőegyenes egy irányvektora.

Lemma *(Merőleges vetület síkra)* Adott S sík és rajta nem fekvő P esetén egyértelműen létezik egy $T \in S$ pont, melyre $\overline{TP}$ merőleges S-re.
Megjegyzés Ekkor $TP = \min_{A \in S} AP$ a P távolsága S-től. Továbbá az S tetszőleges A pontjára és $\bar{u}$ normálvektorára $\overline{TP}$ az $\overline{AP}$ vektornak az $\bar{u}$-ral párhuzamos vetülete.

Definíció Adott egy S sík, és L egyenes esetén L párhuzamos S-sel, ha nincs közös pontjuk. Ilyenkor L egy eltoltja része S-nek.

Lemma Adott egy S sík, és L egyenes esetén vagy $L \subset S$, vagy L párhuzamos S-sel, vagy L és S-nek pontosan egy közös pontja van.

Definíció *(Egyenes és sík szöge)* Tegyük fel, egy L egyenes és egy S sík egy P pontban metszi egymást. Ha L párhuzamos S normálvektoraival, akkor L-t merőlegesnek mondjuk S-re. Egyébként L merőleges vetülete S-re egy P-n áthaladó L' egyenes, és L és S szögét az L és L' szögének definiáljuk.

Definíció *(Metsző síkok szöge)* Tegyük fel, hogy S és S' metsző síkok egy-egy normálvektorának szöge α. Ekkor az S és S' szöge α, ha $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, és $\pi - \alpha$, ha $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.
Megjegyzés Ha S és S' metszésvonala (közös egyenese) L_0, és $L \subset S$ és $L' \subset S'$ egyenesen merőlegesen metszi L_0-t valamely $P \in L_0$ pontban, akkor S és S' szöge megegyezik L és L' szögével. Ilyenkor L' az L merőleges vetülete S-re.

Lemma *(Felezőmerőleges sík)* $A \neq B$ térbeli pontokra, az A és B-től egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az $[A, B]$ szakasz felezőmerőlegese.
Megjegyzés Ez egy olyan sík, mely merőleges AB egyenesre, és átmegy az $[A, B]$ szakasz felezőpontján.

Definíció *(Félsík)* Adott a síkban egy L egyenes, egy $A \in L$ pont, és egy L-re merőleges $\bar{u} \neq \bar{o}$ vektor. Ezek az adatok az

$$L^+ = \{X \in \mathbb{R}^2 : \bar{x} \cdot \bar{u} \geq \bar{a} \cdot \bar{u}\} \text{ félsíkot határozzák meg.}$$

Megjegyzés Az L^+ belseje $\{X : \bar{x} \cdot \bar{u} > \bar{a} \cdot \bar{u}\}$. A másik L által határolt félsíkot a $-u$ határozza meg. Ha L^+-t írunk, akkor mindig egy az L egyenes által határolt félsíkot értünk.

Lemma Adott síkbeli L egyenesre, legyen L^+ és L^- a két L által meghatározott félsík. Ha $P, Q \in \mathbb{R}^2 \backslash L$, akkor P és Q pontosan akkor van különböző félsíkban, ha $[P, Q]$ metszi L-t.
Megjegyzés Ilyenkor azt mondjuk, P-t és Q-t elválasztja L.

Definíció *(Féltér)* Adott a térben egy S sík, egy $A \in S$ pont, és S-nek egy $\bar{u} \neq \bar{o}$ normálisa. Ezek az adatok az

$$S^+ = \{X \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} \cdot \bar{u} \geq \bar{a} \cdot \bar{u}\} \text{ félteret határozzák meg.}$$

Megjegyzés Az S^+ belseje $\{X : \bar{x} \cdot \bar{u} > \bar{a} \cdot \bar{u}\}$. A másik S által határolt félteret a $-u$ határozza meg. Ha S^+-t írunk, akkor mindig egy az S sík által határolt félsíkot értünk.

Lemma Adott térbeli S síkra, legyen S^+ és S^- a két S által meghatározott féltér. Ha $P, Q \in \mathbb{R}^3 \backslash S$, akkor P és Q pontosan akkor van különböző félsíkban, ha $[P, Q]$ metszi S-t.
Megjegyzés Ilyenkor azt mondjuk, P-t és Q-t elválasztja S.

6 Egybevágóság

6.1 Definíció és példák

Definíció A sík vagy tér egy Φ önmagára való leképezését egybevágóságnak hívjuk, ha tartja a távolságot, azaz $\Phi(A)\Phi(B) = AB$ bármely A és B pontra.
Megjegyzés A geometriában általában olyan tulajdonságokat vizsgálunk, amelyeket megtart egy egybevágóság (pl. szög, terület, stb.).

Lemma Síkban vagy térben két egybevágóságot egymás után alkalmazva egybevágóságot kapunk.

Definíció Egy $\mathcal{M}$ mátrix (lineáris transzformáció) ortogonális, ha $\mathcal{M}(\bar{a}) \cdot \mathcal{M}(\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$ bármely $\bar{a}, \bar{b}$ vektorra.
Megjegyzés Ekkor $|\mathcal{M}(\bar{a})| = |\bar{a}|$, továbbá $\mathcal{M}(\bar{a})$ és $\mathcal{M}(\bar{b})$ szöge megegyezik $\bar{a}$ és $\bar{b}$ szögével bármely $\bar{a}, \bar{b}$ vektorra.

Lemma Egy $\mathcal{M}$ mátrix ortogonalitása ekvivalens a következő tulajdonságok bármelyikével:

- $\mathcal{M}(\bar{a}) \cdot \mathcal{M}(\bar{a}) = \bar{a} \cdot \bar{a}$ bármely $\bar{a}$ vektorra.
- $\mathcal{M}^T\mathcal{M}$ az identitás.
- $\mathcal{M}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak.
- $\mathcal{M}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak.

Lemma Ha a $\mathcal{M}$ mátrix (lineáris transzformáció) ortogonális, akkor a hozzá tartozó leképezés egybevágóság.

Bizonyítás Az A és B pontok képének távolsága

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(\bar{b}) - \mathcal{M}(\bar{a})| &= |\mathcal{M}(\bar{b} - \bar{a})| = \sqrt{\mathcal{M}(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \mathcal{M}(\bar{b} - \bar{a})} \\ &= \sqrt{(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{b} - \bar{a})} = |\bar{b} - \bar{a}| = AB. \quad \square \end{aligned}$$

Példa *(Egybevágóságok)*

- *Eltolás:* Adott síkbeli vagy térbeli $\bar{v}$ esetén, a P pont $\bar{v}$ vektorral való eltoltjának helyvektora $\bar{p}' = \bar{p} + \bar{v}$. Tetszőleges P, R pontra $|\bar{r}' - \bar{p}'| = |(\bar{r} + \bar{v}) - (\bar{p} + \bar{v})| = |\bar{r} - \bar{p}|$, tehát az eltolás egybevágóság. A $\bar{v}$ vektorral való eltolás inverze a $-\bar{v}$ vektorral való eltolás.

- *Pontra vonatkozó tükrözés:* Adott síkbeli vagy térbeli Q pontra tükrözés esetén P képe az a P', hogy Q a PP' felezőpontja. Másszóval $\bar{p}' = 2\bar{q} - \bar{p}$. Tetszőleges P, R pontra $|\bar{r}' - \bar{p}'| = |(2\bar{q} - \bar{r}) - (2\bar{q} - \bar{p})| = |\bar{r} - \bar{p}|$, tehát a pontra vonatkozó tükrözés egybevágóság. A pontra vonatkozó tükrözés önmaga inverze.

- Síkban az origó körüli α szögű *elforgatás* mátrixa

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

  azaz P képének helyvektora $\mathcal{M}\bar{p}$. Miután

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix},$$

  az α szögű origó körüli elforgatás inverze a $-\alpha$ szögű elforgatás.

- Tetszőleges $\bar{a} \neq \bar{o}$ síkbeli vektor felírható $\bar{a} = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ alakba, ahol $r = |\bar{a}|$, és α-t hívjuk a vektor előjeles szögének. Az $\bar{a}$ origó körüli, φ szögű elforgatottjának előjeles szöge $\alpha + \varphi$, hiszen

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha \\ \sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \end{bmatrix}.$$

- Síkban egy P pont képe a Q pont körüli α szögű *elforgatás* esetén

$$\bar{p}' = \bar{q} + \mathcal{M}(\bar{p} - \bar{q}), \quad \text{ahol} \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

  Mivel $\mathcal{M}$ ortogonális mátrix, ezért az elforgatás egybevágóság. Ezen elforgatás inverze a Q pont körüli $-\alpha$ szögű elforgatás.

  Megjegyzés Ha $\alpha = \pi$, akkor $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, és a forgatás a Q-ra vonatkozó tükrözés.

- *Egyenesre tükrözés síkban:* Egy P pontnak a síkbeli L egyenesre vett tükörképe az a P' pont, melyre a $[P, P']$ szakasz felezőpontja a P pontnak az L-re vett merőleges vetülete. Az egyenesre vonatkozó tükrözés önmaga inverze.

- Síkban az első koordináta tengelyre való tükrözés felírható a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixszal való szorzásként.
  Megjegyzés Miután ez a mátrix ortogonális, és a síkban bármely egyenes választható a koordinátarendszer első tengelyének, ezért bármely egyenesre való tükrözés egybevágóság.

- Ha (x, y) koordinátákban az L egyenes egyenlete $y = t$, akkor a $P(x, y)$ tükörképe L-re $P'(x, 2t - y)$.

- *Csúsztatva tükrözés síkban:* Adott a síkban egy L egyenes, és egy vele párhuzamus $\bar{v}$ vektor. A kapcsolódó csúsztatva tükrözésnél P pont képe a $\bar{v}$ vektorral való eltolt tükörképe az L egyenesre.

- *Síkra tükrözés térben:* Egy P pontnak a térbeli S síkra vett tükörképe az a P' pont, melyre a $[P, P']$ szakasz felezőpontja a P pontnak az S-re vett merőleges vetülete. A síkra vonatkozó tükrözés önmaga inverze.

- Térben az első két koordináta tengely síkjára való tükrözés felírható a következő mátrixszal való szorzásként:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
  Megjegyzés Miután ez a mátrix ortogonális, és a térben bármely síkba megválasztható a koordinátarendszer első két tengelye, ezért bármely síkra való tükrözés egybevágóság.

- Ha (x, y, z) koordinátákban az S sík egyenlete $z = t$, akkor a $P(x, y, z)$ tükörképe S-re $P'(x, y, 2t - z)$.

- *Egyenes körüli elforgatás a térben:* Adott egy térbeli L egyenes és α szög. Az L körüli α szögű elforgatás esetén bármely L-re merőleges S síkban az $L \cap S$ metszéspont körül forgatunk α szöggel, mégpedig minden merőleges síkban ugyanabba az irányban. Ha L a harmadik koordinátatengely, akkor L körüli elforgatás felírható a következő mátrixszal való szorzásként:
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
  Miután ez a mátrix ortogonális, az egyenes körüli elforgatás egybevágóság.

6.2 Tükrözések néhány tulajdonsága

Lemma Ha a síkban az L_1 és L_2 egyenes párhuzamos, és L_1-t L_2-be a $\bar{v}$ az egyeneskre merőleges vektorral való eltolálás viszi, akkor először L_1-re, majd L_2-re tükrözve a $2\bar{v}$-vel való eltolást kapjuk.

Bizonyítás Feltehetjük, az (x, y) koordinátákkal L_1 egyenlete $y = t_1$, az L_2 egyenlete $y = t_2$, azaz $\bar{v} = (0, t_2 - t_1)$. Ekkor $P(x, y)$ tükörképe L_1-re $P'(x, 2t_1 - y)$, és P' tükörképe L_2-re

$$\bar{p}\text{"}(x, 2t_2 - (2t_1 - y)) = \bar{p}\text{"}(x, y + 2(t_2 - t_1)) = \bar{p} + 2\bar{v}. \quad \square$$

Lemma Ha a térben az S_1 és S_2 sík párhuzamos, és S_1-t S_2-be a $\bar{v}$ a síkokra merőleges vektorral való eltolálás viszi, akkor először S_1-re, majd S_2-re tükrözve a $2\bar{v}$-vel való eltolást kapjuk.

Bizonyítás Feltehetjük, az (x, y, z) koordinátákkal S_1 egyenlete $z = t_1$, az L_2 egyenlete $z = t_2$, azaz $\bar{v} = (0, 0, t_2 - t_1)$. Ekkor $P(x, y, z)$ tükörképe S_1-re $P'(x, y, 2t_1 - z)$, és P' tükörképe S_2-re

$$\bar{p}\text{"}(x, y, 2t_2 - (2t_1 - z)) = \bar{p}\text{"}(x, y, z + 2(t_2 - t_1)) = \bar{p} + 2\bar{v}. \quad \square$$

Lemma Ha a síkban az L_1 és L_2 egyenes egy Q pontban metszi egymást, és L_1-t L_2-be a Q körüli α szögű elforgatást viszi át, akkor először L_1-re, majd L_2-re tükrözve a Q körüli 2α szögű elforgatást kapjuk.

Bizonyítás Feltehetjük, Q az origó, L_1 az első koordinátatengely, és így L_2 irányvektora $\bar{u}(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Egy $P(x, y)$ tükórképe L_1-re $P'(x, -y)$. A P'-nek az L_2-re vonatkozó P" tükörképéhez szükség van P' merőleges vetületére L_2-re, ami

$$\bar{r} = (\bar{p'} \cdot \bar{u})\bar{u} = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos^2\alpha - y\sin\alpha\cos\alpha \\ x\sin\alpha\cos\alpha - y\sin^2\alpha \end{bmatrix}.$$

Tehát $\bar{r} = \frac{1}{2}(\bar{p}' + \bar{p}\text{"})$-ből következik, hogy

$$\bar{p}\text{"} = 2\bar{r} - \bar{p}' = \begin{bmatrix} x(2\cos^2\alpha - 1) - 2y\sin\alpha\cos\alpha \\ 2x\sin\alpha\cos\alpha + y(1 - 2\sin^2\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad \square$$

Lemma Ha a térben az S_1 és S_2 sík egy L egyenesben metszi egymást, és S_1-t S_2-be az L körüli α szögű elforgatást viszi át, akkor először S_1-re, majd S_2-re tükrözve a L körüli 2α szögű elforgatást kapjuk.

Bizonyítás Legyen S egy az L-re merőleges sík, és legyen $Q = L \cap S$. Ekkor egy S-beli P pont S_i-re, $i = 1, 2$, vett tükörképe a P-nek az $S \cap S_i$ egyenesre vett tükörképe, és az L körüli 2α szögű elforgatás szerinti kép megkapható az S-ben történő Q pont körüli 2α szögű elforgatással. Tehát a lemma az előzőből következik. $\square$

Lemma Ha síkban egy eltolás után egyenesre tükrözést, vagy egyenesre való tükrözés után eltolást alkalmazunk, mindkét esetben csúsztatva tükrözést kapunk.

Bizonyítás Feltehetjük, a tükrözés tengelye az első koordinátatengely, és legyen $\bar{v}(a, b)$ az eltolásvektor. A $P(x, y)$ pontot előbb a koordinátengelyre tükrözve, majd a tükörképet $\bar{v}$ vektorral eltolva a $P'(x + a, b - y)$ pontot kapjuk. Így a transzformáció az $y = b/2$ egyenletű egyeneshez, és a vele párhuzamos $\bar{u}(a, 0)$ vektorhoz tartozó csúsztatva tükrözés.

Másrészt a $P(x, y)$ pontot előbb a $\bar{v}$ vektorral eltolva, majd az eltoltat a koordinátengelyre tükrözve a $P"(x+a, -(y+b)) = P"(x+a, -b-y)$ pontot kapjuk. Ez a transzformáció pedig az $y = -b/2$ egyenletű egyeneshez, és a vele párhuzamos $\bar{u}(a, 0)$ vektorhoz tartozó csúsztatva tükrözés. $\square$

Lemma A síkban egy egyenesre, illetve a térben egy síkra való tükrözés felírható $\Phi(P) = \mathcal{M}\bar{p} + \bar{v}$ alakban, ahol $\mathcal{M}$ egy ortogonális mátrix, és $\det \mathcal{M} = -1$.

Bizonyítás A térbeli esetet bizonyítom, síkban hasonlóan megy. Legyen S a sík, és egy pontja legyen Q. Válasszunk egy olyan $\mathcal{N}$ ortogonális mátrixot, mely az $S - \bar{q}$ síkot az első két koordináta tengely síkjába viszi. Ha P pont S-re vonatkozó tükörképe P', akkor $\mathcal{N}(\bar{p} - \bar{q})$ tükörképe a koordináta síkra $\mathcal{N}(\bar{p}' - \bar{q})$, másszóval

$$\mathcal{N}(\bar{p}' - \bar{q}) = \mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}(\bar{p} - \bar{q}), \quad \text{ahol} \quad \mathcal{M}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ebből következik, hogy $\bar{p}' = \bar{q} + \mathcal{N}^{-1}\mathcal{M}_0 \cdot \mathcal{N}(\bar{p} - \bar{q}) = \mathcal{M}\bar{p} + \bar{v}$, ahol $\bar{v} = \bar{q} - \mathcal{N}^{-1}\mathcal{M}_0\mathcal{N}\bar{q}$ és $\mathcal{M} = \mathcal{N}^{-1}\mathcal{M}_0\mathcal{N}$. Az $\mathcal{M}$ mátrix ortogonális mátrixok szorzataként maga is ortogonális, és

$$\det \mathcal{M} = \det \mathcal{N}^{-1} \cdot \det \mathcal{M}_0 \cdot \det \mathcal{N} = \det \mathcal{M}_0 = -1. \quad \square$$

Lemma Ha $A_1, \ldots, A_k$ és $A'_1, \ldots, A'_k$ síkbeli vagy térbeli pontokra $A_iA_j = A'_i, A'_j$, $1 \le i < j \le k$, teljesül, akkor található legfeljebb k olyan a síkban egyenesre, a térben síkra való tükrözés, melyek szorzata A_i-t A'_i-be viszi, $i = 1, \ldots, k$.

Megjegyzés Ha $|\bar{a}_i| = |\bar{a}'_i|$, akkor mindegyik tükrözés fixen hagyja az origót.

Bizonyítás k-ra való indukciót alkalmazunk. Ha $k = 1$, akkor vagy $A_1 = A'_1$, és készen vagyunk, vagy $A_1 \ne A'_1$, és az $[A_j, A'_j]$ felezőmerőlegesére tükrözünk. Ha $k > 1$, és $k - 1$ pont párra tudjuk az állítást, akkor alkalmazzuk a legfeljebb $k - 1$ tükrözést, mely A_i-t A'_i-be viszi $i = 1, \ldots, k - 1$-re. Legyen A^*_k az A_k képe a $k - 1$ tükrözés után. Ha $A^*_k = A'_k$, akkor készen vagyunk. Egyébként tükrözzünk $[A^*_k, A'_k]$ felezőmerőlegesére. Miután $A^*_kA'_i = A'_kA'_i$ $i = 1, \ldots, k - 1$-re, az utolsó tükrözés fixen hagyja A'_i-t $i = 1, \ldots, k - 1$-re, és így az összes A_i eljutott A'_i-be. $\square$

6.3 Egybevágóságok jellemzése tükrözések és ortogonális mátrixok segítségével

Megjegyzés *Háromszög-egyenlőtlenség:* (lásd 2. Fejezet)
$AB \leq AC + CB$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $C \in [A, B]$.

Lemma Egy síkbeli vagy térbeli egybevágóság az L egyenest valamely L' egyenesbe visz bijektíven. Továbbá az egybevágóság L-re vett megszorítását egyértelműen meghatározza két különböző $A, B \in L$ pont képe.

Bizonyítás Tegyük fel, az egybevágóság A-t A'-be, és B-t B'-be, és jelöljük L'-vel az $A'B'$ egyenest. Legyen $P \in L$ képe P'. P-nek az A és B pontokhoz viszonyított helyzete háromféle lehet. Ha $P \in [A, B]$, akkor $AP+PA = AB$, tehát $A'P' + P'A' = A'B'$, mivel a transzformáció egybevágóság. Ebből adódik, hogy $P' \in [A', B']$ az pont, melyre $P'A' = PA$. Ha P az A kezdőpontú, B-t nem tartalmazó félegyenesen fekszik, akkor $A \in [P, B]$, azaz $PA + AB = PB$, tehát $P'A' + A'B' = P'B'$. Ebből adódik, hogy $A' \in [P', B']$, és P' az a pont az L'-ben fekvő, A' kezdőpontú, B'-t nem tartalmazó félegyenesen, melyre $P'A' = PA$. Hasonlóan látható be, ha P a B kezdőpontú, A-t nem tartalmazó félegyenesen fekszik, akkor P' az a pont az L'-ben fekvő, B' kezdőpontú, A'-t nem tartalmazó félegyenesen, melyre $P'B' = PB$. Összefoglalva $P' \in L'$, és a P-nek P' képe egyérteműen meghatározott. Bármely $R \in L'$-re ugyanilyen érveléssel találhatunk $P \in L$-t, melynek képe $R = P'$. $\square$

Lemma Tetszőleges egybevágóság egy S síkot bijektíven egy S' síkba visz, és három nem egy egyenesen fekvő pont képe egyértelműen meghatározza az egybevágóság megszorítását az S síkra.

Bizonyítás Legyenek A_1, A_2, A_3 az S sík nem egy egyenesen fekvő pontjai, és legyen A'_i az A_i képe, $i = 1, 2, 3$. Legyen P tetszőleges, az A_1, A_2, A_3-tól különböző pontja S-nek. Válassszunk P-n át egy olyan L egyenest, mely nem párhuzamos sem az A_1A_2, sem az A_1A_3 egyenessel, és legyen B_2 és B_3 az ezen egyenesekkel vett metszéspontjai L-nek. Az előző lemma miatt létezik olyan B'_2 pontja az $A'_1A'_2$ egyenesnek, és egy B'_3 pontja az $A'_1A'_3$ egyenesnek, hogy tetszőleges $i = 1, 2, 3$-ra az A_i-t A'_i-be vivő egybevágóság B_2-t B'_2-be, és B_3-t B'_3-ba viszi. Megint az előző lemma miatt létezik olyan P' pontja a $B'_2B'_3$ egyenesnek, hogy tetszőleges B_2-t B'_2-be, és B_3-t B'_3-ba vivő egybevágóság P-t P'-be viszi. Tehát tetszőleges $i = 1, 2, 3$-ra az A_i-t A'_i-be vivő egybevágóság P-t P'-be viszi, vagyis P képe egyértelmű, és benne van S'-ben. A két sík szerepét felcserélő hasonló érvelés mutatja, hogy hogy A'_1, A'_2, A'_3 síkjának tetszőleges pontja előáll A_1, A_2, A_3 síkja egy pontjának képeként. $\square$

Tétel Egy térbeli egybevágóságot egyértelműen meghatároz négy, nem egy síkban fekvő pont képe.

Bizonyítás Legyenek A_1, A_2, A_3, A_4 nem egy síkban fekvő pontok, és legyen A'_i az A_i képe, $i = 1, 2, 3, 4$. Az előző lemma miatt A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sincs egy síkban. Legyen P tetszőleges, az A_1, A_2, A_3, A_4-től különböző pont. Válassszunk P-n át egy olyan L egyenest, mely nem párhuzamos sem az $A_1A_2A_3$, sem az $A_1A_2A_4$ síkkal, és legyenek B_3 és B_4 az ezen síkokkal vett metszéspontjai L-nek. Az előző lemma miatt létezik olyan B'_3 pontja az $A'_1A'_2A'_3$ síknak, és egy B'_4 pontja az $A'_1A'_2A'_4$ síknak, hogy tetszőleges az A_i-t A'_i-be, $i = 1, 2, 3, 4$, vivő egybevágóság B_3-t B'_3-ba, és B_4-t B'_4-be viszi. Láttuk létezik olyan P' pontja a $B'_3B'_4$ egyenesnek, hogy tetszőleges B_3-t B'_3-be, és B_4-t B'_4-ba vivő egybevágóság P-t P'-be viszi. Tehát tetszőleges az A_i-t A'_i-be, $i = 1, 2, 3, 4$, vivő egybevágóság P-t egyértelműen P'-be viszi. $\square$

Tétel Ha A_1, A_2, A_3 és A'_1, A'_2, A'_3 olyan síkbeli pontok, melyekre $A_iA_j = A'_i, A'_j$, $1 \leq i < j \leq 3$, és A_1, A_2, A_3 nincs egy egyenesen, akkor egyértelműen létezik a sík egy egybevágósága, mely A_i-t A'_i-be viszi.
Bizonyítás Legfeljebb három tükrözés szorzata, ami egybevágóság, elviszi A_i-t A'_i-be, és ez az egybevágóság egyértelmű. $\square$

Következmény A sík bármely egybevágósága felírható legfeljebb három egyenesre való tükrözés szorzataként.

Bizonyítás Tekintsünk három nem egy egyenesen fekvő A_1, A_2, A_3 pontot, és legyenek A'_1, A'_2, A'_3 a képeik. Tudjuk, létezik legfeljebb három egyenesre való tükrözés, melyek szorzata mindegyik A_i-t A'_i-be viszi. Miután csak egy ilyen egybevágóság létezik, az eredeti egybevágóság megegyezik a tükrözések szorzatával. $\square$

Tétel Tetszőleges olyan A_1, A_2, A_3, A_4 és A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 térbeli pontokra, melyekre $A_iA_j = A'_i, A'_j$, $1 \leq i < j \leq 4$, és A_1, A_2, A_3, A_4 nincs egy síkban, egyértelműen létezik a tér egy egybevágósága, mely A_i-t A'_i-be viszi.

Következmény A tér bármely egybevágósága felírható legfeljebb négy síkra való tükrözés szorzataként.

Tétel A sík vagy a tér transzformációja pontosan akkor egybevágóság, ha létezik olyan $\mathcal{M}$ ortogonális mátrix (lineáris transzformáció) és $\bar{v}$ vektor, hogy P pont képe $\mathcal{M}(\bar{p}) + \bar{v}$.
Megjegyzés Ebből következik, hogy egy síkbeli vagy térbeli egybevágóság tartja vektorok, félegyensek, egyenesek, síkok szögeit.

Lemma Az egybevágóságok csoportot alkotnak, ahol az eltolások egy részcsoport.

6.4 Egybevágóságok osztályozása

Megjegyzés Ha $\mathcal{M}$ ortogonális mátrix, akkor $\det \mathcal{M} = \pm 1$.

Definíció *Irányítástartó egybevágóságok* Egy Φ egybevágóságot irányítástartónak hívunk, ha $\Phi(P) = \mathcal{M}(\bar{p}) + \bar{v}$ valamely $\mathcal{M}$ ortogonális mátrixra és $\bar{v}$ vektorra, és $\det \mathcal{M} = 1$. Egyébként Φ irányítást váltó egybevágóság.

Megjegyzés Irányítástartó egybevágóságok szorzata irányítástartó (részcsoportot alkotnak). Továbbá két irányítást váltó egybevágóság szorzata irányítástartó, illetve egy irányítástartó és egy irányítást váltó egybevágóság szorzata megfordítja az irányítást.

Példa A síkban az egyenesre való tükrözés, és a térben a síkra való tükrözés megfordítja az irányítást. A síkban a a pont körüli forgatás, a térben a tengely körüli elforgatás, és mindkettőben az eltolás irányítástartó.

Tétel A sík irányítástartó egybevágóságai az eltolások és a pont körüli forgatások.
Bizonyítás Beláttuk korábban, hogy sík egy Φ egybevágósága legfeljebb három egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata. Ha Φ nem az identitás, és irányítástartó, akkor ezek szerint két egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata. Ebben az esetben már láttuk, hogy Φ eltolás vagy pont körüli forgatás. $\square$

Tétel A sík irányítást váltó egybevágóságai az egyenesre való tükrözések és a csúsztatva tükrözések.
Bizonyítás Beláttuk korábban, hogy sík egy Φ egybevágósága legfeljebb három egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata. Ha Φ nem egy egyenesre való tükrözés, és irányításváltó, akkor ezek szerint három egyenesre, L_1, L_2 és L_3-ra vonatkozó tükrözés szorzata ilyen sorrendben. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset. L_1 és L_2 párhuzamos.
Ekkor az L_1-re és L_2-re vonatkozó tükrözés szorzata egy eltolás, és ezt kombinálva az L_3-ra vonatkozó tükrözéssel egy csúsztatva tükrözést kapunk.

2. eset. L_1 és L_2 egy Q pontban metszi egymást.
Ekkor L_1-t valamely Q körüli, α szögű forgatás viszi L_2-be. Legyen L_2' a Q-n átmenő, L_3-mal párhuzamos egyenes, és legyen L_1' az L_2'-nek a Q körüli, $-\alpha$ szögű elforgatottja. Így L_1'-re és L_2'-re vonatkozó tükrözések szorzata megyezik az L_1-re és L_2-re vonatkozó tükrözések szorzatával (azaz a Q körüli, 2α szögű elforgatással), tehát Φ az L_1'-re, L_2'-re és L_3-ra vonatkozó tükrözések szorzata. Miután L_2' és L_3 párhuzamos, a rájuk vonatkozó tükrözések szorzata eltolás. Tehát Φ az L_1'-re vonatkozó tükrözés és egy eltolás szorzata, azaz csúsztatva tükrözés. $\square$

Következmény Egy 2×2-es $\mathcal{M}$ ortogonális mátrix hatása egy origó körüli elforgatás (ha $\det \mathcal{M} = 1$), vagy egy origót tartalmazó egyenesre vett tükrözés (ha $\det \mathcal{M} = -1$).

Tétel Ha $\det \mathcal{M} = 1$ teljesül egy 3×3-as $\mathcal{M}$ ortogonális mátrixra, akkor hatása a térben egy origót tartalmazó tengely körüli elforgatás.

Bizonyítás Feltehetjük, $\mathcal{M}$ nem az identitás. Legyen $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ egy ortonormált bázisa a térnek, és legyen $\bar{a}'_i = \mathcal{M}\bar{a}_i$, $i = 1, 2, 3$-ra. Láttuk, létezik legfeljebb három olyan síkra való tükrözés, melyek szorzata A_i-t A'_i-be viszi, $i = 1, 2, 3$, és mindegyik sík tartalmazza az origót. Miután ilyen egybevágóság egyértelműen létezik, ezért $\mathcal{M}$ hatása megegyezik a tükrözések szorzatával. Mivel $\mathcal{M}$ tartja az irányítást, így $\mathcal{M}$ hatása pontosan két olyan síkra való tükrözés szorzata, melyek tartalmazzák az origót. Egy ilyen szorzat egy origót tartalmazó tengely körüli elforgatás (l. 6.2. Fejezet). $\square$

Definíció *Csavarmozgás:* Térben egy tengely körüli elforgatás és egy a tengellyel párhuzamos eltolás szorzata a csavarmozgás.
Megjegyzés Ha az eltolás vektor a nullvektor, akkor a csavarmozgás egy tengely körüli elforgatás. Ha a forgatás szöge 0, akkor a csavarmozgás egy eltolás. Egyébként a tengelyre nem illeszkedő pontok csavarvonal mentén mozognak.

Tétel A tér irányítástartó egybevágóságai a csavarmozgások.

Bizonyítás A tér egy irányítástartó Φ egybevágóságához létezik egy $\bar{v}$ vektor és egy $\mathcal{M}$ ortogonális mátrix, melyekre $\det \mathcal{M} = 1$, és $\Phi(P) = \mathcal{M}(\bar{p}) + \bar{v}$. Fent láttuk, hogy létezik egy origót tartalmazó L egyenes, hogy $\mathcal{M}$ hatása egy L körüli, α szögű elforgatás. Ha $\alpha = 0$, akkor Φ egy eltolás. Egyébként legyen $\bar{u}$ a $\bar{v}$-nek L-lel párhuzamos vetülete, tehát $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$, ahol a $\bar{w}$ az origót tartalmazó, L-re merőleges S_0 síkban fekszik. Így bármely P pontra, ha P az L-re merőleges S síkban fekszik, akkor $\Phi(P) - \bar{u} \in S$, továbbá ha P vetülete S_0-ra P_0, akkor $\Phi(P)$ vetülete S_0-ra $\Phi(P_0)$. Az S_0-ben az origó körüli α szögű elforgatás és a $\bar{w}$-vel eltolás szorzata irányítástartó, és nem eltolás, tehát valamely $Q \in S_0$ pont körüli β szögű elforgatás (igazából $\beta = \alpha$, de erre nincs szükségünk). Tehát ha a Q-n átmenő, L-lel párhuzamos egyenes E, akkor Φ az E körüli β szögű elforgatás és az $\bar{u}$-val való eltolás szorzata, ami csavarmozgás. $\square$
Megjegyzés *A sík és tér irányítása:* A síban a nem egy egyenesre illeszkedő A, B, C pont pozitív vagy negatív körüljárású a $\det[\bar{b}-\bar{a}, \bar{c}-\bar{a}]$ előjele szerint. Ezt a körüljárási irányt tartják vagy váltják a az egybevágóságok a nevüknek megfelelően. Hasonlóan a térben a nem egy síkra illeszkedő A, B, C, D pont esetén $\det[\bar{b} - \bar{a}, \bar{c} - \bar{a}, \bar{d} - \bar{a}]$ előjelét tartják vagy váltják az egybevágóságok a nevüknek megfelelően.

7 Hasonlóság

Definíció A sík vagy tér egy Φ önmagára való leképezését $\lambda > 0$ arányú hasonlóságnak hívjuk, ha $\Phi(A)$ és $\Phi(B)$ távolsága $\lambda \cdot AB$ bármely A és B pontra.
Megjegyzés Hasonlóságok kompozíciója hasonlóság.

Példa *Hasonlóságok*

- *Középpontos hasonlóság (nagyítás):* A síkban vagy térben adott Q középpontú és $\mu \in \mathbb{R}\backslash 0$ arányú középpontos hasonlóság az a transzformáció, melynél egy P pont képének helyvektora

  $$\bar{q} + \mu(\bar{p} - \bar{q}).$$

  Másszóval, ha P pont képe P', akkor $QP' = |\mu|\, QP$, és az P, P' és Q pontok egy egyenesre esnek. Továbbá P és P' az Q ugyanazon oldalán van, ha $\mu > 0$, és P-t és P'-t elválasztja Q, ha $\mu < 0$.
  Megjegyzés Ha A és B képe A' illetve B' egy μ arányú, Q középpontú középpontos hasonlóság esetén, akkor

  $$\bar{b}' - \bar{a}' = [\bar{q} + \mu(\bar{a} - \bar{q})] - [\bar{q} + \mu(\bar{b} - \bar{q})] = \mu(\bar{a} - \bar{b}).$$

  Tehát $A'B' = |\mu|AB$, azaz a középpontos hasonlóság egy $|\mu|$ arányú hasonlóság. Továbbá az $A'B'$ egyenes vagy egybeesik az AB egyenessel, vagy párhuzamos vele. Mindezekből az is következik, hogy a középpontos hasonlóság egyenest egyenesbe és síkot síkba visz, illetve tartja a szögeket.

- *Forgatva nyújtás* A síkban a Q középpontú, α szögű és $\lambda > 0$ arányú forgatva nyújtás a Q pont körüli α szögű forgatás és Q középpontú, λ arányú középpontos hasonlóság szorzata.

Tétel A sík vagy tér egy önmagára való Φ leképezése pontosan akkor $\lambda > 0$ arányú hasonlóság, ha egy egybevágóság és egy λ arányú középpontos hasonlóság kompozíciója.
Megjegyzés Tehát Φ egyenest egyenesbe, síkot síkba visz, és tartja a szögeket.

Tétel A sík vagy tér egy önmagára való Φ leképezése pontosan akkor $\lambda > 0$ arányú hasonlóság, ha létezik olyan $\mathcal{M}$ ortogonális mátrix és $\bar{v}$ vektor, hogy

$$\Phi(P) = \lambda\mathcal{M}(\bar{p}) + \bar{v}.$$

Megjegyzés Φ pontosan akkor irányítástartó, ha $\det \mathcal{M} = 1$.

Megjegyzés A hasonlóságok csoportot alkotnak, ahol az irányítástartóak egy részcsoport.

Lemma Ha a sík vagy tér egy hasonlósága nem egybevágóság, akkor van fixpontja.

Bizonyítás Ha $\lambda > 0$ a hasonlóság aránya, akkor $\lambda \neq 1$. Tudjuk, P pontot a hasonlóság $\lambda\mathcal{M}(\bar{p}) + \bar{v}$ pontba viszi valamely adott $\bar{v}$ vektorra és $\mathcal{M}$ ortogonális mátrixra. Tehát Q akkor pontosan akkor fixpontja a hasonlóságnak, ha $\bar{q} = \lambda\mathcal{M}(\bar{q}) + \bar{v}$, azaz I-vel jelölve a 3×3-as identitásmátrixot,

$$\bar{v} = \lambda\mathcal{M}(\bar{q}) - \bar{q} = (\lambda\mathcal{M} - I)(\bar{q}).$$

Belátjuk, a 3×3-as $\lambda\mathcal{M} - I$ mátrix invertálható. Tegyük fel, valamely $\bar{u}$ vektorra $(\lambda\mathcal{M} - I)(\bar{u}) = \bar{o}$, azaz $\lambda\mathcal{M}(\bar{u}) = \bar{u}$. Ebből következik, hogy $|\bar{u}| = |\lambda\mathcal{M}(\bar{u})| = \lambda|\bar{u}|$, vagyis $\lambda \neq 1$ miatt $\bar{u}$ a nullvektor. Tehát a $\lambda\mathcal{M} - I$ mátrix valóban invertálható, és így létezik a Q fixpont. $\square$

Tétel A sík irányítástartó hasonlóságai az eltolások és a forgatva nyújtások.

Bizonyítás Legyen $\lambda > 0$ a sík egy Φ irányítástartó hasonlóságának aránya. Ha $\lambda = 1$, akkor a hasonlóság egybevágóság, és készen vagyunk. Ha $\lambda \neq 1$, akkor létezik a hasonlóságnak fixpontja. Feltehetjük, az origó egy ilyen fixpont. Tudjuk, $\Phi(P) = \lambda\mathcal{M}(\bar{p}) + \bar{v}$ valamely $\bar{v}$ vektorra és $\mathcal{M}$ ortogonális mátrixra. Miután az egybevágóság az origót fixen hagyja, ezért $\bar{v} = \bar{o}$, azaz $\Phi(P) = \lambda\mathcal{M}(\bar{p})$. Mivel a hasonlóság irányítástartó, ezért $\mathcal{M}$ egy elforgatás mátrixa, azaz a hasonlóság forgatva nyújtás. $\square$

Tétel A tér egy $\lambda > 0$ arányú irányítástartó hasonlósága vagy egy csavarmozgás, vagy egy tengely körüli elforgatás, és a tengelyre illeszkedő középpontú, λ arányú középpontos hasonlóság szorzata.

Bizonyítás Legyen $\lambda > 0$ a tér egy Φ irányítástartó hasonlóságának aránya. Ha $\lambda = 1$, akkor a hasonlóság egybevágóság, és készen vagyunk. Ha $\lambda \neq 1$, akkor létezik a hasonlóságnak fixpontja. Feltehetjük, az origó egy ilyen fixpont, tehát $\Phi(P) = \lambda\mathcal{M}(\bar{p})$ valamely $\mathcal{M}$ ortogonális mátrixra. Mivel a hasonlóság irányítástartó, ezért $\mathcal{M}$ egy tengely körüli elforgatás mátrixa, amit bizonyítani akartunk. $\square$

Tétel A sík vagy a tér egy injektív transzformációjára pontosan akkor teljesül, hogy bármely A és B pont képeit összekötő egyenes párhuzamos az AB egyenessel, ha a transzformáció eltolás vagy középpontos hasonlóság.

Bizonyítás P képét P' jelöli. Rögzítsük $A \neq B$ pontokat. Ha P nincs rajta az AB egyenesén, akkor P' az A'-n átmenő, AP-vel párhuzamos, és a B'-n átmenő, BP-vel párhuzamos egyenesek metszete, tehát egyértelmű. Ha C nincs az AB egyenesen, akkor ugyanez az érvelés A-val és C-vel mutatja, hogy az AB egyenes pontjainak a képe is egyértelmű. Végül található vagy egy eltolás, vagy egy középpontos hasonlóság, ami A-t az A'-be, és B-t az B'-be viszi, amely így megegyezik az eredeti transzformációval. $\square$

8 Háromszögek egybevágósága és hasonlósága

Definíció Síkbeli vagy térbeli két alakzatot (részhalmazt) egybevágónak (illetve hasonlónak) hívunk, ha létezik a sík vagy tér olyan egybevágósága (illetve hasonlósága), mely a két alakzatot egymásba viszi.

Tétel *Két háromszög hasonlóságának alapesetei.*

(i) Megfelelő oldalaik egyenlőek.

(ii) Két oldaluk, és az általuk közbezárt szög megegyezik.

(iii) Egy oldaluk, és a rajta fekvő szögek megegyeznek.

(iv) Két oldaluk, és a nagyobbikkal szemközti szögük megegyezik.

Bizonyítás Legyen A, B, C az egyik háromszög csúcsai, a csúcsoknál fekvő szögek α, β, γ, és A, B, C-vel szemközti oldalak a, b, c. A másik háromszögben a megfelelő fogalmakat vessző jelöli (pl. A', B', C' a csúcsok).

(i) Korábban láttuk, hogy $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ és $AC = A'C'$ ekvivalens azzal, hogy létezik A-t a'-be, B-t B'-be, és C-t C'-be vivő egybevágóság.

(ii) Ha $a = a'$, $b = b'$ és $\gamma = \gamma'$, akkor a koszinusz tétel miatt $c = c'$, azaz (i) teljesül.

(iii) Ha $a = a'$, $\beta = \beta'$ és $\gamma = \gamma'$, akkor, mivel egy háromszög szögösszege π, $\alpha = \alpha'$ is teljesül. Így a szinusz tétel miatt

$$b' = \tfrac{\sin\beta'}{\sin\alpha'} \cdot a' = \tfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = b \quad \text{és} \quad c' = \tfrac{\sin\gamma'}{\sin\alpha'} \cdot a' = \tfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot a = c.$$

Tehát (i) teljesül.

(iv) Ha $a = a'$, $b = b'$, $a \geq b$ és $\alpha = \alpha'$, akkor a szinusz tétel miatt $\sin\beta' = \frac{b'}{a'} \cdot \sin\alpha' = \sin\beta$, azaz $\beta' = \beta$ vagy $\beta' = \pi - \beta$. Mivel $a \geq b$, ezért $\alpha' = \alpha \geq \beta$, tehát $\alpha' + \pi - \beta \geq \pi$. Ebből következik, hogy $\beta' = \beta$. Így persze $\gamma = \gamma'$, tehát (ii) teljesül. $\square$

Megjegyzés Ha (iv) helyett a kisebbik oldallal szemközti szögek egyenlőek, akkor a háromszögek nem biztos, hogy egybevágóak. Például legyen CAA' egy egyenlőszárú háromszög, melyben $CA = CA'$, és legyen a B pont az AA' egyenesén, de nem az $[A, A']$ szakaszban. Ekkor $a = a'$, $b = b'$, és $\beta = \beta'$, de $BA \neq BA'$ miatt a két háromszög nem egybevágó (itt $a > b$).

Tétel *Két háromszög hasonlóságának alapesetei.*

(i) Megfelelő oldalaik arányai megegyeznek.

(ii) Két megfelelő oldaluk aránya, és az általuk közbezárt szög megegyezik.

(iii) Megfelelő szögeik megegyeznek.

(iv) Két megfelelő oldaluk aránya, és a nagyobbikkal szemközti szögük megegyezik.

Megjegyzés Ha a, b oldal az egyik háromszögben megfelel az a', b' oldalnak a másik háromszögben, akkor $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ekvivalens $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, azaz a két egyenlőség bármelyikét jelentheti a ét megfelelő oldal aránya.
Bizonyítás Legyen A, B, C az egyik, és A', B', C' a másik háromszög egymásnak megfelelő csúcsai. A tételbeli bármelyik feltétel esetén létezik egy olyan $\lambda > 0$, hogy az ABC háromszögre egy λ nagyítás alkalmazva, az új háromszög és az $A'B'C'$ háromszög között az egybevágóság előző oldalon szereplő ugyan ilyen sorszámú esete áll fenn. Így az új háromszög és az $A'B'C'$ háromszög egybevágó, azaz az ABC háromszög és az $A'B'C'$ háromszög hasonló. □

9 Alakzatok szimmetriái

Definíció Síkban vagy térben egy P alakzat szimmetriája egy olyan egybevágóság, mely P pontjait bijektíven P-beliekbe viszi.
Megjegyzés Egy alakzat szimmetriái csoportot alkotnak.

Megjegyzés Ha egy alakzatnak van irányítást váltó szimmetriája, akkor az irányítástartó szimmetriák egy 2 indexű részcsoportot alkotnak a szimmetriacsoportban.

Megjegyzés S_n az $\{1, \ldots, n\}$ permutációinak a csoportja, és A_n az ebből páros indexűeké. C_n az n elemű ciklikus csoport.

Példa *Példák szimmetriacsoportokra*

- Egy körnek illetve gömbnek bármely, a középpontot fixen hagyó egybevágóság szimmetriája, tehát a szimmetriacsoport az ortogonális mátrixok csoportja.

- Ha P egy olyan parallelogramma, mely oldalai nem egyenlőek, szögei pedig nem derékszögek, akkor egyetlen szimmetriája a középpontra való tükrözés. Így szimmetriacsoportja $\mathbb{Z}_2$.

- Legyenek A_1, A_2, A_3 egy szabályos háromszög csúcsai. Tetszőleges $\tau \in S_3$-ra létezik egyértelműen egy egybevágóság, mely A_i-t $A_{\tau(i)}$-be viszi, azaz a szabályos háromszög szimmetriacsoportja S_3. Két csúcs felcserélése egy a felezőmerőlegesükre való tükrözéssel valósítható meg, azaz a τ permutációhoz tartozó egybevágóság pontosan akkor irányítástartó, ha τ páros indexű. Így a háromszög irányítástartó szimmetriáinak csoportja A_3.

- Hasonlóan egy szabályos tetraéder szimmetriacsoportja S_4, és a tetraéder irányítástartó szimmetriáinak csoportja A_4.

- Egy szabályos n-szög bármely szimmetriája fixen hagyja az O középpontot, így ha A, B illetve A', B' szomszédos csúcsok, akkor pontosan egy szimmetria található, mely A-t A'-be és B-t B'-be viszi. Tehát a szimmetriacsoport $2n$ elemű. Ebből az irányítást tartóak az O körüli, $i \cdot \frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatások, $i = 0, \ldots, n-1$. Azaz az irányítástartó szimmetriák csoportja C_n, melyet a $\frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatás generál.

  Legyenek A és B szomszédos csúcsok. Az összes szimmetriát generálja az OA egyenesre és az AB felezőmerőlegesére vett tükrözés, hiszen szorzatuk az O körüli, $\frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatás. Ha g és h a két tükrözés, akkor a rájuk vonatkozó azonosságok

  $$g^2 = 1 \text{ és } h^2 = 1 \text{ és } (gh)^n = 1.$$

  A szimmetriacsoportot a diéder csoportnak hívják.

- Egy szabályos oktaéder bármely szimmetriája fixen hagyja az O középpontot. Ha A_1, A_2, A_3 illetve A'_1, A'_2, A'_3 az oktaéder két lapjának csúcsai, akkor pontosan egy szimmetria található, mely A_i-t A'_i-be viszi. Miután az oktaédernek 6 csúcsa van, és minden csúcsban 4 háromszöglap találkozik, ezért a szimmetriacsoport $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ elemű.

- A kocka az oktaérder duálisa, ezért ennek a szimmetriacsoportja megegyezik az oktaéderével (pl. bármely lap bármely másikba vihető).

- Hasonlóan az ikozaédernek 12 csúcsa van, és minden csúcsban 5 háromszöglap találkozik, továbbá a dodekaéder és ikozaéder duálisai egymásnak, ezért a szimmetriacsoportjuk $12 \cdot 5 \cdot 2 = 120$ elemű.

10 Affin transzformációk

Definíció *Affin transzformációk* A sík vagy tér egy transzformációja affinitás, ha egyenestartó, azaz bármely egyenest bijektíven és folytonosan képez le valamely egyenesre.

Példa *Példák affinitásokra*

- Eltolások, hasonlóságok, egybevágóságok.
- Két affinitás kompozíója is affinitás.
- Ha $\mathcal{M}$ egy invertálható 2×2-es mátrix a síkban, vagy 3×3-as mátrix a térben, és $\bar{v}$ tetszőleges vektor, akkor $\bar{p} \mapsto \mathcal{M}\bar{p} + \bar{v}$ egy affinitás.
- *Nyírás és tengelyre merőleges nyújtás a síkban.*
  Adott egy L egyenes, és a két L által meghatározott félsíkból az egyikben pozitív előjellel, a másikban negatív előjellel tekintjük az L-től vett távolságot.

  A $\lambda \neq 0$ arányú tengelyre merőleges nyújtás egy az L-től t előjeles távolságú P pontot a P-ből L-re vett merőleges azon P' pontjába viszi, mely L-től vett előjeles távolsága λt.

  Adott L-lel párhuzamos $\bar{w}$ vektor esetén a kapcsolódó nyírás az L-től t előjeles távolságú P pontot a $\bar{p} + t\bar{w}$ pontba viszi.

  Mindkét esetben L pontjai fixen maradnak.

  Ha L az első koordinátengely, akkor az első transzformáció a $P(x, y)$ pontot a $P'(x, \lambda y)$ pontba viszi. Ha továbbá $\bar{w} = (\alpha, 0)$, akkor a nyírás $P(x, y)$ pontot a $P'(x + \alpha y, y)$ pontba viszi. Így mindkét transzformáció lineáris, azaz affinitás.

Lemma Tetszőleges síkbeli vagy térbeli affinitás injektív.

Bizonyítás Ha $A \neq B$, akkor a transzformáció injektív az AB egyenesen, így A és B képe is különböző. $\square$

Lemma Tetszőleges síkbeli vagy térbeli affinitás tartja a parallelogrammákat.

Bizonyítás Pont affin képét $'$-vel jelölöm.

Legyenek A, B, C, D egy parallelogramma csúcsai ilyen sorrendben, és legyen P az $[A, C]$ és $[B, D]$ átlók metszéspontja. Így $A'C'$ és $B'D'$ egyenesek metszéspontja P', azaz A', B', C', D' egy S síkban vannak. Miután a parallelogramma szemközti oldalainak egyenesei nem metszik egymást, és ezt a tulajdonságot az affinitás megtartja, ezért $A'B'$ és $C'D'$ egyenesek, illetve $A'D'$ és $B'D'$ egyenesek sem metszik egymást. Mivel ezek az egyenesek mind az S síban vannak, a nem metsző párok párhuzamosak, tehát A', B', C', D' egy parallelogramma csúcsai. $\square$

Lemma Tetszőleges síkbeli vagy térbeli affinitás tartja a szakaszok felezőpontját, és az egyenesek párhuzamosságát.

Bizonyítás Pont affin képét $'$-vel jelölöm. Belátjuk, hogy tetszőleges $[A, B]$ szakasz F felezőpontjának a képe $[A', B']$ felezőpontja. Ehhez válasszunk P és Q csúcsokat, hogy $APBQ$ négyszög paralellogramma a csúcsok ilyen sorrendjében. Ekkor F az átlók felezőpontja. Miután $A'P'B'Q'$ négyszög paralellogramma, és F' az átlók felezőpontja, ezért F' az $[A', B']$ szakasz felezőpontja.

Ha L_1 és L_2 egyenesek párhuzamosak, akkor válasszunk $A, B \in L_1$ és $C, D \in L_2$ pontokat, melyekre A, B, C, D egy parallelogramma csúcsai ilyen sorrendben. Miután A', B', C', D' egy parallelogramma csúcsai ilyen sorrendben, ezért L_1' és L_2' párhuzamos. $\square$

Definíció *Osztóviszony* Az A, B, C egy egyenesen lévő pontok osztóviszonya $(ABC) = \lambda$, ha $\bar{c} - \bar{a} = \lambda(\bar{b} - \bar{c})$.
Megjegyzés Másszóval $(ABC) = AC/CB$, ha AC és CB előjeles távolságok.

Tétel Tetszőleges síkbeli vagy térbeli affinitás tartja az osztóviszonyt.
Megjegyzés Másszóval, ha egy pont képét ’-vel jelöljük, és $\bar{c}-\bar{a} = \lambda(\bar{b}-\bar{a})$, akkor $\bar{c}' - \bar{a}' = \lambda(\bar{b}' - \bar{a}')$.

Bizonyítás *1. eset.* $\lambda = n \geq 0$ egész
Legyen $\bar{c}_n = n(\bar{b} - \bar{a})$. Indukciót alkalmazunk n-re. Ha $n = 0$, akkor $\bar{c} = \bar{a}$, és ha $n = 1$, akkor $\bar{c} = \bar{b}$ miatt teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $n \geq 1$-ig minden nem-negatív egészre. Ekkor C_n a $[C_{n-1}, C_{n+1}]$ szakasz felezőpontja, tehát az előző lemma miatt C_n' a $[C_{n-1}', C_{n+1}']$ szakasz felezőpontja, azaz $\bar{c}_n' = \frac{1}{2}(\bar{c}_{n+1}' + \bar{c}_{n-1}')$. Ebből és az indukciós feltevésből adódik, hogy

$$\bar{c}_{n+1}' = 2\bar{c}_n' - \bar{c}_{n-1}' = 2n(\bar{b} - \bar{a}) - (n - 1)(\bar{b} - \bar{a}) = (n + 1)(\bar{b} - \bar{a}).$$

2. eset. $\lambda = n \leq 0$ egész
Ismét legyen $\bar{c}_n = n(\bar{b} - \bar{a})$. Ekkor $n = -k$ valamely $k \geq 0$ egészre, ezért felhasználva, hogy C_{-k} a $[C_{-(k-1)}, C_{-(k+1)}]$ szakasz felezőpontja, k-ra vonatkozó indukció adja az állítást, hasonlóan, mint az 1. esetben.
3. eset. λ nem egész
Először tegyük fel, hogy λ racionális, azaz $\bar{c} - \bar{a} = \frac{p}{q}(\bar{b} - \bar{a})$, ahol p, q egész. Defniáljuk az egyenes D pontját $\bar{d}-\bar{a} = p(\bar{b}-\bar{a})$ egyenlőséggel, tehát $\bar{d}-\bar{a} = q(\bar{c} - \bar{a})$. Az 1. és 2. eset miatt $\bar{d}' - \bar{a}' = p(\bar{b}' - \bar{a}') = q(\bar{c}' - \bar{a}')$, azaz $\bar{c}' - \bar{a}' = \frac{p}{q}(\bar{b}' - \bar{a})'$.

Mivel az állítást tudjuk minden racionális λ-ra, és az affin leképezés folytonos az egyenesen, ezért $\bar{c}' - \bar{a}' = \lambda(\bar{b}' - \bar{a}')$ minden valós λ-ra. $\square$

Következmény Egy affinitás egy L egyenesre vett megszorítását egyértelműen meghatározza L két pontjának a képe.

Tétel Tetszőleges síkbeli vagy térbeli affinitás felírható $\bar{p} \mapsto \mathcal{M}\bar{p}+\bar{v}$ alakban, ahol $\mathcal{M}$ egy invertálható mátrix.

Bizonyítás Legyen Φ az affinitás, és legyen $\bar{v} = \Phi(\bar{o})$, ahol $\bar{o}$ a null vektor. Így a $\Omega(\bar{p}) = \Phi(\bar{p}) - \bar{v}$ is affin transzformáció, melyre $\Omega(\bar{o}) = \bar{o}$. Belátjuk, hogy Ω egy lineáris transzformáció.

Ha $\bar{c} = \lambda\bar{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\bar{c} - \bar{o} = \lambda(\bar{a} - \bar{o})$, így az előző tétel miatt $\Omega(\bar{c}) - \Omega(\bar{o}) = \lambda(\Omega(\bar{a}) - (\bar{o}))$. Másszóval $\Omega(\lambda\bar{a}) = \lambda \cdot \Omega(\bar{a})$.

Most belátjuk, hogy $\Omega(\bar{a}+\bar{b}) = \Omega(\bar{a})+\Omega(\bar{b})$ tetszőleges $\bar{a}$ és $\bar{b}$ vektorokra. Feltehető, hogy $\bar{a} \neq \bar{o}$. Ha $\bar{a}$ és $\bar{b}$ összefüggő, akkor $\bar{b} = \mu\bar{a}$ valamely $\mu \in \mathbb{R}$-re, tehát az előző bekezdés miatt

$$\Omega(\bar{a}+\bar{b}) = \Omega((\mu+1)\bar{a}) = (\mu+1)\Omega(\bar{a}) = \Omega(\bar{a})+\mu\cdot\Omega(\bar{a}) = \Omega(\bar{a})+\Omega(\mu\bar{a}) = \Omega(\bar{a})+\Omega(\bar{b}).$$

Ha $\bar{a}$ és $\bar{b}$ független, akkor létezik olyan P pont, hogy O, A, P, B ilyen sorrendben egy paralellogramma csúcsai, ezért $\Omega(O) = O, \Omega(A), \Omega(P), \Omega(B)$ is ilyen sorrendben egy paralellogramma csúcsai. Ebből adódik, hogy ebben az esetben is $\Omega(\bar{a}+\bar{b}) = \Omega(\bar{a})+\Omega(\bar{b})$, azaz Ω valóban egy lineáris transzformáció.

Legyen az $\mathcal{M}$ az Ω-hoz tartozó mátrix (az adott bázisban). Mivel Ω injektív, ezért $\mathcal{M}$ invertálható. Továbbá $\Phi(\bar{p}) = \mathcal{M}\bar{p} + \bar{v}$. $\square$

Következmény Az affinitások invertálhatóak, és csoportot alkotnak. Továbbá tetszőleges affinitás tartja a síkokat, illetve konvek alakzatokat konvex alakzatokba, és k-szögeket k-szögekbe visz.

Tétel Síkban, ha A_1, A_2, A_3 pontok nincsenek egy egyenesen, és A'_1, A'_2, A'_3 pontok nincsenek egy egyenesen, akkor pontosan egy olyan affinitás létezik, mely A_i-t A'_i-be viszi, $i = 1, 2, 3$.

Tétel Térben, ha A_1, A_2, A_3, A_4 pontok nincsenek egy síkban, és A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 pontok nincsenek egy síkban, akkor pontosan egy olyan affinitás létezik, mely A_i-t A'_i-be viszi, $i = 1, 2, 3, 4$.

10.1 Tengelyes affinitások

Definíció Egy L egyenes egy affinitás tengelye, ha L bármely pontja fixpont. Ilyenkor az affinitást tengelyes affinitásnak hívjuk.
Megjegyzés Ha L két pontja fixpont, akkor már L tengely.

Lemma Ha a síkban egy affinitás tengelye az első koordinátatengely, akkor $P(x, y)$ képe $P'(x + \alpha y, \mu y)$, ahol $\mu \neq 0$, azaz az affinitás a $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ mátrix-szal való szorzás.

Bizonyítás Mivel az origó $\bar{o}$ fixpont, ezért a transzformáció $\bar{p} \mapsto \mathcal{M}\bar{p} + \bar{v}$ alakú, ahol $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} t & \alpha \\ s & \mu \end{bmatrix}$ invertálható mátrix, azaz $\det \mathcal{M} = \mu \neq 0$. Mivel $\mathcal{M}(1, 0) = (t, s)$, és $(1, 0)$ is fixpont, ezért $t = 1$ és $s = 0$. $\square$

Következmény Ha a síkban egy L egyenes egy affinitás tengelye, akkor az affinitás egy L tengelyű merőleges nyújtás, és egy L tengelyű nyírás kompozíciója.
Megjegyzés A merőleges nyújtás arányát a tengelyes affinitás arányának hívjuk. Ha az első koordinátatengely a tengely, akkor a tengelyes affinitás aránya az előző lemmabeli μ.

Definíció $A(K)$ egy konvex síkidom területe, $V(K)$ egy konvex test térfogata.

Definíció Síkban vagy térben, ha a Φ affin transzformációt valamely bázisban $\Phi(P) = \mathcal{M}\bar{p} + \bar{v}$ alakba írjuk megfelelő $\mathcal{M}$ invertálható mátrixra, akkor $\det \mathcal{M}$-t a Φ determinánsának hívjuk, és $\det \Phi$-vel jelöljük.
Megjegyzés Egy affinitás determinánsa nem függ az orgó és a bázis megválasztásától.

Tétel Ha a síkban a K konvex síkidomot a Φ affinitás a K'-be viszi, akkor $A(K') = |\det\Phi| \cdot A(K)$.

Bizonyítás Miután egy konvex síkidomot lehet konvex sokszögekkel közelíteni, és bármely konvex sokszög háromszögekre osztható, ezért feltehető, hogy K egy háromszög. Vegyük fel úgy a koordinátrendszert, hogy az egyik csúcs az O origó, és a második csúcs B rajta van az első koordinátatengelyen. Legyen C a harmadik csúcs, és legyen $O' = \Phi O$, $B' = \Phi B$, $C' = \Phi C$. Továbbá C_0 olyan pont, melyre a $K_0 = OBC_0$ háromszög ilyen sorrendben hasonló a $K' = O'B'C'$ háromszöghöz. Ekkor K_0-t a K' be egy $\bar{p} \mapsto \lambda\mathcal{M}_1\bar{p} + \bar{v}$ alakú hasonlóság viszi, ahol $\lambda > 0$ a hasonlóság aránya, és $\mathcal{M}_1$ egy ortogonális mátrix, azaz $\det\mathcal{M}_1 = \pm 1$.

Az O, B, C pontokat O, B, C_0-ba vivő tengelyes affinitás tengelye az első koordinátatengely, így mátrixa $\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ alakú, azaz $\det\mathcal{M}_2 = \mu$. Továbbá, ha C_0 és C távolsága az OB egyenestől m_0 illetve m, akkor $m_0 = |\mu| \cdot m$. Így

$$A(K_0) = \tfrac{1}{2} \cdot m_0 \cdot OB = \tfrac{1}{2} \cdot |\mu| \cdot m \cdot OB = |\mu| \cdot A(K).$$

Ha K_0 szöge O-nál α, akkor ugyanennyi K' szöge O'-nál, ezért

$$\begin{aligned} A(K') &= \tfrac{1}{2} \cdot O'B' \cdot O'C' \cdot \sin\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot (\lambda\, OB) \cdot (\lambda\, OC_0) \cdot \sin\alpha \\ &= \lambda^2 A(K_0) = \lambda^2 |\mu| \cdot A(K). \end{aligned}$$

Másrészt Φ a hasonlóság és a tengelyes affinitás kompozíciója, vagyis $\Phi(\bar{p}) = \lambda \det\mathcal{M}_1 \det\mathcal{M}_2\bar{p} + \bar{v}$, azaz

$$\begin{aligned} \det\Phi &= \det(\lambda \cdot \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \det\mathcal{M}_1 \cdot \det\mathcal{M}_2 = \pm\lambda^2\mu. \end{aligned}$$

Tehát $A(K') = |\det\Phi| \cdot A(K)$. $\square$

Tétel Ha a térben a K konvex testet a Φ affinitás a K'-be viszi, akkor $V(K') = |\det\Phi| \cdot V(K)$.

10.2 Kör és gömb affin képe

Definíció *(Ellipszis)* Ha adottak F_1 és F_2 pontok, és $a > \frac{1}{2} F_1F_2$, akkor az $XF_1 + XF_2 = 2a$ feltételt kielégítő X pontok halmaza az F_1 és F_2 fókuszú, a félnagytengelyű ellipszis.
Megjegyzés Ha $F_1F_2 = 2c > 0$, akkor $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ a félkistengely. Továbbá, ha $F_1F_2 = 0$ (azaz $a = b$), akkor az ellipszis egy a sugarú körvonal.

Megjegyzés Ha $F_1(\alpha + c, \beta)$ és $F_2(\alpha - c, \beta)$ az ellipszis fókuszai, és a félnagytengely $a > c > 0$, akkor az ellipszis egyenlete

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1, \quad \text{ahol } b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ a félkistengely.}$$

Megjegyzés Az $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ egyenlet hiperbolát ad meg, mely fókuszai $F_1(\alpha + c, \beta)$ és $F_2(\alpha - c, \beta)$, ahol $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Továbbá a $4p(y-\beta) = (x-\alpha)^2$ egyenlet egy parabolát ad meg, mely fókusza $F(\alpha, \beta + p)$, és vezéregyenesének egyenlete $y = \beta - p$ valamely $p > 0$-ra.

Tétel *(Főtengelytétel a síkban)* Egy $\bar{i}, \bar{j}$ ortonormált bázisban tekintsük az $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ kifejezést az (x, y) pont függvényeként. Ekkor létezik olyan $\bar{i}', \bar{j}'$ ortonormált bázis, melyben ha $x\bar{i} + y\bar{j} = t\bar{i}' + s\bar{j}'$, akkor

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \alpha' t^2 + \gamma' s^2.$$

Megjegyzés Másszóval, ha az $\bar{i}, \bar{j}$ bázisban egy pontrendszer egyenlete

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \omega = 0,$$

akkor az $\bar{i}', \bar{j}'$ bázisban az egyenlet

$$\alpha' t^2 + \gamma' s^2 + \delta' t + \varepsilon' s + \omega' = 0.$$

Bizonyítás Ha $\beta = 0$, akkor készen vagyunk, tehát feltesszük, hogy $\beta \neq 0$. Megfelelő $\varphi \in [0, \pi]$-re $\bar{i}' = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ és $\bar{j}' = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Ha $x\bar{i} + y\bar{j} = t\bar{i}' + s\bar{j}'$, akkor $x = t\cos\varphi - s\sin\varphi$ és $y = t\sin\varphi + s\cos\varphi$. Ezt behelyettesítve $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ felírható $\alpha' t^2 + \beta' ts + \gamma' s^2$ alakban, ahol

$$\begin{aligned} \beta' &= -2\alpha\cos\varphi\sin\varphi + \beta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\gamma\sin\varphi\cos\varphi \\ &= (\gamma - \alpha)\sin 2\varphi + \beta\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Tehát, ha $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$, azaz $\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}$, akkor $\beta' = 0$. $\square$

Tétel A sík egy affin transzformációja egy körvonalat ellipszisbe visz.

Bizonyítás Legyen Φ az affin transzformáció, és legyen $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ a K körvonal egyenlete. A K képét K' jelöli. Mivel Φ inverze is affin leképezés, így $\bar{p} \mapsto \mathcal{M}\bar{p} + \bar{v}$ alakú, ahol $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ és $\bar{v} = (v_1, v_2)$. Másszóval, ha $\Phi(x,y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, akkor $x = a\tilde{x} + b\tilde{y} + v_1$ és $y = c\tilde{x} + d\tilde{y} + v_2$. Ezt behelyettesítve K egyenletébe kapjuk K' egyenletét. Ezek szerint K' egyenlete az $\bar{i}, \bar{j}$ bázisban

$$(a\tilde{x} + b\tilde{y} + v_1 - x_0)^2 + (c\tilde{x} + d\tilde{y} + v_2 - y_0)^2 = r^2,$$

amely

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \omega = 0,$$

alakú megfelelő együtthatókkal. A Főtengely tétel miatt létezik olyan ortonormált $\bar{i}', \bar{j}'$ bázis, ahol K' egyenlete

$$\alpha' t^2 + \gamma' s^2 + \delta' t + \varepsilon' s + \omega' = 0.$$

Itt esetleg -1-gyel való szorzás után feltehető, hogy $\alpha' \geq 0$.

Tudjuk, hogy K' korlátos (mivel egy korlátos alakzat affin képe), így K' nem tartalmazhat egyenest, és K' nem lehet parabola vagy hiperbola. Továbbá K'-nek végtelen sok pontja van, ezért K' egyenletében α' és γ' pozitív. Ebből következik, hogy K' ellipszis. $\square$

Példa Az $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a, b > 0$, mátrix-szal való szorzás az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körvonalat az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszisbe viszi. Tehát tetszőleges ellipszis előáll kör affin képeként.

Tétel Az a és b fétengelyű ellipszis területe $ab\pi$.

Bizonyítás Legyen E az ellipszis. Megfelelő bázisban a fenti $\mathcal{M}$ mátrix az egységkört az ellipszisbe képezi, ezért $A(E) = |\det \mathcal{M}| \cdot \pi = ab\pi$. $\square$

Definíció *(Ellipszoid)* Az ellipszoid az a felület, melynek egyenlete megfelelő x, y, z koordinátarendszerben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{ahol } a, b, c > 0 \text{ a féltengelyek.}$$

Tétel A tér egy affin transzformációja egy gömböt ellipszoidba visz, és tetszőleges ellipszoid előáll gömb affin képeként.

11 Körökre vonatkozó hatvány

Tétel *(Szelő tétel)* Ha a P pontot nem tartalmazza az O középpontú, r sugarú körlemez, és egy P-ből induló szelő A és B pontban metszi a körvonalat, továbbá az egyik P-ből húzott érintő az E pontban érint, akkor

$$PA \cdot PB = PO^2 - r^2 = PE^2.$$

Bizonyítás Miután POE háromszög E-nel fekvő szöge derékszög az érintés miatt, ezért $PO^2 - r^2 = PE^2$.

Tekintsük a P-n és O-n átmenő egyenest, mely A_0 és B_0 pontokban metszi a körvonalat. Feltehető, hogy $PA < PB$ és $PA_0 < PB_0$, így

$$PA_0 \cdot PB_0 = (PO - r) \cdot (PO + r) = PO^2 - r^2.$$

Ha $A = A_0$ és $B = B_0$, akkor készen vagyunk. Egyébként a kerületi szögek tétele miatt $PBA_0\angle = PB_0A\angle$. Miután PBA_0 és PB_0A háromszögek P-nél fekvő szögei közösek, ezért a háromszögek a csúcsok ilyen sorrendje mellett hasonlóak. Így $\frac{PB}{PB_0} = \frac{PA_0}{PA}$, azaz $PA \cdot PB = PA_0 \cdot PB_0$. $\square$

Tétel Ha a P pont az O középpontú, r sugarú körvonalon belül fekszik, és egy P-ből átmenő szelő az A és B pontban metszi a körvonalat, akkor

$$PA \cdot PB = r^2 - PO^2.$$

Bizonyítás Tekintsük a P-n és O-n átmenő egyenest, mely A_0 és B_0 pontokban metszi a körvonalat. Feltehető, hogy $PA_0 < PB_0$, így

$$PA_0 \cdot PB_0 = (r - PO) \cdot (r + PO) = r^2 - PO^2.$$

Ha $A = A_0$ és $B = B_0$, akkor készen vagyunk. Egyébként a kerületi szögek tétele miatt $PB_0A\angle = PBA_0\angle$ és $PAB_0\angle = PA_0B\angle$, tehát PAB_0 és PA_0B háromszögek a csúcsok ilyen sorrendje mellett hasonlóak. Így $\frac{PB}{PB_0} = \frac{PA_0}{PA}$, azaz $PA \cdot PB = PA_0 \cdot PB_0$. $\square$

Definíció Adott P pont és O középpontú, r sugarú kör esetén a P-nek a körre vonatkozó hatványa $PO^2 - r^2$.
Megjegyzés A P-nek a körre vonatkozó hatványa

- pozitív, ha P a körlemezen kívül van,
- nulla, ha P a körvonalon van,
- negatív, ha P a körvonalon belül van.

Tétel Ha két kör középpontjai különböznek, akkor azon pontok halmaza, melyek hatványa a két körre megegyezik, az egy egyenes, mely merőleges középpontokat összekötő egyenesre.
Megjegyzés A fenti egyenes a két kör hatványvonala. Ha a két kör érinti egymást, akkor a hatványvonal a közös érintő, és ha a két körvonal két pontban metsz, akkor a hatványvonal a két pont egyenese, hiszen a közös pontokban mindkét körre vonatkozó hatvány nulla.

Bizonyítás Legyenek a két kör középpontjai $O_1(x_1, y_1)$ és $O_2(x_2, y_2)$, és a sugaraik r_1 és r_2. Így $P(x, y)$ hatványa pontosan akkor egyenlő a két körre, ha $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$, azaz

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2.$$

A négyzetek kifejtése után adódik, hogy

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = x^2 + y^2 - 2x_2x - 2y_2y + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2,$$

amely ekvivalens a következő egyenlettel:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + r_1^2 - r_2^2.$$

Ez egy olyan egyenes egyenlete, melynek egy normálvektora $2(\bar{o}_2 - \bar{o}_1) = (2(x_2 - x_1), 2(y_2 - y_1))$. Így az egyenes merőleges az O_1O_2 egyenesre. $\square$

Következmény Ha három kör középpontjai nincsenek egy egyenesen, akkor pontosan egy olyan pont található, mely hatványai a három körre megegyeznek. Ezt a
Megjegyzés Ez a pont a három kör hatványpontja, mely a három hatványvonal közös pontja.

Bizonyítás Legyenek O_1, O_2 és O_3 a körközéppontok, és legyen L az O_1 és O_2 középpontú körök hatványvonala, és legyen L' az O_2 és O_3 középpontú körök hatványvonala. Itt L és L' nem párhuzamos, mert merőlegesek az O_1O_2 illetve az O_2O_3 egyenesekre, melyen nem esnek egybe. Így a P metszéspontjuk hatványa megegyezik mindhárom körre. Ebből az is következik, hogy P rajta van az O_1 és O_3 középpontú körök hatványvonalán is. $\square$

12 Inverzió a síkon

Definíció A síkon adott egy O középpontú, r sugarú kör, melyet az inverzió alapkörének hívjuk. Egy $P \neq O$ pontnak a körre vonatkozó inverze az a P' pont, mely az O kezdőpontú, P-n áthaladó félegyenesen van, és

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Megjegyzés A P' inverz képe P. Továbbá $P = P'$ pontosan akkor, ha P rajta van a körvonalon, és ha P belül illetve kívül van a körvonalon, akkor P' kívülre illetve belülre kerül.

Lemma Ha egy O középpontú inverzió A, B pontokat A', B'-be viszi, ahol O, A, B nincs egy egyenesen, akkor OAB háromszög hasonló $OB'A'$ háromszöghöz, a csúcsok ilyen sorrendjében.

Bizonyítás A két háromszög O-nál fekvő szögei egybeesnek, továbbá az $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ összefüggés miatt $\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA}$. □

Lemma Egy O középpontú inverzió egy, az O-t nem tartalmazó körvonalat egy O-t nem tartalmazó körvonalba viszi. Továbbá O és a két körzéppont egy egyenesbe esik.
Megjegyzés Általában a körközéppont képe nem lesz körközéppont.

Bizonyítás Egy objektum inverz képét $'$-vel jelölöm. Legyen K a körvonal. Ha O egyben K középpontja, akkor K' is egy O középpontú körvonal.

Tehát tegyük fel, O nem középpontja K-nak, és legyenek A és B az O-t és K középpontját összekötő egyenes metszéspontjai K-val, ahol $OA < OB$. Belátjuk, hogy K' az $[A', B']$ átmérőjű körvonal. Legyen $P \in K$, $P \neq A, B$.

1. eset. O benne van a K által határolt körlemezben.
Az OAP háromszög hasonló az $OP'A'$ háromszöghöz, és OBP háromszög hasonló az $OP'B'$ háromszöghöz, ezért $APB\angle = \frac{\pi}{2}$ miatt

$$A'P'B'\angle = OP'A'\angle + OP'B'\angle = OAP\angle + OBP\angle = \pi - APB\angle = \frac{\pi}{2}$$

Így P' rajta van az $[A', B']$ átmérőjű körvonalon.

2. eset. O nincs benne a K által határolt körlemezben.
Az OAP háromszög hasonló az $OP'A'$ háromszöghöz, és OBP háromszög hasonló az $OP'B'$ háromszöghöz. Mivel $OAP\angle$ külső szöge az APB háromszögnek, és $OB' < OA'$, ezért

$$\begin{aligned} A'P'B'\angle &= OP'A'\angle - OP'B'\angle = OAP\angle - OBP\angle \\ &= (\pi - BAP\angle) - ABP\angle = APB\angle = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Így P' rajta van az $[A', B']$ átmérőjű körvonalon. □

Lemma Egy O középpontú inverzió egy, az O-n átmenő egyenest önmagába visz.

Lemma Legyen az O-ból az O-t nem tartalmazó L egyenesre bocsájtott merőleges talpontja T. Ekkor egy O középpontú inverzió az L-t az $[O,T']$ átmérőjű körvonalba viszi, ahol T' a T inverz képe.

Bizonyítás Legyen $P \in L$, $P \neq T$. Mivel OTP háromszög hasonló $OP'T'$ háromszöghöz, ezért $OP'T'\angle = OTP\angle = \frac{\pi}{2}$. Így P' rajta van az $[O,T']$ átmérőjű körvonalon. $\square$

Definíció *Körvonalak szöge, körvonal és egyenes szöge*
Ha két körvonal két pontban metszi egymást, akkot szögük a valamely metszéspontban vett érintők szöge. Továbbá, ha egy egyenes egy körvonalat két pontban metsz, akkot szögük a valamely metszéspontban vett érintő és az egyenes szöge.

Tétel Az inverzió tartja körvonalak és egyenesek szögét.

Bizonyítás Legyen O az inverzió középpontja. Bármely objektum inverz képét $'$-vel jelöljük.

1. eset: Metsző L_1 és L_2 egyenesek szöge
Legyen $\widetilde{L}_i$ az O-n átmenő, az L_i-vel párhuzamos egyenes, $i = 1, 2$, tehát vagy $L_i' = L_i = \widetilde{L}_i$, vagy L_i' egy O-n átmenő körvonal, melyet $\widetilde{L}_i$ érint O-ban. Így L_1 és L_2 szöge megegyezik $\widetilde{L}_1$ és $\widetilde{L}_2$ szögével, ami viszont egyenlő L_1' és L_2' szögével.

2. eset. A és B pontban metsző K_1 és K_2 körvonalak szöge
Legyen L_i a K_i érintője A-ban, $i = 1, 2$. Itt K_1 és K_2 szöge megegyezik L_1 és L_2 szögével A-ban, amely az 1. eset miatt L_1' és L_2' szöge. Ez pedig az érintés miatt megegyezik K_1' és K_2' szögével.

3. eset. A és B pontban metsző K körvonal és L egyenes szöge
Legyen L_0 a K érintője A-ban. Így K és L szöge megegyezik L_0 és L szögével A-ban, amely az 1. eset miatt L_0' és L' szöge. Ez pedig az érintés miatt megegyezik K' és L' szögével. $\square$

Megjegyzés Két körvonal pontosan akkor merőleges, ha a metszésponthoz tartozó sugarak merőlegesek. Egy egyenes és egy kör pontosan akkor merőleges, ha az egyenes átmegy a kör középpontján.

Tétel Egy K körvonal inverz képe pontosan akkor önmaga, ha vagy K az inverzió alapköre, vagy K merőleges az inverzió alapkörére.

Bizonyítás Legyen az inverzió alapkörének középpontja O, és sugara r.

Ha K megegyezik az alapkörrel, akkor nyilván önmaga inverz képe. Egyébként legyen $A \in K$ nem az alapkörön fekvő pont. Ennek képe A' is K-n van, ezért A' az O-ból induló, A-n áthaladó félegyenes második metszéspontja K-val. Ebből adódik, hogy O kívül van K-n. Legyen $E \in K$ az egyik O-ból K-hoz húzott érintő érintési pontja. Először az inverzió definíciójából, majd a szelőszakaszokra vonatkozótételből következik, hogy $r^2 = OA \cdot OA' = OE^2$. Vagyis E közös pontja az alapkörnek és K-nak, és a hozzá tartozó sugarak merőlegesek az érintés miatt. Tehát K és az alapkör merőlegesek egymásra.

Megfordítva, ha K és az alapkör merőlegesek egymásra, akkor az egyik közös E pontban OE érinti K-t, és persze $OE = r$. Így tetszőleges $A \in K$ pontra, ha az O-ból induló, A-n áthaladó félegyenes második metszéspontja K-val B, akkor $OA \cdot OB = OE^2 = r^2$, tehát B az A inverz képe. Másszóval K inverz képe önmaga. $\square$

13 Inverzió a térben

Definíció A térben adott egy O középpontú, r sugarú gömb. Egy $P \neq O$ pontnak a gömbre vonatkozó inverze az a P' pont, mely az O kezdőpontú, P-n áthaladó félegyenesen van, és $OP \cdot OP' = r^2$.
Megjegyzés A P' inverz képe P. Továbbá $P = P'$ pontosan akkor, ha P rajta van a gömbfelszínen, és ha P belül illetve kívül van a gömbfelszínen, akkor P' kívülre illetve belülre kerül. A következő három lemma közvetlen következménye a megfelelő síkbeli állításoknak.

Lemma A térben egy O középpontú inverzió egy, az O-n átmenő síkot önmagába visz.

Lemma A térben legyen az O-ból az O-t nem tartalmazó S síkra bocsájtott merőleges talpontja T. Ekkor egy O középpontú inverzió az S-t az $[O, T']$ átmérőjű gömbfelszínbe viszi, ahol T' a T inverz képe.

Lemma Egy O középpontú inverzió egy, az O-t nem tartalmazó gömbfelszínt egy O-t nem tartalmazó gömbfelszínbe viszi. Továbbá O és a két gömbközéppont egy egyenesbe esik.

Definíció *Sztereografikus projekció*
Legyenek E és D egy G gömbfelszín átellenes pontjai ("északi és déli pólus"), és legyen S a D-beli érintősík. A gömbfelszín bármely P pontjához az S sík és az E kezdőpontú, P-n áthaladó félegyenes metszéspontját hozzarendelő transzformációt sztereografikus projekciónak nevezzük.

Tétel A fenti jelölést használva, a sztereografikus projekció egy a G gömbfelszínen található körvonalat vagy egyenesbe visz (ha a körvonal tartalmazza E-t), vagy körvonalba (ha a körvonal nem tartalmazza E-t). Továbbá a sztereografikus projekció tartja a körvonalak szögét.

Bizonyítás Az E középpontú, ED sugarú gömbre vett inverzió D-t fixen hagyja, így G-t S-be viszi. Másszóval a sztereografikus projekció megegyezik ezen inverzió megszorításával a G gömbfelületre. Egy objektum inverz képét $'$-vel jelölöm.

Legyen K egy tetszőleges G-n fekvő körvonal, és legyen H a síkja. Így $K' = G' \cap H' = S \cap H'$. Ha $E \in K$, azaz $E \in H$, akkor $H' = H$, és ezért K' az $S \cap H$ egyenes. Ha $E \notin K$, akkor könnyen látható, hogy $E \notin H$, és ezért H' egy gömbfelület, mely metszete S-sel egy körvonal. Így K' körvonal.

Még meg kell mutatnunk, ha $K_1, K_2 \subset G$ körvonalak A és B pontokban metszenek, akkor szögük megegyezik K_1' és K_2' szögével. Feltehető, $A \neq E$, és legyen L_i a K_i körvonal A-beli érintőegyenese, $i = 1, 2$. Így K_1 és K_2 szöge megegyezik L_1 és L_2 szögével A-ban, és K_1' és K_2' szöge megegyezik L_1' és L_2' szögével A'-ben. Legyen továbbá $\widetilde{L}_i$ az E-n átmenő, az L_i-vel párhuzamos egyenes, $i = 1, 2$. Itt L_i' az L_i és $\widetilde{L}_i$ síkjában fekvő, A'-t és E-t tartalmazó körvonal, melyet $\widetilde{L}_i$ az E-ben érint, $i = 1, 2$. Tehát

$$\begin{aligned} K_1 \text{ és } K_2 \text{ szöge} &= L_1 \text{ és } L_2 \text{ szöge } A\text{-ban} = \widetilde{L}_1 \text{ és } \widetilde{L}_2 \text{ szöge } E\text{-ben} \\ &= L_1' \text{ és } L_2' \text{ szöge } E\text{-ben} = L_1' \text{ és } L_2' \text{ szöge } A'\text{-ben} \\ &= K_1' \text{ és } K_2' \text{ szöge } A'\text{-ben,} \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk. □

Megjegyzés Ismert, hogy a földfelszín semmilyen darabjáról nem lehet olyan síktérképet készíteni, mely pontosan tartja a távolságarányokat. Gyakran készítenek térképet sztereografikus projekció segítségével, mert ez az eljárás megtartja legalább a szögeket, ami fontos pl. a hajózásnál.

14 Euklidészi szerkesztések

Definíció *Euklidészi (körzővel és vonalzóval történő) szerkesztések*
Azt mondjuk, hogy adott pontokból, körvonalakból és egyenesekből egy síbeli pontokból, egyenesekből és körvonalakból álló alakzat körzővel és vonalzóval megszerkeszthető, ha következő lépésekkel el lehet jutni hozzájuk:

- Adott vagy megszerkesztett ponttal, mint középponttal, és tetszőleges sugárral körvonalat húzunk.
- Két, már adott vagy megszerkesztett ponton át egyenest húzunk.
- Két, már adott vagy megszerkesztett egyenesnek vagy körvonalnak vesszük a metszéspontját.

Megjegyzés *Alap szerkesztések,* melyekre sok szerkesztés visszavezethető.

- Adott szakasz felezőpontja, felezőmerőlegese.
- Merőleges egyenes adott pontban adott egyenesre.
- Párhuzamos adott pontban adott, a pont nem tartalmazó egyenessel.
- Adott szakaszt adott racionális arányban osztó pont.
- Adott körvonalhoz adott külső pontból húzott érintő.
- Adott szög felezője.
- Adott szög átmásolása olyan helyzetbe, ahol az egyik szögszár adott.
- Adott hosszúságú szakaszok mértani közepe, azaz, egy $\sqrt{ab}$ hosszú szakasz, ha adott egy a és egy b hosszú szakasz.
- Adott oldalú szabályos háromszög, négyzet, szabályos hatszög.

Lemma Az r sugarú körbe írt szabályos tízszög oldala $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$.

Bizonyítás Legyen $[A, B]$ a szabályos tízszög egy oldala, és legyen O a körülírt kör középpontja. Így az AOB háromszögben $OA = OB = r$, $AOB\angle = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$, és $OAB\angle = OBA\angle = \frac{2\pi}{5}$. Az AOB háromszögben messe az A szög szögfelezője P-ben az $[O, B]$ oldalt, tehát $PAO\angle = PAB\angle = \frac{\pi}{5}$. Ebből adódik, hogy PAO háromszög egyenlőszárú, pontosabban $PA = PO$. Továbbá PAB és AOB háromszögek két-két szögük egyezősége miatt ilyen sorrendben hasonlóak. Ezért PAB háromszögben $AB = PA$, tehát $a = AB = PA = PO$ és $PB = BO - PO = r - a$. Másrészt a hasonlóságból következik, hogy $\frac{AB}{OB} = \frac{PB}{AB}$, azaz $\frac{a}{r} = \frac{r-a}{a}$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$a^2 - ra - r^2 = 0.$$

Az a-ban másodfokú egyenlet két gyöke $\frac{-r\pm\sqrt{r^2+4r^2}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \cdot r$. Mivel $a > 0$, ezért $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$. $\square$

Tétel Adott sugarú körbe szabályos ötszög vagy tízszög szerkeszthető.

Bizonyítás Legyen O a körközéppont, és A pedig a körvonal egy pontja. Szerkesszük meg az OA egyenesre az O-ban merőleges L egyenest, majd vegyük fel ezen azon B pontot, melyre $OB = \frac{1}{2} OA$. Ezek után legyen C az L-nek, és a B középpontú, BA sugarú körvonalnak az a metszete, melyre $O \in [B, C]$. Azt állítom, hogy ekkor OC a szabályos tízszög oldala, tehát a tízszög így megszerkeszthető. A szabályos ötszöget úgy kapjuk, hogy vesszük szabályos tízszög minden második csúcsát.

Az állításhoz legyen $OA = r$ a kör sugara, így $OB = r/2$. A Pitagorasz-tétel miatt $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} r$, ezért $OC = BC - BO = BA - BO = \frac{\sqrt{5}}{2} r - \frac{1}{2} r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$. Ez pedig a körbeírt szabályos tízszög oldala az előző lemma miatt. $\square$

Megjegyzés Kiszámolható, hogy a szabályos ötszög egy oldala a fenti bizonyításbeli AC távolság.

Megjegyzés Adott a oldalú szabályos ötszög vagy tízszög is szerkeszthető. Például ötszög esetén tetszőleges $\tilde{r}$ körsugárhoz a fenti módszerrel szerkesszük meg az ilyen sugarú körbe írt szabályos ötszög $\tilde{a}$ oldalát, majd a párhuzamos szelők tétele alapján azt az r értéket, melyre $\frac{a}{r} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{r}}$. Tehát az a oldalú szabályos ötszöget az r sugarú körbe tudjuk beírni.

Megjegyzés Ismert, hogy nem lehet adott szöget harmadolni, vagy adott oldalú szabályos hétszöget vagy 11-szöget szerkeszteni. De lehet például adott oldalú szabályos 17-szöget szerkeszteni.

15 Szerkesztés csak körzővel

Definíció *Mascheroni-féle, azaz csak körzővel történő szerkesztések*
Egy egyenest akkor tekintünk adottnak, ha két pontja adott, és egy körvonalat, ha középpontja és egy pontja adott. Azt mondjuk, hogy adott pontokból, körvonalakból és egyenesekből egy síbeli pontokból, egyenesekből és körvonalakból álló alakzat csak körzővel megszerkeszthető, ha következő lépésekkel el lehet jutni hozzájuk:

- Adott vagy megszerkesztett ponttal, mint középponttal, és tetszőleges sugárral körvonalat húzunk.
- Két, már adott vagy megszerkesztett körvonalnak vesszük a metszéspontját.

Lemma Ha adott $A \neq B$ és valamely $m \geq 2$ egész, akkor csak körzővel megszerkeszthető az az A kezdőpontú, B-n áthaladó félegyenesen fekvő C pont, melyre $AC = k \cdot AB$.

Bizonyítás Adott $A \neq B$ esetén $m \geq 0$-ra indukcióval bizonyítom, hogy ha $\bar{c} - \bar{a} = m \cdot (\bar{b} - \bar{a})$ (ami a lemmabeli feltétel), akkor C csak körzővel megszerkeszthető. Ha $m = 0$, akkor $C = A$, és ha $m = 1$, akkor $C = B$, így ekkor nyilván teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy $m \geq 2$, és definiáljuk C_1 és C_2 pontokat a $\bar{c}_1 - \bar{a} = (m-1) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$ és $\bar{c}_2 - \bar{a} = (m-2) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$ feltétellel, tehát C_1 és C_2 csak körzővel megszerkeszthető az indukciós feltevés miatt. Legyenek D és $E \neq C_1$ olyan pontok, hogy D távolsága C_1-től és C_2-től is $AB = C_1C_2$, és E távolsága D-től és C_1-től is AB. Így C távolsága E-től és C_1-től is AB. Miután D csak körzővel megszerkeszthető C_1 és C_2 ismeretében, továbbá E a D és C_1 ismeretében, végül C az E és C_1 ismeretében, C szerkeszthetőségét beláttuk. $\square$

Lemma Ha adott az inverzió K alapkörvonala, akkor tetszőleges K-n kívüli P pontnak az inverz képe csak körzővel megszerkeszthető.

Bizonyítás Legyen a K középpontja O, és sugara r. Legyen R és S a K-nak és a P középpontú, PO sugarú körvonalnak a metszéspontjai (ezek léteznek, mert a körvonalnak van pontja K-n belül és kívül is). Továbbá legyen Q az R és az S középpontú, $OR = OS = r$ sugarú körvonalaknak O-tól különböző metszéspontja. Így Q csak körzővel megszerkeszthető.

Mivel O, Q és P távolsága R-től és S-től megegyezik, ezért a három pont rajta van $[R, S]$ szakasz felezőmerőlegesén. Tehát Q rajta van az O kezdőpontú, P-n áthaladó félegyenesen. Másrészt OPR és ORQ egyenlőszárú háromszögek alapon fekvő szögei O-nál egybeesnek, vagyis a két háromszög a csúcsok ilyen sorrendje mellett hasonló. Ebből adódik, hogy $\frac{OP}{OR} = \frac{OR}{OQ}$, azaz $OP \cdot OQ = OR^2 = r^2$. Tehát Q a P inverz képe. $\square$

Tétel Ha adott az inverzió alapköre, akkor tetszőleges P pontnak az inverz képe csak körzővel megszerkeszthető.

Bizonyítás Legyen K az alapkörvonal O középponttal és r sugárral, és jelölje az erre vonatkozó inverz képet $'$. Ha $P \in K$, akkor $P' = P$, így nem is kell szerkeszteni. Ha P a K-n kívül van, akkor az előző lemma adja a szerkesztést. Tehát feltehetjük, hogy P belül van K-n. Válasszunk olyan $m \geq 2$-t, hogy ha Q az O kezdőpontú, P-n áthaladó félegyenesen fekvő azon pont, melyre $OQ = m \cdot OP$, akkor a Q pont kívül van K-n. Mivel $OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'$, ezért $OP' = m \cdot OQ'$. Tehát Q csak körzővel megszerkeszthető O-ból és P-ből az első lemma miatt, Q' a Q-ból második lemma miatt, és P' az O-ból és Q'-ből megint az első lemma miatt. $\square$

Lemma Ha inverzió alapkörének középpontja O, és $P \neq O$, akkor az $[O, P]$ szakasz felozőmerőleges egyenesének az inverz képe a P' középpontú, $P'O$ sugarú körvonal, ahol P' a P inverz képe.

Bizonyítás Legyen T az $[O, P]$ szakasz felozőpontja, tehát az O-ból az L felozőmerőlegesre bocsájtott merőleges talppontja. Láttuk, hogy L inverz képe, melyet L' jelöl, az $[O, T']$ szakasz, mint átmérő fölé emelt körvonal, ahol T' a T inverz képe. Ekkor $OT \cdot OT' = OP \cdot OP'$ és $OT = \frac{1}{2} OP$ miatt $OP' = \frac{1}{2} OT$, ezért valóban L' középpontja P'. $\square$

Lemma Ha adott három, nem egyenesen fekvő pont, akkor csak körzővel megszerkeszthető a rajtuk átmenő körvonal.

Bizonyítás Legyen A, B és C a három pont. Legyen K egy tetszőleges A középpontú körvonal, mely a bizonyításbeli inverzió alapköre.

Az A, B és C-n átmenő körvonal megszerkeszthetéséhez elég a az ő Q középpontját megszerkesztheteni. Ha L_B és L_C az $[A, B]$ illetve $[A, C]$ szakasz felezőmerőlegese, akkor a keresett Q az L_B és L_C metszete. Q inverz képe legyen Q'. Az előző lemma miatt csak körzővel megszerkeszthetőek L_B és L_C inverz képei, melyek metszete A és Q'. Így Q'-t már megszerkesztetük, és ebből Q-t is megszerkeszthetjük, mint Q' inverz képét. $\square$

Lemma Ha adott az inverzió alapköre, akkor tetszőleges körvonalnak illetve egyenesnek az inverz képe megszerkeszthető csak körzővel.

Bizonyítás Az inverzió alapkörének középpontját O-val, és egy objektum inverz képét $'$-vel jelölöm. Tekintsünk egy L egyenest. Ha $O \in L$, akkor $L' = L$, így nincs mit szerkeszteni. Ha $O \notin L$, akkor válasszunk tetszőleges $A, B \in L$ pontot, szerkesszük meg A', B'-t, majd az előző lemma alapján szerkesszük meg az O, A' és B' pontokon áthaladó körvonalat, mely a keresett L'.

Most tekintsünk egy K körvonalat. Ha $O \in K$, akkor K' a K két O-tól különböző tetszőleges pontjának inverz képén átmenő egyenes. Ha $O \notin K$, akkor válasszunk tetszőleges $A, B, C \in K$ pontot, szerkesszük meg A', B', C'-t, majd az előző lemma alapján szerkesszük meg az A' B' és C' pontokon áthaladó körvonalat. Ez a körvonal K'. $\square$

Tétel *(Mohr-Mascheroni)* Ha egy objektum körzővel és vonalzóval megszerkeszthető, akkor csak körzővel is.

Bizonyítás Két olyan lépés van, mely szerepel vonalzóval és körző való szerkeszthetőség lépései között, de nem szerepel a csak körzővel való szerkeszthetőség lépései között. Ezek az adott egyenes és körvonal metszete, illetve az adott két egyenes metszete. Így azt kell megmutatnunk, hogy ezt a két lépést véghez tudjuk vinni csak körzővel.

Adott L egyeneshez és K körvonalhoz válasszunk egy L-n és K-n nem fekvő O pontot, és egy tetszőleges O középpontú kört, mely az inverzió alapköre lesz. Megszerkesztjük L és K inverzét, melyek körök, és így kijelölhetőek az ő metszéspontjaik (ha vannak). Majd ezen metszéspontok inverz képei az L és K metszéspontjai.

Adott L_1 és L_2 egyeneshez válasszunk egy L_1-n és L_2-n nem fekvő O pontot, és egy tetszőleges O középpontú kört, mely az inverzió alapköre lesz. Megszerkesztjük L_1 és L_2 inverzét, melyek O-n áthaladó körök, és így kijelölhető a két kör O-tól különböző metszéspontja. Végül ezen metszéspont inverz képe az L_1 és L_2 metszéspontja. $\square$

Megjegyzés A csak körzővel való szerkesztés során a szerkesztés lépéseihez esetleg különböző körökre végzünk inverziót. Például adott L egyenes és K körvonal metszéspontjainak megszerkesztésénél az O pont nem illeszkedett K-ra, így K inverz képére sem, melyet K' jelölök. A K'-nek először megszerkesztjük három pontját, melyek három $A, B, C \in K$ pont A', B', C' pont inverz képe (az O középpontú inverziót használva). A K' középpontjának meghatározásához viszont A' középponttú inverziót kell használni.