Geometria 1, intenzív
6. gyakorlat

Megjegyzés: Ha ismerjük egy $\mathbb{R}^d$-beli P politóp hiperlapjait, akkor P alacsonyabb dimenziós lapjait a hiperlapok nem üres metszeteiként kapjuk.

1. Mik a k-dimenziós lapjai a $\operatorname{konv}\{v_0, \ldots, v_d\}$ szimplexnek $\mathbb{R}^d$-ben?

2. Hány k-dimenziós lapja van $\mathbb{R}^d$-beli szimplexnek, $k = 0, \ldots, d-1$?

3. Mik a hiperlapok a $[-1, 1]^d$ kocka esetén? Ezeket ismerve, mik a k-dimenziós lapok?

4. Hány k-dimenziós lapja van $\mathbb{R}^d$-beli kockának, $k = 0, \ldots, d-1$?

5. Legyenek A és B $\mathbb{R}^d$-beli véges halmazok. Ha bármely legfeljebb $d+2$ elemű $Z \subset A \cup B$ halmazra $Z \cap A$ és $Z \cap B$ szigorúan elválasztható egy (Z-tól függő hipersíkkal), akkor A és B is szigorúan elválasztható egy hipersíkkal.
   Ötlet: Keresünk $v \in \mathbb{R}^d$ és $t \in \mathbb{R}$-t (azaz $(v, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$-t), melyekre $v \cdot a < t$ minden $a \in A$-ra, és $v \cdot b > t$ minden $b \in B$-re. Tehát $a \in A$ esetén legyen $C_a = \{(v, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : v \cdot a < t\}$, $b \in B$ esetén legyen $C_b = \{(v, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : v \cdot b > t\}$, és meg kell mutatni, hogy $\cap_{x \in A \cup B} C_x$ nem üres.

6. Tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli 299 elemű A halmazhoz létezik p pont, hogy bármely p-t tartalmazó zárt félsík A-nak legalább 100 elemét tartalmazza.
   Ötlet: Legyen G egy A-t tartalmazó körlemez, és legyen $\mathcal{H}$ azon $G \cap l^+$ alakú metszetek halmaza, ahol l^+ olyan félsík, mely A-nak legalább 200 pontját tartalmazza. Mutasd meg, hogy $\mathcal{H}$ elemeinek a metszete tartalmaz egy p pontot.