Geometria 1, intenzív

1. gyakorlat

1. Legyen M az $ABCD$ parallelogramma BC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja, N pedig a CD oldal D-hez közelebbi negyedelőpontja. Milyen arányban osztja egymást az AM és a BN szakasz?

2. (a) Bizonyítsd be, hogy ha O az ABC háromszög körülírt körének középpontja, és M a magasságpontja, akkor
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$
   (b) Bizonyítsd be, hogy O, M és az S súlypont egy egyenesen van (Euler egyenes).

3. (a) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$-re
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$
   (b) Bizonyítsd be, hogy ha $ABCD$ tetraéder két szemközti élpárja merőleges egymásra, akkor a harmadik élpár is az.

4. Milyen transzformáció $\mathbb{R}^2$-ben két párhuzamos, t távolságú egyenesre való tükrözés szorzata?

5. Milyen transzformáció $\mathbb{R}^2$-ben két metsző, α szögű egyenesre való tükrözés szorzata?

6. $\mathbb{R}^2$ irányítást tartó izometriái az eltolások, és a pont körüli elforgatások.

7. $\mathbb{R}^2$ irányítást váltó izometriái előállnak egy egyenesre való tükrözés, és az egyenessel párhuzamos eltolás szorzataként.

8. $*$ (Napóleon tétele) Állítsunk egy háromszög oldalaira a síkjában kifelé szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai egy szabályos háromszg csúcsai.

9. $*$ Adott $\mathbb{R}^2$-ben páratlan sok egységvektor, amelyek mindannyian egy félsíkba mutatnak. Bizonyítsuk be, hogy az összegük hossza legalább 1.