
Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton

nmarci@math.elte.hu

www.math.elte.hu/~nmarci

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest



A félév anyaga

- **A középiskolás előismeretek áttekintése**
 - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
 - Transzformációk
 - Fontosabb geometriai alakzatok
- **Vektorgeometria**
 - Koordináták és vektorok
 - Vektorok szorzása
 - Vektorok alkalmazásai
- **Konvexitás**
- **Sokszögek és poliéderek**
 - Sokszögek és konvex sokszögek
 - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Konvex poliéderek: definíciók

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk.

Konvex poliéderek: definíciók

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk.

Nem definiáljuk általánosságban a poliéder fogalmát;

Konvex poliéderek: definíciók

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk.

Nem definiáljuk általánosságban a poliéder fogalmát; csak konvex poliéderekre szorítkozunk.

Konvex poliéderek: definíciók

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk.

Nem definiáljuk általánosságban a poliéder fogalmát; csak konvex poliéderekre szorítkozunk. Két egyenértékű definíciót adunk,

Konvex poliéderek: definíciók

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk.

Nem definiáljuk általánosságban a poliéder fogalmát; csak konvex poliéderekre szorítkozunk. Két egyenértékű definíciót adunk, amelyek modelljéül a konvex sokszögek származtatási módszerei szolgálnak.

Konvex poliéderek: definíciók

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk.

Nem definiáljuk általánosságban a poliéder fogalmát; csak konvex poliéderekre szorítkozunk. Két egyenértékű definíciót adunk, amelyek modelljéül a konvex sokszögek származtatási módszerei szolgálnak.

1. Definíció

Konvex poliédernek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.

Konvex poliéderek: definíciók

A konvex sokszög fogalmának háromdimenziós megfelelőjét vizsgáljuk.

Nem definiáljuk általánosságban a poliéder fogalmát; csak konvex poliéderekre szorítkozunk. Két egyenértékű definíciót adunk, amelyek modelljéül a konvex sokszögek származtatási módszerei szolgálnak.

1. Definíció

Konvex poliédernek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.

2. Definíció

Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.

Konvex poliéderek: definíciók

Tétel

A két definíció ekvivalens,

Konvex poliéderek: definíciók

Tétel

A két definíció ekvivalens, azaz pontosan ugyanazokat a ponthalmazokat tekinti konvex poliédernek.

Konvex poliéderek: definíciók

Tétel

A két definíció ekvivalens, azaz pontosan ugyanazokat a ponthalmazokat tekinti konvex poliédernek.

Bár szemléletünk könnyen befogadja a definíciók ekvivalenciáját, a tétel szabatos bizonyítása hosszadalmas volna, ezért elhagyjuk.

Konvex poliéderek: definíciók

1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.

Konvex poliéderek: definíciók

1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.

Vegyük észre, hogy egy konvex poliéder első definíció szerinti előállításához minimálisan 4 pont szükséges

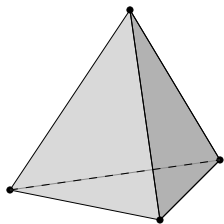
Konvex poliéderek: definíciók

1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.

Vegyük észre, hogy egy konvex poliéder első definíció szerinti előállításához minimálisan 4 pont szükséges (kevesebb pont egy síkban fekszik).

Konvex poliéderek: definíciók

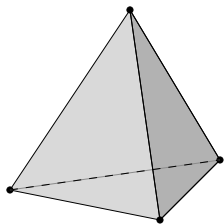
1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.



Vegyük észre, hogy egy konvex poliéder első definíció szerinti előállításához minimálisan 4 pont szükséges (kevesebb pont egy síkban fekszik). A négy nem egysíkú pont konvex burkaként előálló ponthalmazok a **tetraéderek**.

Konvex poliéderek: definíciók

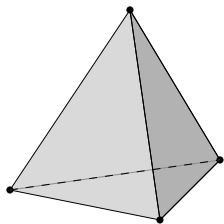
1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.



Világos, hogy bármely tetraéder előáll a második definíció szerint is féltérek metszeteként:

Konvex poliéderek: definíciók

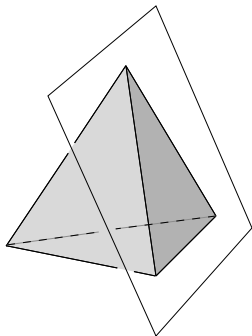
1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.



Világos, hogy bármely tetraéder előáll a második definíció szerint is féltérek metszeteként: annak a négy féltérnek a közös részét kell venni,

Konvex poliéderek: definíciók

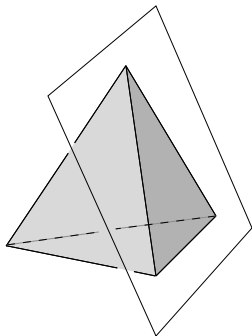
1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.



Világos, hogy bármely tetraéder előáll a második definíció szerint is féltérek metszeteként: annak a négy féltérnek a közös részét kell venni, amelyek határoló síkjait a négy csúcs közül 3-3 feszíti ki,

Konvex poliéderek: definíciók

1. **Konvex poliéder**nek nevezzük a térben véges sok nem egy síkba eső pont konvex burkát.
2. Egy térbeli ponthalmazt **konvex poliéder**nek nevezünk, ha korlátos, és előáll véges sok olyan zárt féltér metszeteként, amelyeknek van közös belső pontja.



Világos, hogy bármely tetraéder előáll a második definíció szerint is féltérek metszeteként: annak a négy féltérnek a közös részét kell venni, amelyek határoló síkjait a négy csúcs közül 3-3 feszíti ki, és amelyek tartalmazzák a negyedik csúcsot.

Konvex poliéderek: példák

Konvex poliéderek néhány gyakrabban előforduló típusát tekintjük át.

Konvex poliéderek: példák

Hasábok:

Konvex poliéderek: példák

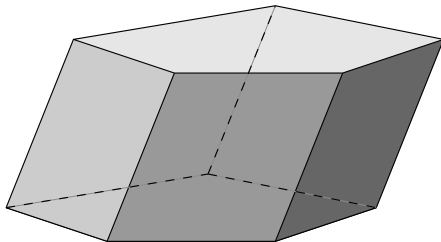
Hasábok:



Legyen S konvex sokszög, valamint S' az S egy eltolt példánya olyan eltolásnál, amelynek az iránya nem párhuzamos S síkjával.

Konvex poliéderek: példák

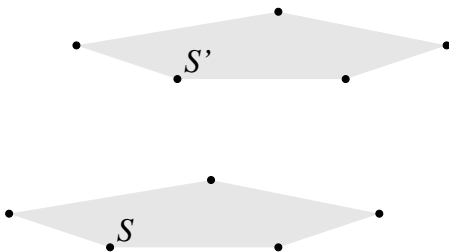
Hasábok:



Legyen S konvex sokszög, valamint S' az S egy eltolt példánya olyan eltolásnál, amelynek az iránya nem párhuzamos S síkjával. Ekkor az $S \cup S'$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **hasáb**nak nevezzük.

Konvex poliéderek: példák

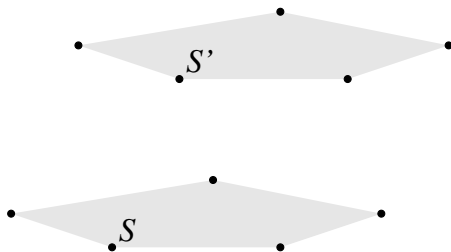
Hasábok:



Legyen S konvex sokszög, valamint S' az S egy eltolt példánya olyan eltolásnál, amelynek az iránya nem párhuzamos S síkjával. Ekkor az $S \cup S'$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **hasáb**nak nevezzük. (A hasáb valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S és S' csúcaiból álló véges halmaz konvex burkaként,

Konvex poliéderek: példák

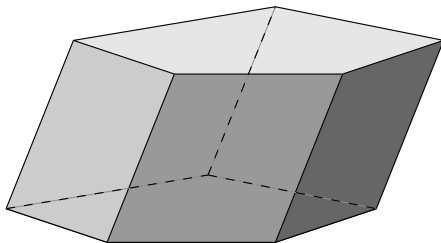
Hasábok:



Legyen S konvex sokszög, valamint S' az S egy eltolt példánya olyan eltolásnál, amelynek az iránya nem párhuzamos S síkjával. Ekkor az $S \cup S'$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **hasáb**nak nevezzük. (A hasáb valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S és S' csúsaiból álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit.)

Konvex poliéderek: példák

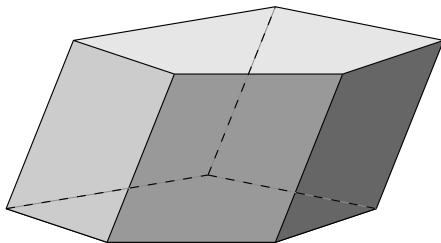
Hasábok:



Legyen S konvex sokszög, valamint S' az S egy eltolt példánya olyan eltolásnál, amelynek az iránya nem párhuzamos S síkjával. Ekkor az $S \cup S'$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **hasáb**nak nevezzük. (A hasáb valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S és S' csúcaiból álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit. Azt sem nehéz meggondolni, hogy mely feltérek választásával állítható elő a hasáb a második definíció követelményeinek eleget téve.)

Konvex poliéderek: példák

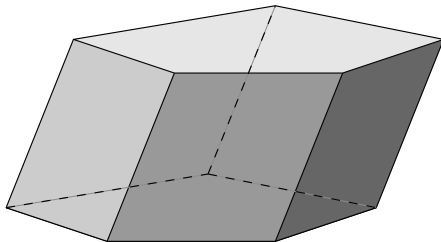
Hasábok:



Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú hasábot is **n -oldalú hasáb**nak nevezzük.

Konvex poliéderek: példák

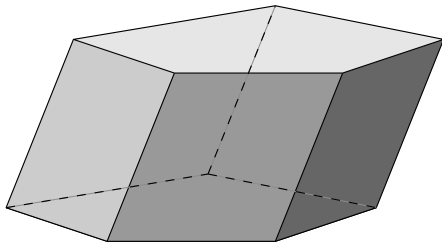
Hasábok:



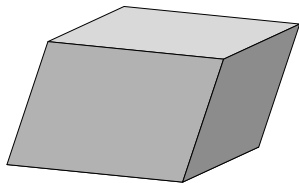
Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú hasábot is **n -oldalú hasáb**nak nevezzük. Speciális négyoldalú hasábok:

Konvex poliéderek: példák

Hasábok:



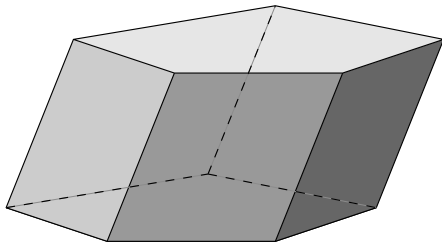
Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú hasábot is **n -oldalú hasáb**nak nevezzük. Speciális négyoldalú hasábok:



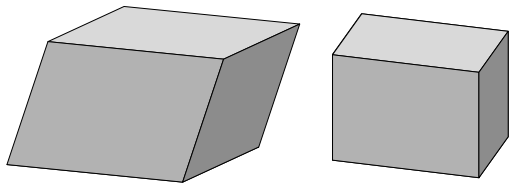
parallelepipedon (= paralelogramma alapú hasáb),

Konvex poliéderek: példák

Hasábok:



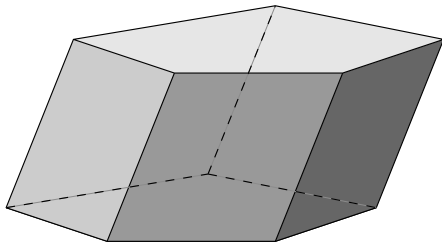
Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú hasábot is **n -oldalú hasáb**nak nevezzük. Speciális négyoldalú hasábok:



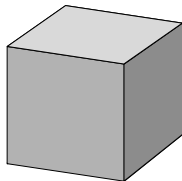
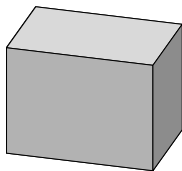
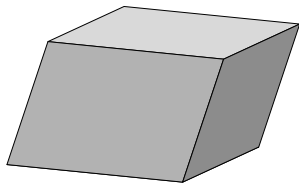
parallelepipedon (= paralelogramma alapú hasáb), téglatest,

Konvex poliéderek: példák

Hasábok:



Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú hasábot is **n -oldalú hasáb**nak nevezzük. Speciális négyoldalú hasábok:



parallelepipedon (= paralelogramma alapú hasáb), téglatest, kocka.

Konvex poliéderek: példák

Gúlák:

Konvex poliéderek: példák

Gúlának:

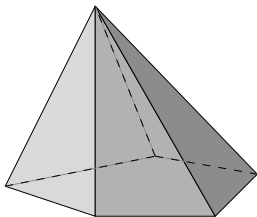
$P \bullet$

Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában.



Konvex poliéderek: példák

Gúlák:



Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában. Ekkor az $S \cup \{P\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **gúlának** nevezzük.

Konvex poliéderek: példák

Gúlák:

$P \bullet$

Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában. Ekkor az $S \cup \{P\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **gúlának** nevezzük.



(A gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcsaiból és P -ből álló véges halmaz konvex burkaként,

Konvex poliéderek: példák

Gúlák:

$P \bullet$

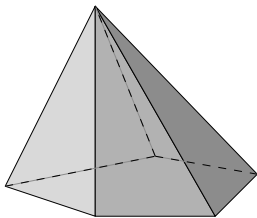
Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában. Ekkor az $S \cup \{P\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **gúlának** nevezzük.



(A gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcsaiból és P -ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit.)

Konvex poliéderek: példák

Gúlák:

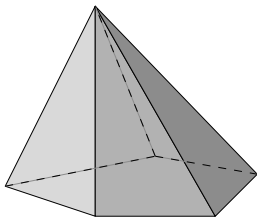


Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában. Ekkor az $S \cup \{P\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **gúlának** nevezzük.

(A gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcsaiból és P -ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit. Azt sem nehéz meggondolni, hogy mely feltérek választásával állítható elő a gúla a második definíció követelményeinek eleget téve.)

Konvex poliéderek: példák

Gúlák:



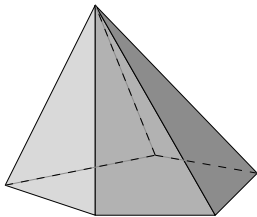
Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában. Ekkor az $S \cup \{P\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **gúlának** nevezzük.

(A gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcsaiból és P -ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit. Azt sem nehéz meggondolni, hogy mely feltérek választásával állítható elő a gúla a második definíció követelményeinek eleget téve.)

Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú gúlát is **n -oldalú gúlának** nevezzük.

Konvex poliéderek: példák

Gúlának:



Legyen S konvex sokszög, és P olyan pont, amely nem fekszik az S sokszög síkjában. Ekkor az $S \cup \{P\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **gúlának** nevezzük.

(A gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcsaiból és P -ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit. Azt sem nehéz meggondolni, hogy mely félterek választásával állítható elő a gúla a második definíció követelményeinek eleget téve.)

Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú gúlát is **n -oldalú gúlának** nevezzük.

A háromoldalú (azaz háromszög alapú) gúlának pontosan a tetraéderek.

Konvex poliéderek: példák

Kettős gúlának:

Konvex poliéderek: példák

Kettős gúlák:

P •

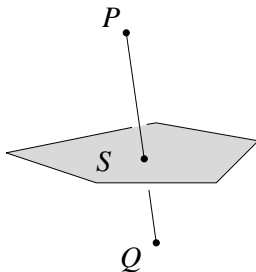


Q •

Legyen S konvex sokszög, valamint P és Q egy-egy pont az S sokszög síkjának két oldalán.

Konvex poliéderek: példák

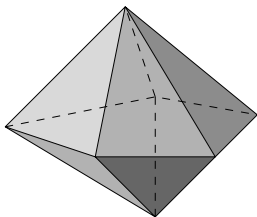
Kettős gúlák:



Legyen S konvex sokszög, valamint P és Q egy-egy pont az S sokszög síkjának két oldalán. Tegyük föl azt is, hogy a $[P, Q]$ szakasz az S sokszöget egy belső pontjában döfi.

Konvex poliéderek: példák

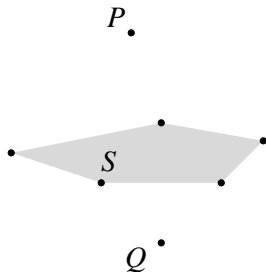
Kettős gúlák:



Legyen S konvex sokszög, valamint P és Q egy-egy pont az S sokszög síkjának két oldalán. Tegyük föl azt is, hogy a $[P, Q]$ szakasz az S sokszöget egy belső pontjában dőfi. Ekkor az $S \cup \{P, Q\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **kettős gúlának** nevezzük.

Konvex poliéderek: példák

Kettős gúlák:

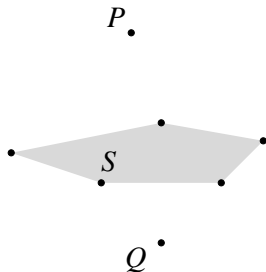


Legyen S konvex sokszög, valamint P és Q egy-egy pont az S sokszög síkjának két oldalán. Tegyük föl azt is, hogy a $[P, Q]$ szakasz az S sokszöget egy belső pontjában dőfi. Ekkor az $S \cup \{P, Q\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **kettős gúlának** nevezzük.

(A kettős gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcsaiból, P -ből és Q -ből álló véges halmaz konvex burkaként,

Konvex poliéderek: példák

Kettős gúlák:

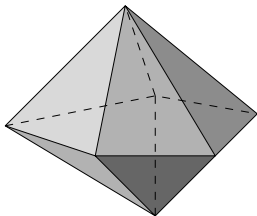


Legyen S konvex sokszög, valamint P és Q egy-egy pont az S sokszög síkjának két oldalán. Tegyük föl azt is, hogy a $[P, Q]$ szakasz az S sokszöget egy belső pontjában dőfi. Ekkor az $S \cup \{P, Q\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **kettős gúlának** nevezzük.

(A kettős gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcaiból, P -ből és Q -ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit.)

Konvex poliéderek: példák

Kettős gúlák:

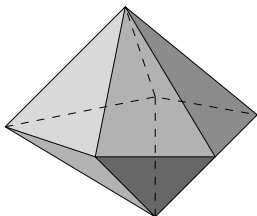


Legyen S konvex sokszög, valamint P és Q egy-egy pont az S sokszög síkjának két oldalán. Tegyük föl azt is, hogy a $[P, Q]$ szakasz az S sokszöget egy belső pontjában dőfi. Ekkor az $S \cup \{P, Q\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **kettős gúlának** nevezzük.

(A kettős gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcaiból, P -ből és Q -ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit. Azt sem nehéz meggondolni, hogy mely feltérek választásával állítható elő a kettős gúla a második definíció követelményeinek eleget téve.)

Konvex poliéderek: példák

Kettős gúlák:

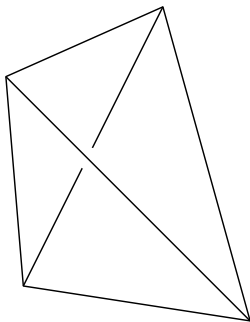


Legyen S konvex sokszög, valamint P és Q egy-egy pont az S sokszög síkjának két oldalán. Tegyük föl azt is, hogy a $[P, Q]$ szakasz az S sokszöget egy belső pontjában döfi. Ekkor az $S \cup \{P, Q\}$ ponthalmaz konvex burkát S alapú **kettős gúlának** nevezzük.

(A kettős gúla valóban konvex poliéder, hiszen előáll az S csúcaiból, P -ből és Q -ből álló véges halmaz konvex burkaként, így teljesíti az első definíció követelményeit. Azt sem nehéz meggondolni, hogy mely feltérek választásával állítható elő a kettős gúla a második definíció követelményeinek eleget téve.)

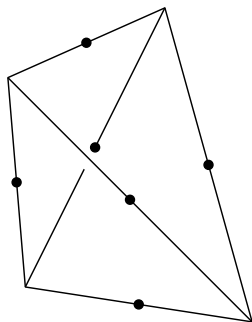
Ha az S sokszög n -oldalú, akkor az S alapú kettős gúlát is **n -oldalú kettős gúlának** nevezzük.

Konvex poliéderek: példák



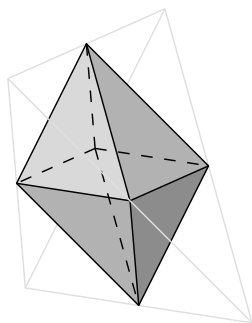
Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben

Konvex poliéderek: példák



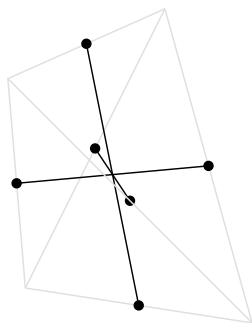
Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát.

Konvex poliéderek: példák



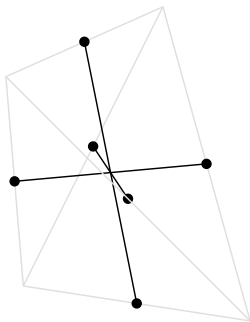
Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát.

Konvex poliéderek: példák



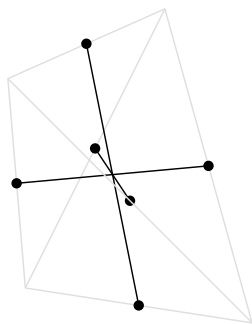
Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát. A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő három szakasznak közös a felezőpontja.

Konvex poliéderek: példák



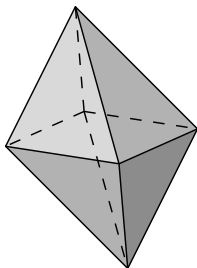
Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát. A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő három szakasznak közös a felezőpontja. Ezért a három szakasz közül bármelyik kettőt kiválasztva azok végpontjai paralelogrammát feszítenek ki,

Konvex poliéderek: példák



Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát. A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő három szakasznak közös a felezőpontja. Ezért a három szakasz közül bármelyik kettőt kiválasztva azok végpontjai paralelogrammát feszítenek ki, a harmadik pedig a középpontjában dőfi a paralelogramma síkját.

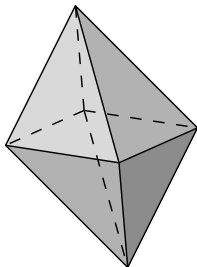
Konvex poliéderek: példák



Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát. A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő három szakasznak közös a felezőpontja. Ezért a három szakasz közül bármelyik kettőt kiválasztva azok végpontjai paralelogrammát feszítenek ki, a harmadik pedig a középpontjában dőfi a paralelogramma síkját.

A tetraéder élfelező pontjainak konvex burka tehát paralelogramma alapú kettős gúla.

Konvex poliéderek: példák

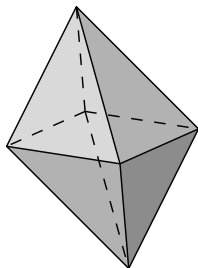


Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát. A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő három szakasznak közös a felezőpontja. Ezért a három szakasz közül bármelyik kettőt kiválasztva azok végpontjai paralelogrammát feszítenek ki, a harmadik pedig a középpontjában dőfi a paralelogramma síkját.

A tetraéder élfelező pontjainak konvex burka tehát paralelogramma alapú kettős gúla.

Az így előálló kettős gúlákat **oktaéderek**nek nevezzük.

Konvex poliéderek: példák



Nevezetes példát kapunk négyoldalú kettős gúlára, ha egy tetszőleges tetraéderben tekintjük az élek felezőpontjainak a konvex burkát. A tetraéder szemközti éleinek felezőpontjait összekötő három szakasznak közös a felezőpontja. Ezért a három szakasz közül bármelyik kettőt kiválasztva azok végpontjai paralelogrammát feszítenek ki, a harmadik pedig a középpontjában dőfi a paralelogramma síkját.

A tetraéder élfelező pontjainak konvex burka tehát paralelogramma alapú kettős gúla.

Az így előálló kettős gúlákat **oktaéderek**nek nevezzük.

Az oktaéderek a középpontosan szimmetrikus négyoldalú kettős gúlák.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A konvex poliéderek jellegzetes tulajdonsága, hogy csúcsaik, éleik és lapjaik vannak, amelyek a poliédereket érdekes kombinatorikai tulajdonságokkal ruházzák föl.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A konvex poliéderek jellegzetes tulajdonsága, hogy csúcsaik, éleik és lapjaik vannak, amelyek a poliédereket érdekes kombinatorikai tulajdonságokkal ruházzák föl. A csúcsokat, éleket és lapokat a poliéderekkel együtt rögtön szemléletesen magunk előtt látjuk,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A konvex poliéderek jellegzetes tulajdonsága, hogy csúcsaik, éleik és lapjaik vannak, amelyek a poliédereket érdekes kombinatorikai tulajdonságokkal ruházzák föl. A csúcsokat, éleket és lapokat a poliéderekkel együtt rögtön szemléletesen magunk előtt látjuk, viszont szabatos, nem pusztán a szemléletünkre hivatkozó definíciójuk egyáltalán nem könnyű.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A konvex poliéderek jellegzetes tulajdonsága, hogy csúcsaik, éleik és lapjaik vannak, amelyek a poliédereket érdekes kombinatorikai tulajdonságokkal ruházzák föl. A csúcsokat, éleket és lapokat a poliéderekkel együtt rögtön szemléletesen magunk előtt látjuk, viszont szabatos, nem pusztán a szemléletünkre hivatkozó definíciójuk egyáltalán nem könnyű.

A definíciót a poliédert előállító félterek egyértelműségi tételével készítjük elő, amely a konvex poliéder második definícióján alapul.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A konvex poliéderek jellegzetes tulajdonsága, hogy csúcsaik, éleik és lapjaik vannak, amelyek a poliédereket érdekes kombinatorikai tulajdonságokkal ruházzák föl. A csúcsokat, éleket és lapokat a poliéderekkel együtt rögtön szemléletesen magunk előtt látjuk, viszont szabatos, nem pusztán a szemléletünkre hivatkozó definíciójuk egyáltalán nem könnyű.

A definíciót a poliédert előállító félterek egyértelműségi tételével készítjük elő, amely a konvex poliéder második definícióján alapul.

Legyen adott a P konvex poliéder, amelyet a második definíció alapján elő tudunk állítani (valahogyan) véges sok féltér metszeteként:

$$P = \bigcap_{i=1}^n F_i,$$

ahol mindegyik F_i zárt félteret jelöl.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A konvex poliéderek jellegzetes tulajdonsága, hogy csúcsaik, éleik és lapjaik vannak, amelyek a poliédereket érdekes kombinatorikai tulajdonságokkal ruházzák föl. A csúcsokat, éleket és lapokat a poliéderekkel együtt rögtön szemléletesen magunk előtt látjuk, viszont szabatos, nem pusztán a szemléletünkre hivatkozó definíciójuk egyáltalán nem könnyű.

A definíciót a poliédert előállító félterek egyértelműségi tételével készítjük elő, amely a konvex poliéder második definícióján alapul.

Legyen adott a P konvex poliéder, amelyet a második definíció alapján elő tudunk állítani (valahogyan) véges sok féltér metszeteként:

$$P = \bigcap_{i=1}^n F_i,$$

ahol mindegyik F_i zárt féltérrel jelöl. Jelölje minden i -re S_i az F_i féltér határoló síkját.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként),

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,
- (ii) minden i -re az $L_i = P \cap S_i$ ponthalmaz konvex sokszög,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,
- (ii) minden i -re az $L_i = P \cap S_i$ ponthalmaz konvex sokszög, és
- (iii) az L_1, L_2, \dots, L_n sokszögek együtt a P poliéder határát alkotják.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,
- (ii) minden i -re az $L_i = P \cap S_i$ ponthalmaz konvex sokszög, és
- (iii) az L_1, L_2, \dots, L_n sokszögek együtt a P poliéder határát alkotják.

A tétel szabatos bizonyításától eltekintünk.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,
- (ii) minden i -re az $L_i = P \cap S_i$ ponthalmaz konvex sokszög, és
- (iii) az L_1, L_2, \dots, L_n sokszögek együtt a P poliéder határát alkotják.

A tétel szabatos bizonyításától eltekintünk. Annyit érdemes példákon keresztül meggondolni, hogy ha a minimalitási követelményt elhagynánk, sem (i), sem (ii) nem maradna igaz.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,
- (ii) minden i -re az $L_i = P \cap S_i$ ponthalmaz konvex sokszög, és
- (iii) az L_1, L_2, \dots, L_n sokszögek együtt a P poliéder határát alkotják.

A tétel szabatos bizonyításától eltekintünk. Annyit érdemes példákon keresztül meggondolni, hogy ha a minimalitási követelményt elhagynánk, sem (i), sem (ii) nem maradna igaz.

Definíció

P lapjain a tételbeli L_i sokszögeket értjük,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,
- (ii) minden i -re az $L_i = P \cap S_i$ ponthalmaz konvex sokszög, és
- (iii) az L_1, L_2, \dots, L_n sokszögek együtt a P poliéder határát alkotják.

A tétel szabatos bizonyításától eltekintünk. Annyit érdemes példákon keresztül meggondolni, hogy ha a minimalitási követelményt elhagynánk, sem (i), sem (ii) nem maradna igaz.

Definíció

P lapjain a tételbeli L_i sokszögeket értjük, P élein a lapok oldalszakaszait,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Tétel

Ha az n szám minimális (azaz P nem állítható elő n -nél kevesebb féltér metszeteként), akkor

- (i) a P poliéder az F_1, F_2, \dots, F_n féltéreket (sorrendtől eltekintve) egyértelműen meghatározza,
- (ii) minden i -re az $L_i = P \cap S_i$ ponthalmaz konvex sokszög, és
- (iii) az L_1, L_2, \dots, L_n sokszögek együtt a P poliéder határát alkotják.

A tétel szabatos bizonyításától eltekintünk. Annyit érdemes példákon keresztül meggondolni, hogy ha a minimalitási követelményt elhagynánk, sem (i), sem (ii) nem maradna igaz.

Definíció

P lapjain a tételbeli L_i sokszögeket értjük, P élein a lapok oldalszakaszait, P csúcsain az élek végpontjait.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A tétel következményeként látjuk, hogy bármely konvex poliéder a lapjait, éleit és csúcsait egyértelműen meghatározza.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A tétel következményeként látjuk, hogy bármely konvex poliéder a lapjait, éleit és csúcsait egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás nélkül megemlítjük még a lapok, élek és csúcsok szerkezetének néhány alapvető illeszkedési tulajdonságát:

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A tétel következményeként látjuk, hogy bármely konvex poliéder a lapjait, éleit és csúcsait egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás nélkül megemlítjük még a lapok, élek és csúcsok szerkezetének néhány alapvető illeszkedési tulajdonságát:

- Bármelyik él pontosan két lap közös oldala.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A tétel következményeként látjuk, hogy bármely konvex poliéder a lapjait, éleit és csúcsait egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás nélkül megemlítjük még a lapok, élek és csúcsok szerkezetének néhány alapvető illeszkedési tulajdonságát:

- Bármelyik él pontosan két lap közös oldala.
- Bármelyik csúcsból bármelyik másik csúcsba eljuthatunk élek alkotta töröttvonal mentén.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A tétel következményeként látjuk, hogy bármely konvex poliéder a lapjait, éleit és csúcsait egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás nélkül megemlítjük még a lapok, élek és csúcsok szerkezetének néhány alapvető illeszkedési tulajdonságát:

- Bármelyik él pontosan két lap közös oldala.
- Bármelyik csúcsból bármelyik másik csúcsba eljuthatunk élek alkotta töröttvonal mentén.
- Bármelyik lapról bármelyik másik lapra eljuthatunk lapok olyan sorozatán keresztül, amelyben mindegyik lap és a rákövetkezője szomszédos (azaz van közös élük).

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A tétel következményeként látjuk, hogy bármely konvex poliéder a lapjait, éleit és csúcsait egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás nélkül megemlíjtük még a lapok, élek és csúcsok szerkezetének néhány alapvető illeszkedési tulajdonságát:

- Bármelyik él pontosan két lap közös oldala.
- Bármelyik csúcsból bármelyik másik csúcsba eljuthatunk élek alkotta töröttvonal mentén.
- Bármelyik lapról bármelyik másik lapra eljuthatunk lapok olyan sorozatán keresztül, amelyben mindegyik lap és a rákövetkezője szomszédos (azaz van közös élük).
- Az élekből alkotott bármely egyszerű zárt töröttvonal a poliéder felületét kettévágja

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

A tétel következményeként látjuk, hogy bármely konvex poliéder a lapjait, éleit és csúcsait egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás nélkül megemlíjtük még a lapok, élek és csúcsok szerkezetének néhány alapvető illeszkedési tulajdonságát:

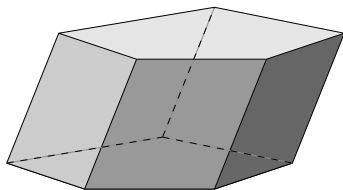
- Bármelyik él pontosan két lap közös oldala.
- Bármelyik csúcsból bármelyik másik csúcsba eljuthatunk élek alkotta töröttvonal mentén.
- Bármelyik lapról bármelyik másik lapra eljuthatunk lapok olyan sorozatán keresztül, amelyben mindegyik lap és a rákövetkezője szomszédos (azaz van közös élük).
- Az élekből alkotott bármely egyszerű zárt töröttvonal a poliéder felületét kettévágja (azaz a lapok két nemüres osztályba sorolódnak oly módon, hogy különböző osztályhoz tartozó lapokon levő pontokat csak úgy lehet a felületen fekvő töröttvonalal összekötni, hogy az valahol metszi az adott zárt töröttvonalat).

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Példák:

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

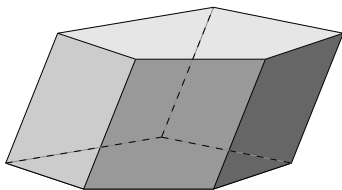
Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

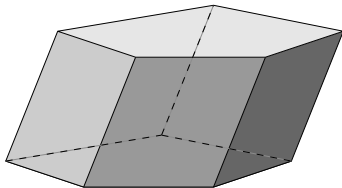
Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Példák:



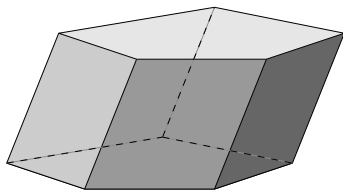
Bármely n -oldalú
hasábnak

$n + 2$ lapja,

$3n$ éle,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak

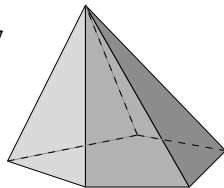
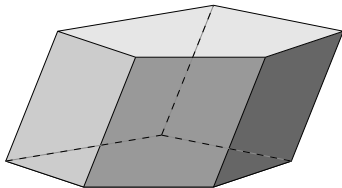
$n + 2$ lapja,

$3n$ éle, és

$2n$ csúcsa van.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak

$n + 2$ lapja,

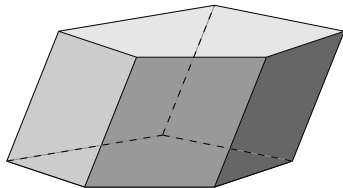
$3n$ éle, és

$2n$ csúcsa van.

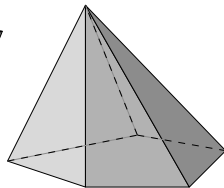
Bármely n -oldalú
gúlának

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Példák:



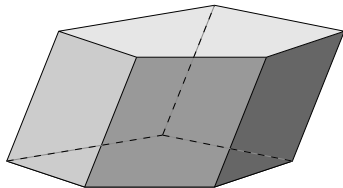
Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



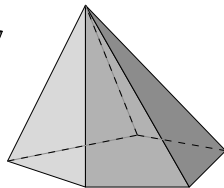
Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Példák:



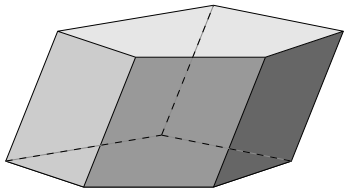
Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



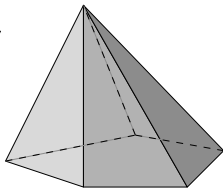
Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,
 $2n$ éle,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Példák:



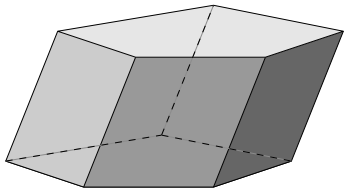
Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



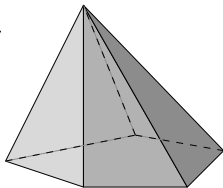
Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,
 $2n$ éle, és
 $n + 1$ csúcsa van.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

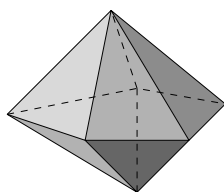
Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



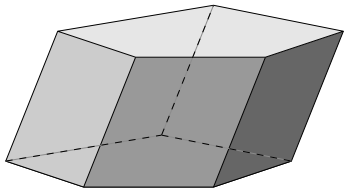
Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,
 $2n$ éle, és
 $n + 1$ csúcsa van.



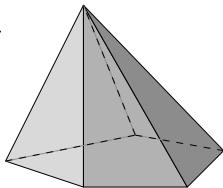
Bármely n -oldalú
kettős gúlának

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

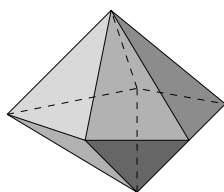
Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



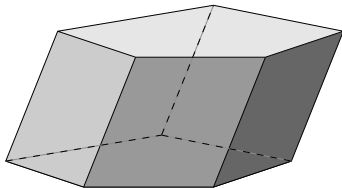
Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,
 $2n$ éle, és
 $n + 1$ csúcsa van.



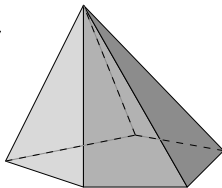
Bármely n -oldalú
kettős gúlának
 $2n$ lapja,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

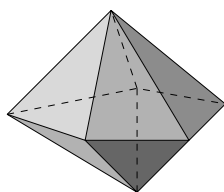
Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



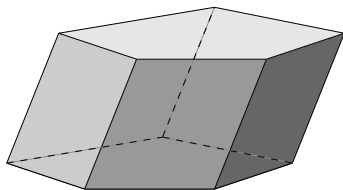
Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,
 $2n$ éle, és
 $n + 1$ csúcsa van.



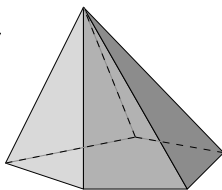
Bármely n -oldalú
kettős gúlának
 $2n$ lapja,
 $3n$ éle,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

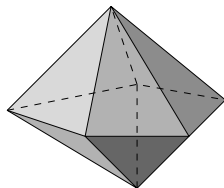
Példák:



Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,
 $2n$ éle, és
 $n + 1$ csúcsa van.



Bármely n -oldalú
kettős gúlának
 $2n$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $n + 2$ csúcsa van.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **azonos kombinatorikai szerkezetű**,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **azonos kombinatorikai szerkezetű**, ha létezik olyan bijektív megfeleltetés P csúcsai halmaza és Q csúcsai halmaza között, amelynél

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **azonos kombinatorikai szerkezetű**, ha létezik olyan bijektív megfeleltetés P csúcsai halmaza és Q csúcsai halmaza között, amelynél

- (i) P két csúcsa között akkor és csak akkor fut él, ha a nekik Q -ban megfeleltetett két csúcs között Q -ban is él fut,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

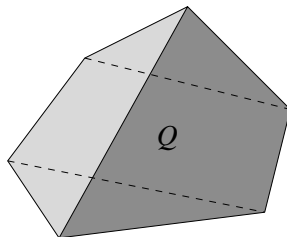
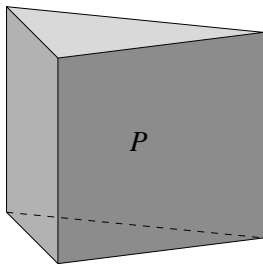
Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **azonos kombinatorikai szerkezetű**, ha létezik olyan bijektív megfeleltetés P csúcsai halmaza és Q csúcsai halmaza között, amelynél

- (i) P két csúcsa között akkor és csak akkor fut él, ha a nekik Q -ban megfeleltetett két csúcs között Q -ban is él fut, és
- (ii) P csúcsainak egy részhalmaza akkor és csak akkor tartozik P egy lapjához, ha a nekik Q -ban megfeleltetett csúcsok Q egy lapjához tartoznak.

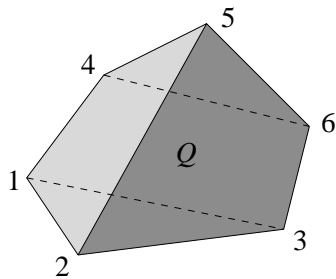
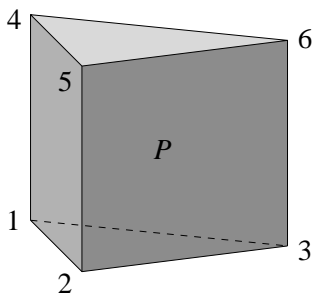
Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Például:



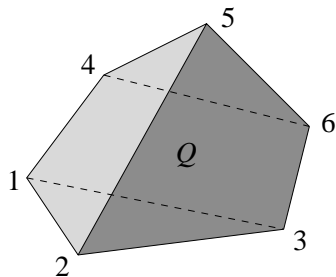
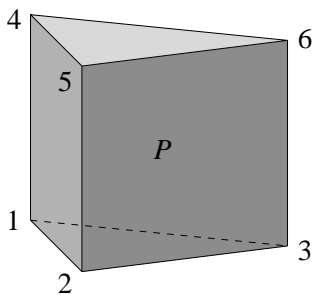
Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Például:



Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Például:

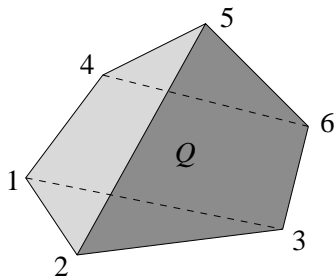
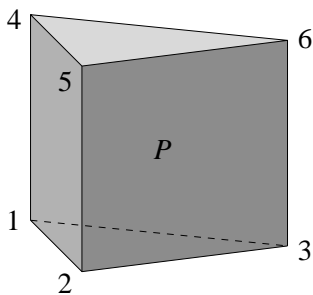


Észrevételek:

- Bármely két egybevágó (vagy akár csak hasonló) konvex poliéder nyilván azonos kombinatorikai szerkezetű,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Például:

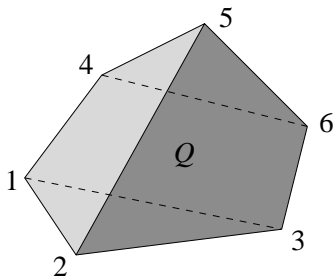
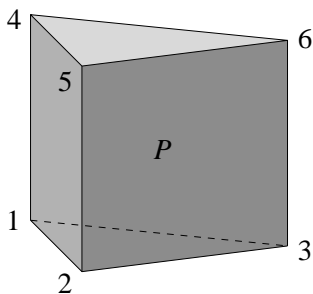


Észrevételek:

- Bármely két egybevágó (vagy akár csak hasonló) konvex poliéder nyilván azonos kombinatorikai szerkezetű, hiszen az egybevágóság, illetve hasonlóság létrehozza a kívánt megfeleltetést.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Például:

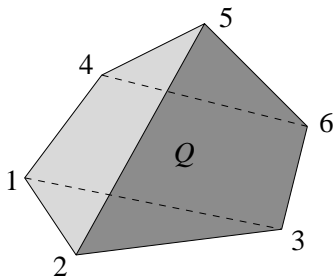
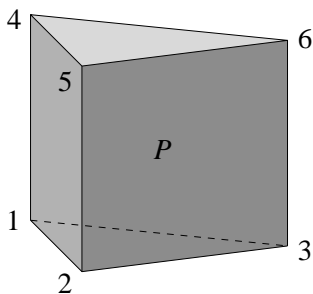


Észrevételek:

- Bármely két egybevágó (vagy akár csak hasonló) konvex poliéder nyilván azonos kombinatorikai szerkezetű, hiszen az egybevágóság, illetve hasonlóság létrehozza a kívánt megfeleltetést.
- Rögzített n mellett bármely két n -oldalú hasáb,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Például:

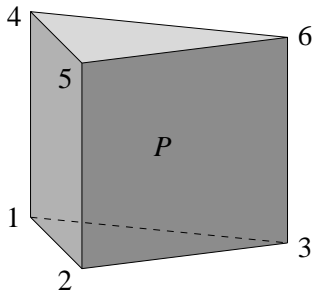


Észrevételek:

- Bármely két egybevágó (vagy akár csak hasonló) konvex poliéder nyilván azonos kombinatorikai szerkezetű, hiszen az egybevágóság, illetve hasonlóság létrehozza a kívánt megfeleltetést.
- Rögzített n mellett bármely két n -oldalú hasáb, bármely két n -oldalú gúla,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Például:



Észrevételek:

- Bármely két egybevágó (vagy akár csak hasonló) konvex poliéder nyilván azonos kombinatorikai szerkezetű, hiszen az egybevágóság, illetve hasonlóság létrehozza a kívánt megfeleltetést.
- Rögzített n mellett bármely két n -oldalú hasáb, bármely két n -oldalú gúla, illetve bármely két n -oldalú kettős gúla is azonos kombinatorikai szerkezetű.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **duális kombinatorikai szerkezetű**,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **duális kombinatorikai szerkezetű**, ha létezik olyan bijektív megfeleltetés P csúcsai halmaza és Q lapjai halmaza között, amelynél

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **duális kombinatorikai szerkezetű**, ha létezik olyan bijektív megfeleltetés P csúcsai halmaza és Q lapjai halmaza között, amelynél

- (i) P két csúcsa között akkor és csak akkor fut él, ha a nekik Q -ban megfeleltetett két lap szomszédos,

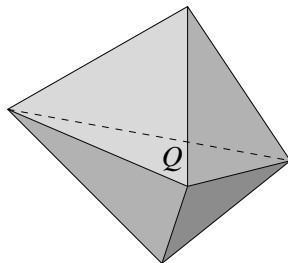
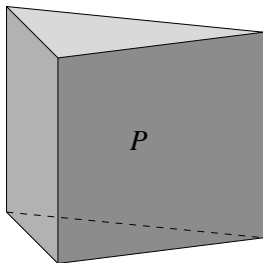
Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Definíció

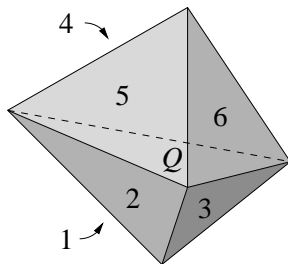
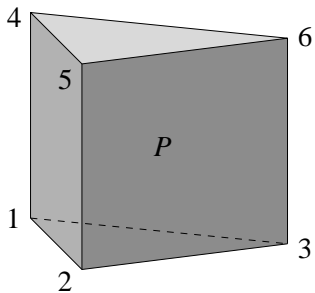
Legyenek P és Q konvex poliéderek. Azt mondjuk, hogy P és Q **duális kombinatorikai szerkezetű**, ha létezik olyan bijektív megfeleltetés P csúcsai halmaza és Q lapjai halmaza között, amelynél

- (i) P két csúcsa között akkor és csak akkor fut él, ha a nekik Q -ban megfeleltetett két lap szomszédos, és
- (ii) P csúcsainak egy részhalmaza akkor és csak akkor tartozik P egy lapjához, ha a nekik Q -ban megfeleltetett lapoknak van közös csúcsa.

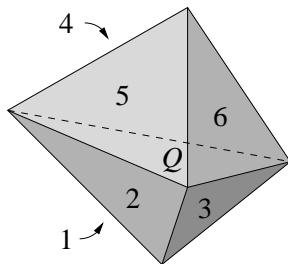
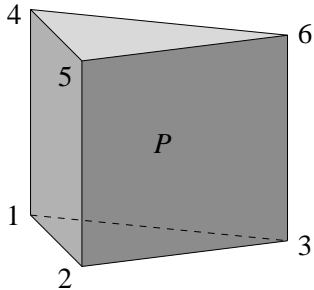
Például:



Például:



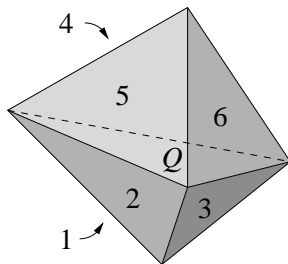
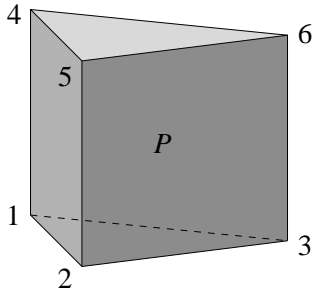
Például:



Észrevételek:

- Meggondolható, hogy ez a dualitási viszony szimmetrikus,

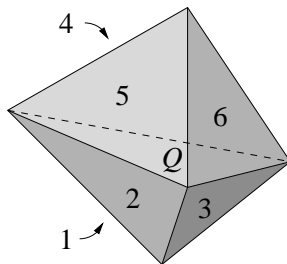
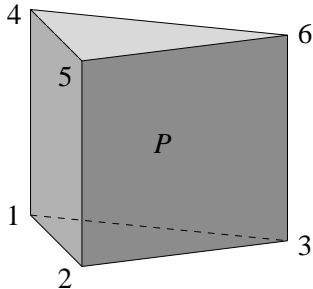
Például:



Észrevételek:

- Meggondolható, hogy ez a dualitási viszony szimmetrikus, azaz ilyenkor P lapjai és Q csúcsai között is létesíthető hasonló tulajdonságú megfeleltetés.

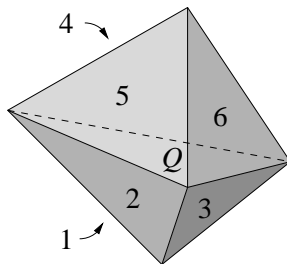
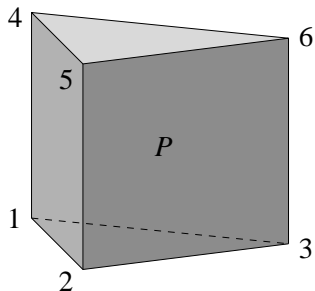
Például:



Észrevételek:

- Meggondolható, hogy ez a dualitási viszony szimmetrikus, azaz ilyenkor P lapjai és Q csúcsai között is létesíthető hasonló tulajdonságú megfeleltetés.
- Ha P és Q duális kombinatorikai szerkezetű konvex poliéderek,

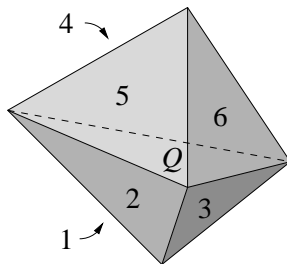
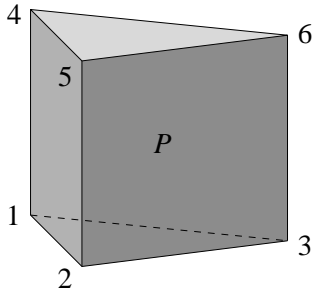
Például:



Észrevételek:

- Meggondolható, hogy ez a dualitási viszony szimmetrikus, azaz ilyenkor P lapjai és Q csúcsai között is létesíthető hasonló tulajdonságú megfeleltetés.
- Ha P és Q duális kombinatorikai szerkezetű konvex poliéderek, akkor P -nek ugyanannyi csúcsa van, ahány lapja van Q -nak, és viszont.

Például:



Észrevételek:

- Meggondolható, hogy ez a dualitási viszony szimmetrikus, azaz ilyenkor P lapjai és Q csúcsai között is létesíthető hasonló tulajdonságú megfeleltetés.
- Ha P és Q duális kombinatorikai szerkezetű konvex poliéderek, akkor P -nek ugyanannyi csúcsa van, ahány lapja van Q -nak, és viszont. Meggondolható, hogy az élek száma a két poliéderben ilyenkor szükségképpen egyenlő.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Ilyen összefüggéseket látunk a példaként megvizsgált poliéderek kombinatorikai adatai között is.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Ilyen összefüggéseket látunk a példaként megvizsgált poliéderek kombinatorikai adatai között is. Ez nem véletlen,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Ilyen összefüggéseket látunk a példaként megvizsgált poliéderek kombinatorikai adatai között is. Ez nem véletlen, könnyen meggondolható ugyanis az alábbi tétel:

Tétel

Rögzített n mellett

- bármelyik n -oldalú hasáb és bármelyik n -oldalú kettős gúla duális kombinatorikai szerkezetű,

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Ilyen összefüggéseket látunk a példaként megvizsgált poliéderek kombinatorikai adatai között is. Ez nem véletlen, könnyen meggondolható ugyanis az alábbi tétel:

Tétel

Rögzített n mellett

- bármelyik n -oldalú hasáb és bármelyik n -oldalú kettős gúla duális kombinatorikai szerkezetű,
- bármelyik n -oldalú gúla önmagával duális kombinatorikai szerkezetű.

Konvex poliéderek: lapok, élek, csúcsok

Ilyen összefüggéseket látunk a példaként megvizsgált poliéderek kombinatorikai adatai között is. Ez nem véletlen, könnyen meggondolható ugyanis az alábbi tétel:

Tétel

Rögzített n mellett

- bármelyik n -oldalú hasáb és bármelyik n -oldalú kettős gúla duális kombinatorikai szerkezetű,
- bármelyik n -oldalú gúla önmagával duális kombinatorikai szerkezetű.

Például egy paralelepipedon és egy oktaéder duális kombinatorikai szerkezetű konvex poliéderek, egy tetraéder pedig önmagával duális kombinatorikai szerkezetű.

Konvex poliéderek: Euler tétele

A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel Eulertól származik.

Konvex poliéderek: Euler tétele

A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel Eulertól származik. Egy tetszőleges P konvex poliéderre vonatkozóan jelöljük rendre c -vel, e -vel és l -lel a csúcsok, élek, illetve lapok számát.

Konvex poliéderek: Euler tétele

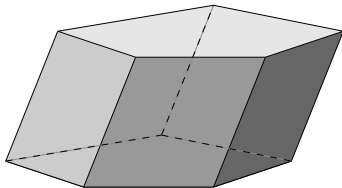
A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel Eulertól származik. Egy tetszőleges P konvex poliéderre vonatkozóan jelöljük rendre c -vel, e -vel és l -lel a csúcsok, élek, illetve lapok számát.

Az Euler-féle poliédertétel

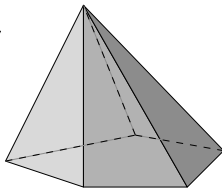
$$c + l = e + 2$$

Konvex poliéderek: Euler tétele

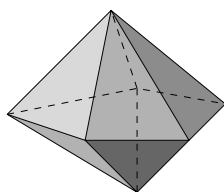
Emlékeztető:



Bármely n -oldalú
hasábnak
 $n + 2$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $2n$ csúcsa van.



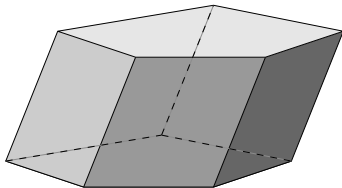
Bármely n -oldalú
gúlának
 $n + 1$ lapja,
 $2n$ éle, és
 $n + 1$ csúcsa van.



Bármely n -oldalú
kettős gúlának
 $2n$ lapja,
 $3n$ éle, és
 $n + 2$ csúcsa van.

Konvex poliéderek: Euler tétele

Emlékeztető:

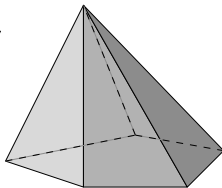


Bármely n -oldalú
hasábnak

$n + 2$ lapja,

$3n$ éle, és

$2n$ csúcsa van.

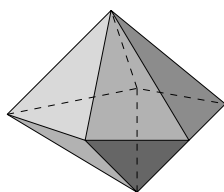


Bármely n -oldalú
gúlának

$n + 1$ lapja,

$2n$ éle, és

$n + 1$ csúcsa van.



Bármely n -oldalú
kettős gúlának

$2n$ lapja,

$3n$ éle, és

$n + 2$ csúcsa van.

Ezekre valóban teljesül $c + l = e + 2$.

Konvex poliéderek: Euler tétele

A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel Eulertól származik. Egy tetszőleges P konvex poliéderre vonatkozóan jelöljük rendre c -vel, e -vel és l -lel a csúcsok, élek, illetve lapok számát.

Az Euler-féle poliédertétel

$$c + l = e + 2$$

Konvex poliéderek: Euler tétele

A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel Eulertól származik. Egy tetszőleges P konvex poliéderre vonatkozóan jelöljük rendre c -vel, e -vel és l -lel a csúcsok, élek, illetve lapok számát.

Az Euler-féle poliédertétel

$$c + l = e + 2$$

Kétféle bizonyítással ismerkedünk meg. Az egyik geometriai, a másik kombinatorikai (gráfelméleti) jellegű.

Konvex poliéderek: Euler tétele

A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel Eulertól származik. Egy tetszőleges P konvex poliéderre vonatkozóan jelöljük rendre c -vel, e -vel és l -lel a csúcsok, élek, illetve lapok számát.

Az Euler-féle poliédertétel

$$c + l = e + 2$$

Kétféle bizonyítással ismerkedünk meg. Az egyik geometriai, a másik kombinatorikai (gráfelméleti) jellegű.

1. bizonyítás (Steiner bizonyítása):

Konvex poliéderek: Euler tétele

A konvex poliéderek kombinatorikai szerkezetére vonatkozó legnevezetesebb tétel Eulertól származik. Egy tetszőleges P konvex poliéderre vonatkozóan jelöljük rendre c -vel, e -vel és l -lel a csúcsok, élek, illetve lapok számát.

Az Euler-féle poliédertétel

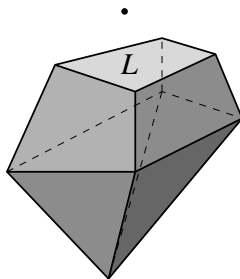
$$c + l = e + 2$$

Kétféle bizonyítással ismerkedünk meg. Az egyik geometriai, a másik kombinatorikai (gráfelméleti) jellegű.

1. bizonyítás (Steiner bizonyítása):

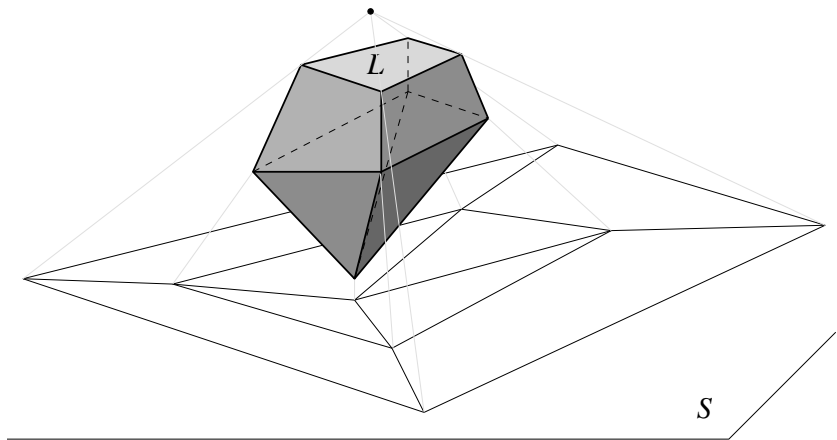
Szemeljük ki P egyik lapját, L -et, válasszunk egy L -lel párhuzamos (és L -et nem tartalmazó) S síkot, és a térben alkalmasan megválasztott vetítési középpontból vetítsük P összes lapját az S síkra.

Konvex poliéderek: Euler tétele



S

Konvex poliéderek: Euler tétele

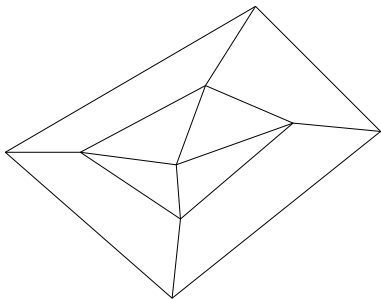


Konvex poliéderek: Euler tétele

Ha a vetítési középpontot P -n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk,

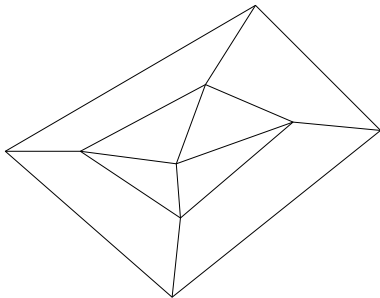
Konvex poliéderek: Euler tétele

Ha a vetítési középpontot P -n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk, akkor az S síkon keletkező vetületi ábráról



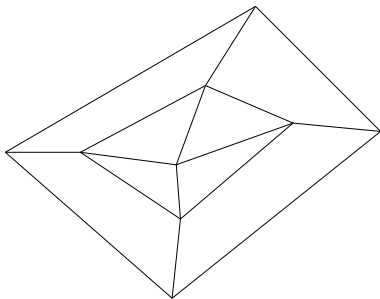
Konvex poliéderek: Euler tétele

Ha a vetítési középpontot P -n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk, akkor az S síkon keletkező vetületi ábráról az alábbiakat állapíthatjuk meg:



Konvex poliéderek: Euler tétele

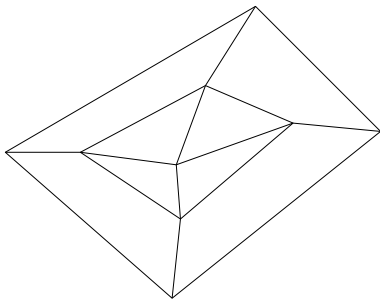
Ha a vetítési középpontot P -n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk, akkor az S síkon keletkező vetületi ábráról az alábbiakat állapíthatjuk meg:



- mindegyik lap vetülete konvex sokszög az S síkban,

Konvex poliéderek: Euler tétele

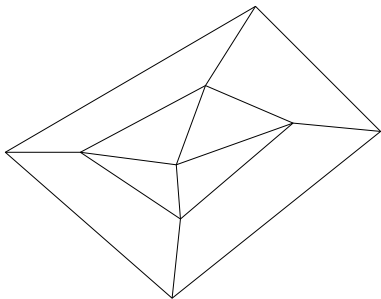
Ha a vetítési középpontot P -n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk, akkor az S síkon keletkező vetületi ábráról az alábbiakat állapíthatjuk meg:



- mindegyik lap vetülete konvex sokszög az S síkban,
- az L lap vetülete tartalmazza az összes többi lap vetületét,

Konvex poliéderek: Euler tétele

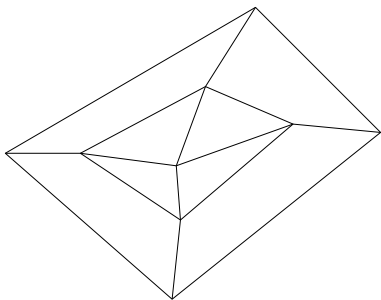
Ha a vetítési középpontot P -n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk, akkor az S síkon keletkező vetületi ábráról az alábbiakat állapíthatjuk meg:



- mindegyik lap vetülete konvex sokszög az S síkban,
- az L lap vetülete tartalmazza az összes többi lap vetületét,
- az L -től különböző lapok vetületei átfedés nélkül kitöltik L vetületét.

Konvex poliéderek: Euler tétele

Ha a vetítési középpontot P -n kívül, de az L laphoz elég közel választjuk, akkor az S síkon keletkező vetületi ábráról az alábbiakat állapíthatjuk meg:



- mindegyik lap vetülete konvex sokszög az S síkban,
- az L lap vetülete tartalmazza az összes többi lap vetületét,
- az L -től különböző lapok vetületei átfedés nélkül kitöltik L vetületét.

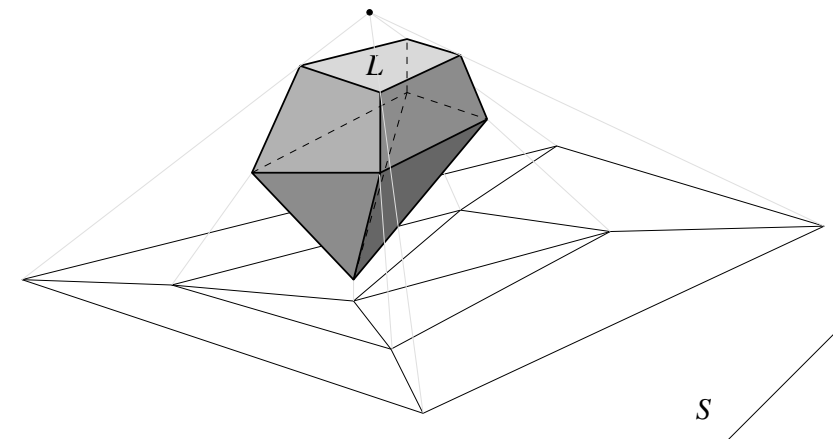
Ahhoz, hogy ezek a megállapítások érvényesek legyenek,

Konvex poliéderek: Euler tétele

... a vetítési középpont megválasztásánál elegendő arra ügyelni

Konvex poliéderek: Euler tétele

... a vetítési középpont megválasztásánál elegendő arra ügyelni, hogy a középpont az L -től különböző lapok síkjának ugyanazon az oldalán legyen, mint maga a poliéder.

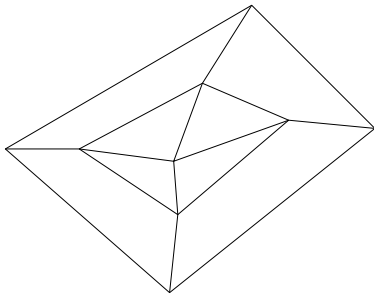


Konvex poliéderek: Euler tétele

Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét.

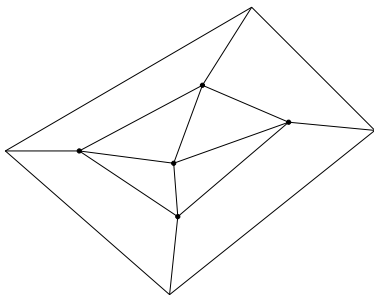
Konvex poliéderek: Euler tétele

Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



Konvex poliéderek: Euler tétele

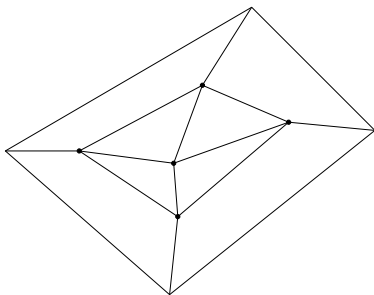
Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög;

Konvex poliéderek: Euler tétele

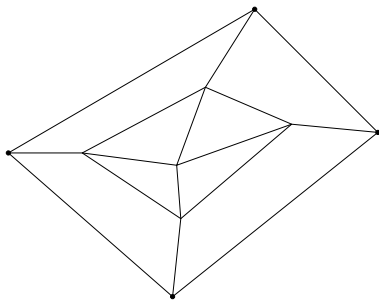
Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög; az ilyen csúcsok száma $c - k$, ahol k jelöli az L lap oldalszámát.

Konvex poliéderek: Euler tétele

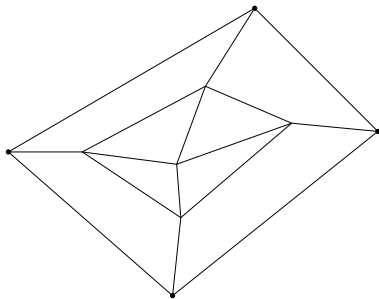
Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög; az ilyen csúcsok száma $c - k$, ahol k jelöli az L lap oldalszámát. A többi (az ábra szélére kerülő) k darab csúcsnál a szögek összege az L lap szögösszegének a kétszeresét adja,

Konvex poliéderek: Euler tétele

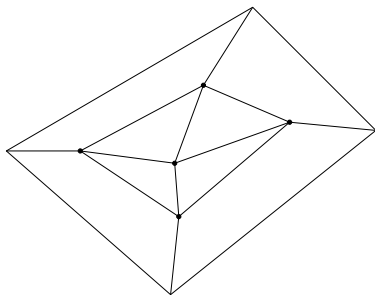
Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög; az ilyen csúcsok száma $c - k$, ahol k jelöli az L lap oldalszámát. A többi (az ábra szélére kerülő) k darab csúcsnál a szögek összege az L lap szögösszegének a kétszeresét adja, hiszen ezeket a szögeket egyszer L vetülete, másodszor az L vetületét kitöltő többi lapvetület fedi le.

Konvex poliéderek: Euler tétele

Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



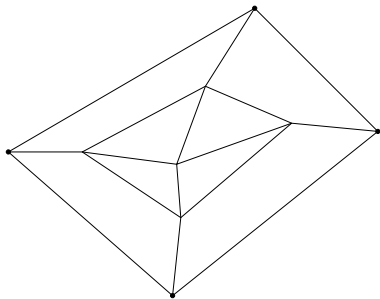
Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög; az ilyen csúcsok száma $c - k$, ahol k jelöli az L lap oldalszámát. A többi (az ábra szélére kerülő) k darab csúcsnál a szögek összege az L lap szögösszegének a kétszeresét adja, hiszen ezeket a szögeket egyszer L vetülete, másodszor az L vetületét kitöltő többi lapvetület fedi le.

Így tehát a szóban forgó szögösszeg

$$(c - k) \cdot 2\pi +$$

Konvex poliéderek: Euler tétele

Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



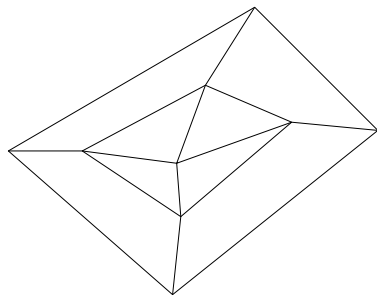
Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög; az ilyen csúcsok száma $c - k$, ahol k jelöli az L lap oldalszámát. A többi (az ábra szélére kerülő) k darab csúcsnál a szögek összege az L lap szögösszegének a kétszeresét adja, hiszen ezeket a szögeket egyszer L vetülete, másodszer az L vetületét kitöltő többi lapvetület fedi le.

Így tehát a szóban forgó szögösszeg

$$(c - k) \cdot 2\pi + 2 \cdot (k - 2)\pi =$$

Konvex poliéderek: Euler tétele

Számoljuk most össze az összes lap vetületében szereplő szögek összegét. Ezt kétféleképpen is megtehetjük.



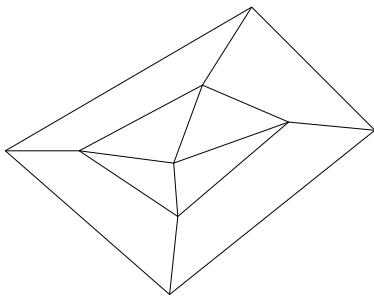
Egyrészt a vetületi ábra belsejébe kerülő mindegyik csúcs körül a szögösszeg a 2π teljesszög; az ilyen csúcsok száma $c - k$, ahol k jelöli az L lap oldalszámát. A többi (az ábra szélére kerülő) k darab csúcsnál a szögek összege az L lap szögösszegének a kétszeresét adja, hiszen ezeket a szögeket egyszer L vetülete, másodszor az L vetületét kitöltő többi lapvetület fedi le.

Így tehát a szóban forgó szögösszeg

$$(c - k) \cdot 2\pi + 2 \cdot (k - 2)\pi = 2c\pi - 4\pi.$$

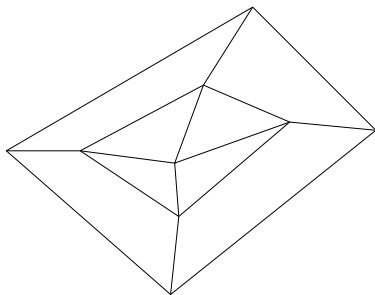
Konvex poliéderek: Euler tétele

Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk;



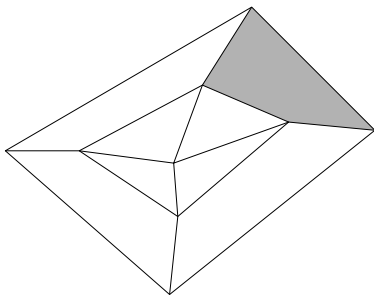
Konvex poliéderek: Euler tétele

Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Konvex poliéderek: Euler tétele

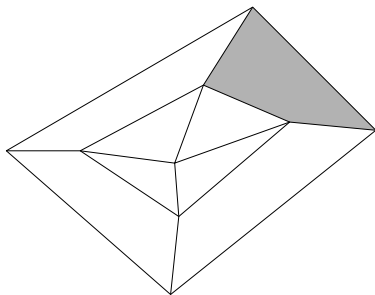
Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldal-száma.

Konvex poliéderek: Euler tétele

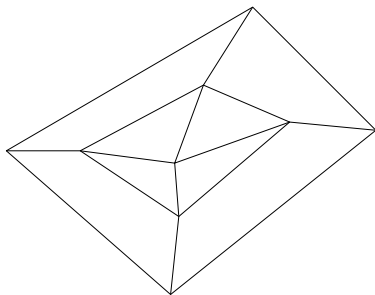
Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldal-száma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk,

Konvex poliéderek: Euler tétele

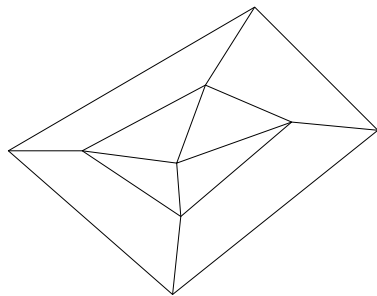
Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldal-száma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk.

Konvex poliéderek: Euler tétele

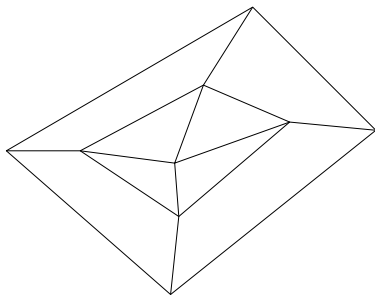
Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldalszáma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk. A lapok oldalszámainak az összege ugyanis éppen az élek számának a kétszerese,

Konvex poliéderek: Euler tétele

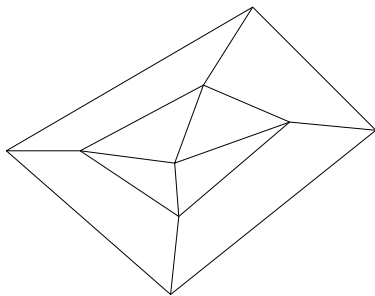
Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldalszáma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk. A lapok oldalszámainak az összege ugyanis éppen az élek számának a kétszerese, hiszen az összeszámlálásnál minden élt kétszer vettünk számításba.

Konvex poliéderek: Euler tétele

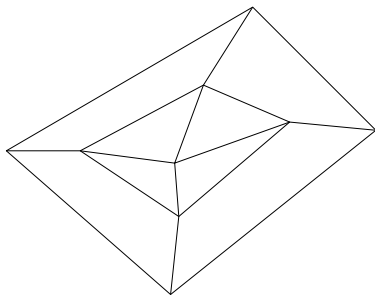
Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldalszáma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk. A lapok oldalszámainak az összege ugyanis éppen az élek számának a kétszerese, hiszen az összeszámlálásnál minden élt kétszer vettünk számításba. A levonandó pedig minden lap esetében 2π , összesen $2l\pi$.

Konvex poliéderek: Euler tétele

Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldalszáma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk. A lapok oldalszámainak az összege ugyanis éppen az élek számának a kétszerese, hiszen az összeszámlálásnál minden élt kétszer vettünk számításba. A levonandó pedig minden lap esetében 2π , összesen $2l\pi$.

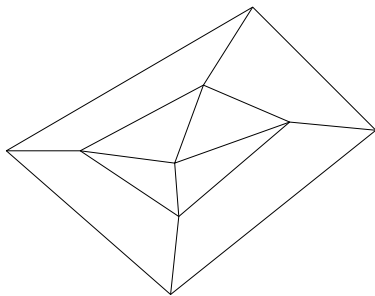
A két eredmény összevetésével a

$$2c\pi - 4\pi = 2e\pi - 2l\pi$$

összefüggést kapjuk,

Konvex poliéderek: Euler tétele

Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldalszáma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk. A lapok oldalszámainak az összege ugyanis éppen az élek számának a kétszerese, hiszen az összeszámlálásnál minden élt kétszer vettünk számításba. A levonandó pedig minden lap esetében 2π , összesen $2l\pi$.

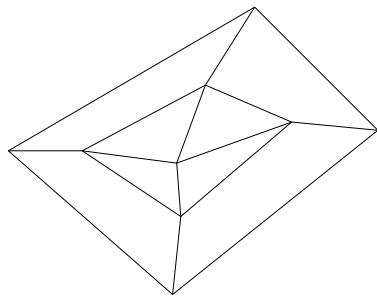
A két eredmény összevetésével a

$$2c\pi - 4\pi = 2e\pi - 2l\pi$$

összefüggést kapjuk, ahonnan 2π -vel osztva $c - 2 = e - l$,

Konvex poliéderek: Euler tétele

Másrészt ezt a szögösszeget összeszámolhatjuk először külön mindegyik lapvetületre, majd ezeket az összegeket összeadhatjuk; ezzel az eljárással ugyanezt a $2c\pi - 4\pi$ értéket kell kapnunk.



Egy lapvetületen belül a szögek összege $(m - 2)\pi$, ahol m a szóban forgó lap oldalszáma. Ha ezeket az értékeket az összes lapra összeadjuk, akkor a $2e\pi - 2l\pi$ mennyiséget kapjuk. A lapok oldalszámainak az összege ugyanis éppen az élek számának a kétszerese, hiszen az összeszámlálásnál minden élt kétszer vettünk számításba. A levonandó pedig minden lap esetében 2π , összesen $2l\pi$.

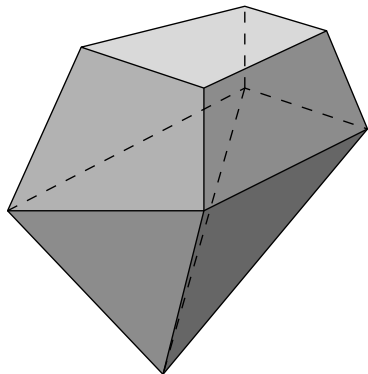
A két eredmény összevetésével a

$$2c\pi - 4\pi = 2e\pi - 2l\pi$$

összefüggést kapjuk, ahonnan 2π -vel osztva $c - 2 = e - l$, azaz átrendezve a tétel állítása következik.

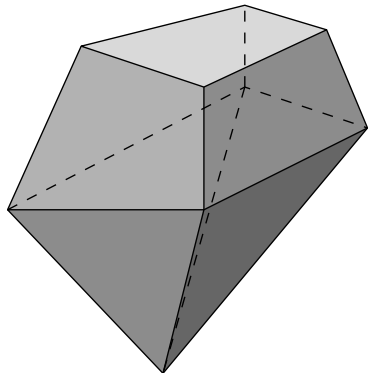
Konvex poliéderek: Euler tétele

2. bizonyítás:



Konvex poliéderek: Euler tétele

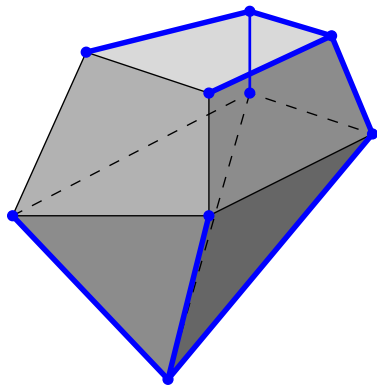
Tekintsük a P poliéder csúcsai és élei alkotta G gráfot.



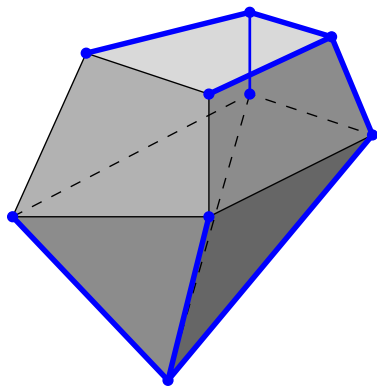
Konvex poliéderek: Euler tétele

Tekintsük a P poliéder csúcsai és élei alkotta G gráfot.

Válasszunk G -ben feszítő fát,



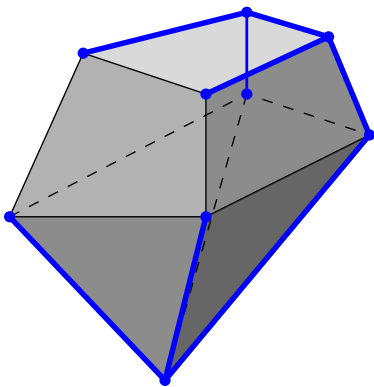
Konvex poliéderek: Euler tétele



Tekintsük a P poliéder csúcsai és élei alkotta G gráfot.

Válasszunk G -ben feszítő fát, azaz olyan $F \subset G$ részgráfot, amely fa (összefüggő és körmentes),

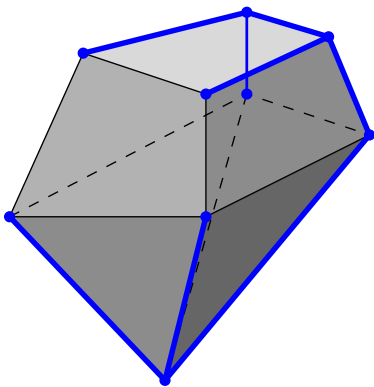
Konvex poliéderek: Euler tétele



Tekintsük a P poliéder csúcsai és élei alkotta G gráfot.

Válasszunk G -ben feszítő fát, azaz olyan $F \subset G$ részgráfot, amely fa (összefüggő és körmentes), és amely tartalmazza G összes csúcsát.

Konvex poliéderek: Euler tétele

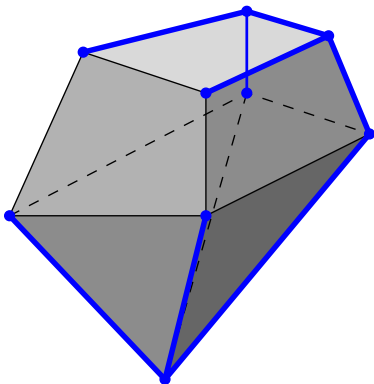


Tekintsük a P poliéder csúcsai és élei alkotta G gráfot.

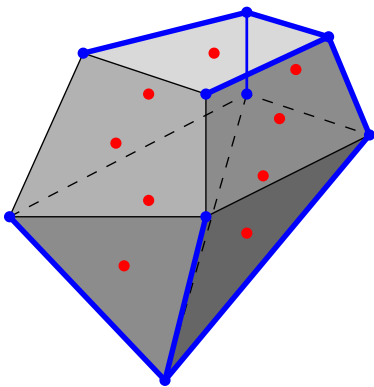
Válasszunk G -ben feszítő fát, azaz olyan $F \subset G$ részgráfot, amely fa (összefüggő és körmentes), és amely tartalmazza G összes csúcsát. Ekkor F -nek c csúcsa, és így $c - 1$ éle van.

Konvex poliéderek: Euler tétele

Készítsük el az F -hez tartozó ún. duális gráfot, F^* -ot a következőképpen:

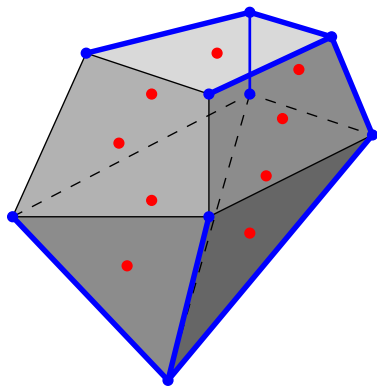


Konvex poliéderek: Euler tétele



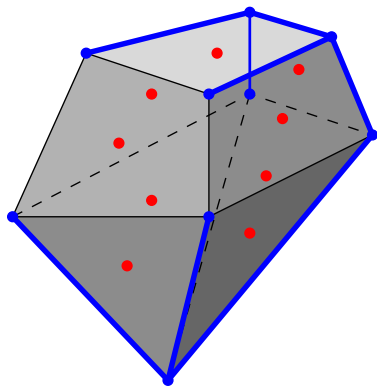
Készítsük el az F -hez tartozó ún. duális gráfot, F^* -ot a következőképpen:
 F^* szögpontjai legyenek P lapjai,

Konvex poliéderek: Euler tétele



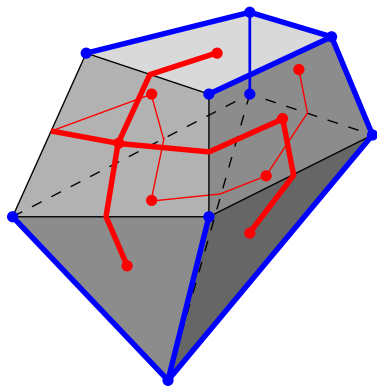
Készítsük el az F -hez tartozó ún. duális gráfot, F^* -ot a következőképpen: F^* szögpontjai legyenek P lapjai, két F^* -beli szögpont között pedig akkor és csak akkor fusson él,

Konvex poliéderek: Euler tétele



Készítsük el az F -hez tartozó ún. duális gráfot, F^* -ot a következőképpen: F^* szögpontjai legyenek P lapjai, két F^* -beli szögpont között pedig akkor és csak akkor fusson él, ha P -nek ez a két lapja olyan él mentén szomszédos, amely nem tartozik F -hez.

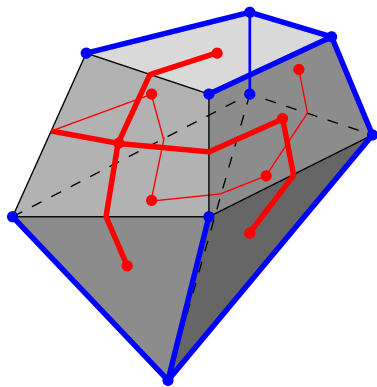
Konvex poliéderek: Euler tétele



Készítsük el az F -hez tartozó ún. duális gráfot, F^* -ot a következőképpen: F^* szögpontjai legyenek P lapjai, két F^* -beli szögpont között pedig akkor és csak akkor fusson él, ha P -nek ez a két lapja olyan él mentén szomszédos, amely nem tartozik F -hez.

(Az F^* duális gráfot egyszerűen ábrázolhatjuk a P poliéder felületén:

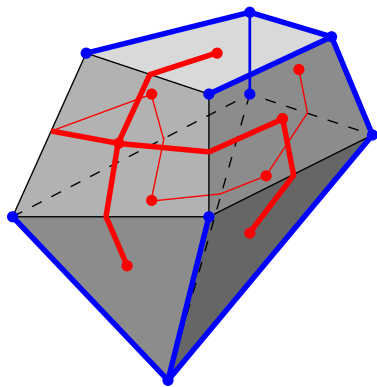
Konvex poliéderek: Euler tétele



Készítsük el az F -hez tartozó ún. duális gráfot, F^* -ot a következőképpen: F^* szögpontjai legyenek P lapjai, két F^* -beli szögpont között pedig akkor és csak akkor fusson él, ha P -nek ez a két lapja olyan él mentén szomszédos, amely nem tartozik F -hez.

(Az F^* duális gráfot egyszerűen ábrázolhatjuk a P poliéder felületén: a szögpontoknak feleljen meg egy-egy pont a lapok belsejében,

Konvex poliéderek: Euler tétele

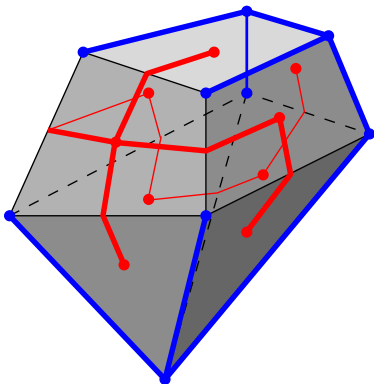


Készítsük el az F -hez tartozó ún. duális gráfot, F^* -ot a következőképpen: F^* szögpontjai legyenek P lapjai, két F^* -beli szögpont között pedig akkor és csak akkor fusson él, ha P -nek ez a két lapja olyan él mentén szomszédos, amely nem tartozik F -hez.

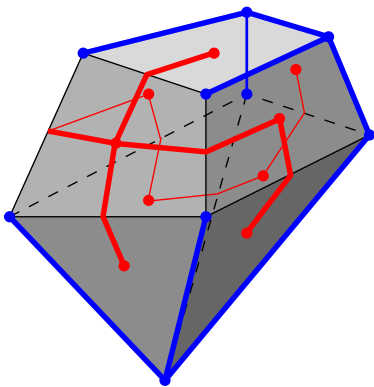
(Az F^* duális gráfot egyszerűen ábrázolhatjuk a P poliéder felületén: a szögpontoknak feleljen meg egy-egy pont a lapok belsejében, az éleket pedig P felületére rajzolt, egy törésponttal bíró töröttvonalak szemléltethetik.)

Konvex poliéderek: Euler tétele

Megállapíthatjuk, hogy az F^* gráf is fa.

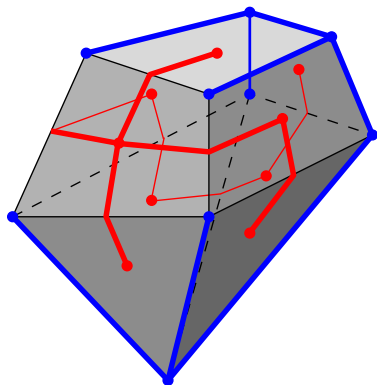


Konvex poliéderek: Euler tétele



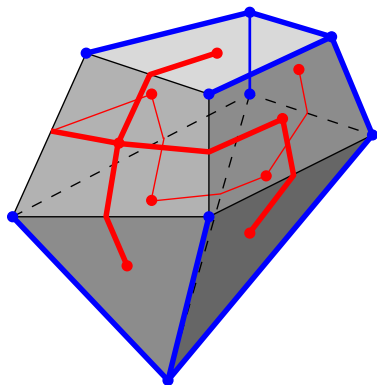
Megállapíthatjuk, hogy az F^* gráf is fa.
Összefüggősége F körmentességéből,
körmentessége pedig F összefüggő voltából
következik,

Konvex poliéderek: Euler tétele



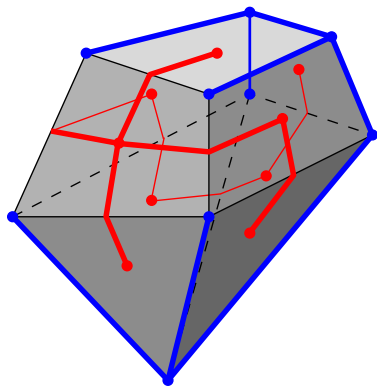
Megállapíthatjuk, hogy az F^* gráf is fa. Összefüggősége F körmentességéből, körmentessége pedig F összefüggő voltából következik, felhasználva a lapok, élek és csúcsok korábban tisztázott illeszkedési tulajdonságait.

Konvex poliéderek: Euler tétele



Megállapíthatjuk, hogy az F^* gráf is fa. Összefüggősége F körmentességéből, körmentessége pedig F összefüggő voltából következik, felhasználva a lapok, élek és csúcsok korábban tisztázott illeszkedési tulajdonságait. Az F^* fának l szögpontja van, emiatt élei száma $l - 1$.

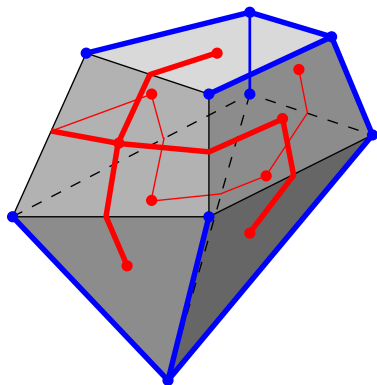
Konvex poliéderek: Euler tétele



Megállapíthatjuk, hogy az F^* gráf is fa. Összefüggősége F körmentességéből, körmentessége pedig F összefüggő voltából következik, felhasználva a lapok, élek és csúcsok korábban tisztázott illeszkedési tulajdonságait. Az F^* fának l szögpontja van, emiatt élei száma $l - 1$.

Végül csak azt kell megállapítanunk, hogy P bármelyik éle vagy F -hez tartozik, vagy pedig egy F^* -beli éllel összekötött két lapot választ el,

Konvex poliéderek: Euler tétele

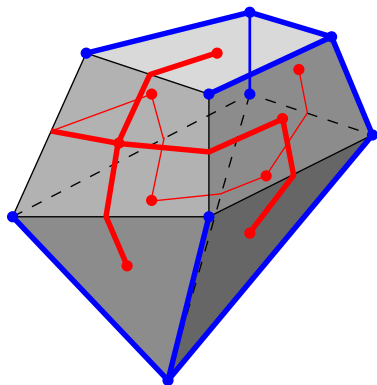


Megállapíthatjuk, hogy az F^* gráf is fa. Összefüggősége F körmentességéből, körmentessége pedig F összefüggő voltából következik, felhasználva a lapok, élek és csúcsok korábban tisztázott illeszkedési tulajdonságait. Az F^* fának l szögpontja van, emiatt élei száma $l - 1$.

Végül csak azt kell megállapítanunk, hogy P bármelyik éle vagy F -hez tartozik, vagy pedig egy F^* -beli éllel összekötött két lapot választ el, és ezért

$$e = (c - 1) + (l - 1).$$

Konvex poliéderek: Euler tétele



Megállapíthatjuk, hogy az F^* gráf is fa. Összefüggősége F körmentességéből, körmentessége pedig F összefüggő voltából következik, felhasználva a lapok, élek és csúcsok korábban tisztázott illeszkedési tulajdonságait. Az F^* fának l szögpontja van, emiatt élei száma $l - 1$.

Végül csak azt kell megállapítanunk, hogy P bármelyik éle vagy F -hez tartozik, vagy pedig egy F^* -beli éllel összekötött két lapot választ el, és ezért

$$e = (c - 1) + (l - 1).$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.