Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton
nmarci@math.elte.hu

www.math.elte.hu/˜nmarci

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Konvex halmazok

Konvex halmazok

Jelölés:

Konvex halmazok

Jelölés:

Ha A és B a tér tetszőleges két különböző pontja, akkor az A, B végpontú szakaszt az $[A, B]$ jellel jelöljük.

Konvex halmazok

Jelölés:

Ha A és B a tér tetszőleges két különböző pontja, akkor az A, B végpontú szakaszt az $[A, B]$ jellel jelöljük.

(Tehát $[A, B]$ az a ponthalmaz, amely A-ból, B-ből, és az egyenesükön A és B között elhelyezkedő összes pontból áll.)

Konvex halmazok

Jelölés:

Ha A és B a tér tetszőleges két különböző pontja, akkor az A, B végpontú szakaszt az $[A, B]$ jellel jelöljük.

(Tehát $[A, B]$ az a ponthalmaz, amely A-ból, B-ből, és az egyenesükön A és B között elhelyezkedő összes pontból áll.)

Kiterjesztjük a jelölést arra az esetre is, amikor $A = B$,

Konvex halmazok

Jelölés:

Ha A és B a tér tetszőleges két különböző pontja, akkor az A, B végpontú szakaszt az $[A, B]$ jellel jelöljük.

(Tehát $[A, B]$ az a ponthalmaz, amely A-ból, B-ből, és az egyenesükön A és B között elhelyezkedő összes pontból áll.)

Kiterjesztjük a jelölést arra az esetre is, amikor $A = B$, ekkor $[A, A] = \{A\}$ egyelemű halmaz.

Konvex halmazok

Jelölés:

Ha A és B a tér tetszőleges két különböző pontja, akkor az A, B végpontú szakaszt az $[A, B]$ jellel jelöljük.

(Tehát $[A, B]$ az a ponthalmaz, amely A-ból, B-ből, és az egyenesükön A és B között elhelyezkedő összes pontból áll.)

Kiterjesztjük a jelölést arra az esetre is, amikor $A = B$, ekkor $[A, A] = \{A\}$ egyelemű halmaz. (Ilyenkor „elfajuló” szakaszról szokás beszélni.)

Konvex halmazok

Jelölés:

Ha A és B a tér tetszőleges két különböző pontja, akkor az A, B végpontú szakaszt az $[A, B]$ jellel jelöljük.

(Tehát $[A, B]$ az a ponthalmaz, amely A-ból, B-ből, és az egyenesükön A és B között elhelyezkedő összes pontból áll.)

Kiterjesztjük a jelölést arra az esetre is, amikor $A = B$, ekkor $[A, A] = \{A\}$ egyelemű halmaz. (Ilyenkor „elfajuló” szakaszról szokás beszélni.)

Definíció

Legyen K térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy K konvex, ha bármely $A, B \in K$-ra $[A, B] \subseteq K$ teljesül.

Konvex halmazok

Definíció

Legyen K térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy K konvex, ha bármely $A, B \in K$-ra $[A, B] \subseteq K$ teljesül.

Konvex halmazok

Definíció

Legyen K térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy K konvex, ha bármely $A, B \in K$-ra $[A, B] \subseteq K$ teljesül.

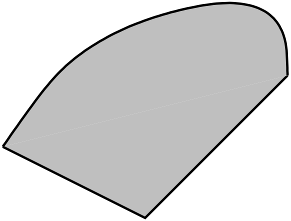
Egy halmaz tehát akkor és csak akkor konvex, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza:

Konvex halmazok

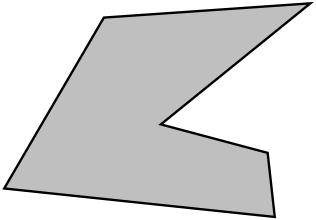
Definíció

Legyen K térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy K **konvex**, ha bármely $A, B \in K$-ra $[A, B] \subseteq K$ teljesül.

Egy halmaz tehát akkor és csak akkor konvex, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza:



konvex



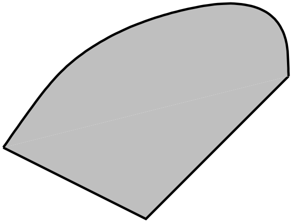
nem konvex

Konvex halmazok

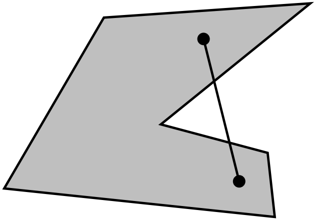
Definíció

Legyen K térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy K konvex, ha bármely $A, B \in K$-ra $[A, B] \subseteq K$ teljesül.

Egy halmaz tehát akkor és csak akkor konvex, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza:



konvex



nem konvex

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek; észrevétel: ha egy véges ponthalmaznak legalább két eleme van, akkor nem lehet konvex);

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek; észrevétel: ha egy véges ponthalmaznak legalább két eleme van, akkor nem lehet konvex);
- az üres halmaz;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek; észrevétel: ha egy véges ponthalmaznak legalább két eleme van, akkor nem lehet konvex);
- az üres halmaz;
- háromszög(lemez), parallelogramma, trapéz;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek; észrevétel: ha egy véges ponthalmaznak legalább két eleme van, akkor nem lehet konvex);
- az üres halmaz;
- háromszög(lemez), parallelogramma, trapéz;
- egy négyszög akkor és csak akkor konvex, ha átlószakaszai metszik egymást;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek; észrevétel: ha egy véges ponthalmaznak legalább két eleme van, akkor nem lehet konvex);
- az üres halmaz;
- háromszög(lemez), parallelogramma, trapéz;
- egy négyszög akkor és csak akkor konvex, ha átlószakaszai metszik egymást;
- tetraéder, háromoldalú hasáb, parallelepipedon;

Konvex halmazok

Példák konvex halmazokra:

- az egész tér;
- sík, egyenes;
- féltér, félsík, félegyenes, szakasz;
- az egypontú halmazok (a kétpontú halmazok nem konvexek; észrevétel: ha egy véges ponthalmaznak legalább két eleme van, akkor nem lehet konvex);
- az üres halmaz;
- háromszög(lemez), parallelogramma, trapéz;
- egy négyszög akkor és csak akkor konvex, ha átlószakaszai metszik egymást;
- tetraéder, háromoldalú hasáb, parallelepipedon;
- körlemez, gömbtest, forgáshenger, forgáskúp.

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex,

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex, hanem akárhány (jellemzően végtelen sok) halmaz is lehet, amelyek közös részét vizsgáljuk.

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex, hanem akárhány (jellemzően végtelen sok) halmaz is lehet, amelyek közös részét vizsgáljuk. Ezt később, a konvex burok előállításánál ki is fogjuk használni.

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex, hanem akárhány (jellemzően végtelen sok) halmaz is lehet, amelyek közös részét vizsgáljuk. Ezt később, a konvex burok előállításánál ki is fogjuk használni.

Bizonyítás:

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex, hanem akárhány (jellemzően végtelen sok) halmaz is lehet, amelyek közös részét vizsgáljuk. Ezt később, a konvex burok előállításánál ki is fogjuk használni.

Bizonyítás:
Legyen $i \in I$-re K_i konvex ponthalmaz

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex, hanem akárhány (jellemzően végtelen sok) halmaz is lehet, amelyek közös részét vizsgáljuk. Ezt később, a konvex burok előállításánál ki is fogjuk használni.

Bizonyítás:
Legyen $i \in I$-re K_i konvex ponthalmaz (ahol I tetszőleges indexhalmaz).

Konvex halmazok

Állítás

Konvex halmazok tetszőleges rendszerének a metszete is konvex.

Megjegyzés:
A „tetszőleges rendszer” kifejezés arra utal, hogy nem csak két konvex halmaz metszetéről állítjuk, hogy konvex, hanem akárhány (jellemzően végtelen sok) halmaz is lehet, amelyek közös részét vizsgáljuk. Ezt később, a konvex burok előállításánál ki is fogjuk használni.

Bizonyítás:
Legyen $i \in I$-re K_i konvex ponthalmaz (ahol I tetszőleges indexhalmaz). Belátjuk, hogy a $K = \cap_{i \in I} K_i$ metszethalmaz is konvex.

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot,

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$,

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$,
és így K_i konvexitása miatt valóban $[A, B] \subseteq K_i$.

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$, és így K_i konvexitása miatt valóban $[A, B] \subseteq K_i$.

Definíció

Legyen H térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy K ponthalmaz a H konvex burka, ha az alábbi három követelmény mindegyike teljesül:

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$, és így K_i konvexitása miatt valóban $[A, B] \subseteq K_i$.

Definíció

Legyen H térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy K ponthalmaz a H konvex burka, ha az alábbi három követelmény mindegyike teljesül:

(i) K konvex,

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$, és így K_i konvexitása miatt valóban $[A, B] \subseteq K_i$.

Definíció

Legyen H térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy K ponthalmaz a H konvex burka, ha az alábbi három követelmény mindegyike teljesül:

(i) K konvex,

(ii) $H \subseteq K$,

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$, és így K_i konvexitása miatt valóban $[A, B] \subseteq K_i$.

Definíció

Legyen H térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy K ponthalmaz a H konvex burka, ha az alábbi három követelmény mindegyike teljesül:

(i) K konvex,

(ii) $H \subseteq K$,

(iii) ha L konvex halmaz és $H \subseteq L$, akkor $K \subseteq L$.

Konvex halmazok

Ennek ellenőrzése céljából vegyünk föl két tetszőleges $A, B \in K$ pontot, be kell látnunk, hogy $[A, B] \subseteq K$.
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy minden $i \in I$-re $[A, B] \subseteq K_i$.
Legyen $i \in I$ tetszőleges; ekkor $K \subseteq K_i$ miatt $A, B \in K_i$, és így K_i konvexitása miatt valóban $[A, B] \subseteq K_i$.

Definíció

Legyen H térbeli ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy K ponthalmaz a H konvex burka, ha az alábbi három követelmény mindegyike teljesül:

(i) K konvex,

(ii) $H \subseteq K$,

(iii) ha L konvex halmaz és $H \subseteq L$, akkor $K \subseteq L$.

A harmadik követelmény azt írja elő, hogy a konvex burok szűkebb legyen minden lefedő konvex halmaznál.

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben,

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben, arról nem szól, hogy vajon létezik-e bármely halmaznak konvex burka, illetve hogy az egyértelmű-e.

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben, arról nem szól, hogy vajon létezik-e bármely halmaznak konvex burka, illetve hogy az egyértelmű-e. Ezt még tisztáznunk kell:

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben, arról nem szól, hogy vajon létezik-e bármely halmaznak konvex burka, illetve hogy az egyértelmű-e. Ezt még tisztáznunk kell:

Tétel

Bármely ponthalmaznak egyértelműen létezik konvex burka.

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben, arról nem szól, hogy vajon létezik-e bármely halmaznak konvex burka, illetve hogy az egyértelmű-e. Ezt még tisztáznunk kell:

Tétel

Bármely ponthalmaznak egyértelműen létezik konvex burka.

Bizonyítás:

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben, arról nem szól, hogy vajon létezik-e bármely halmaznak konvex burka, illetve hogy az egyértelmű-e. Ezt még tisztáznunk kell:

Tétel

Bármely ponthalmaznak egyértelműen létezik konvex burka.

Bizonyítás:

Adott a H ponthalmaz,

Konvex halmazok: konvex burok

Tehát valamely halmaz konvex burka a halmazt tartalmazó konvex halmazok közül a lehető legszűkebb.

A definíció nem „adja meg” a halmazok konvex burkát, hanem csak követelményeket támaszt a konvex burokkal szemben, arról nem szól, hogy vajon létezik-e bármely halmaznak konvex burka, illetve hogy az egyértelmű-e. Ezt még tisztáznunk kell:

Tétel

Bármely ponthalmaznak egyértelműen létezik konvex burka.

Bizonyítás:

Adott a H ponthalmaz, tekintsük a H-t tartalmazó összes konvex halmaz metszetét:

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L \,.$$

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L \,.$$

halmaz a H konvex burka.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L \, .$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L \,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L\,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L \,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L \,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Tisztázni kell még a konvex burok egyértelműségét.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L\,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Tisztázni kell még a konvex burok egyértelműségét.

Tegyük fel, hogy H-nak K_1 is és K_2 is konvex burka.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L\,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Tisztázni kell még a konvex burok egyértelműségét.

Tegyük fel, hogy H-nak K_1 is és K_2 is konvex burka. Ekkor a definícióbeli (iii) tulajdonságot $K = K_1$, $L = K_2$ szereposztással alkalmazva $K_1 \subseteq K_2$ következik,

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L\,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Tisztázni kell még a konvex burok egyértelműségét.

Tegyük fel, hogy H-nak K_1 is és K_2 is konvex burka. Ekkor a definícióbeli (iii) tulajdonságot $K = K_1$, $L = K_2$ szereposztással alkalmazva $K_1 \subseteq K_2$ következik, majd a fordított $K = K_2$, $L = K_1$ szereposztással $K_2 \subseteq K_1$ adódik.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L \,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Tisztázni kell még a konvex burok egyértelműségét.

Tegyük fel, hogy H-nak K_1 is és K_2 is konvex burka. Ekkor a definícióbeli (iii) tulajdonságot $K = K_1$, $L = K_2$ szereposztással alkalmazva $K_1 \subseteq K_2$ következik, majd a fordított $K = K_2$, $L = K_1$ szereposztással $K_2 \subseteq K_1$ adódik. Tehát $K_1 = K_2$.

Konvex halmazok: konvex burok

Állítjuk, hogy ez a

$$K = \bigcap_{\substack{L \text{ konvex} \\ H \subseteq L}} L\,.$$

halmaz a H konvex burka. Ehhez a definícióbeli három követelmény teljesülését kell ellenőrizni:

(i): K konvex, hiszen konvex halmazok metszeteként állítottuk elő.

(ii): $H \subseteq K$, mert mindegyik metszendő halmaz tartalmazza H-t.

(iii): Ha L konvex és $H \subseteq L$, akkor L egyike a metszendő halmazoknak, és ezért a metszet szűkebb nála: $K \subseteq L$.

Tisztázni kell még a konvex burok egyértelműségét.

Tegyük fel, hogy H-nak K_1 is és K_2 is konvex burka. Ekkor a definícióbeli (iii) tulajdonságot $K = K_1$, $L = K_2$ szereposztással alkalmazva $K_1 \subseteq K_2$ következik, majd a fordított $K = K_2$, $L = K_1$ szereposztással $K_2 \subseteq K_1$ adódik. Tehát $K_1 = K_2$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.

Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka:

Konvex halmazok: konvex burok

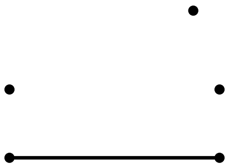
Példák ponthalmazok konvex burkára:

- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.

Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

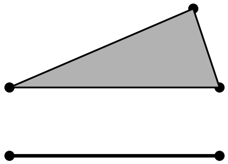
- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.
- Három nem kollineáris pont konvex burka:



Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

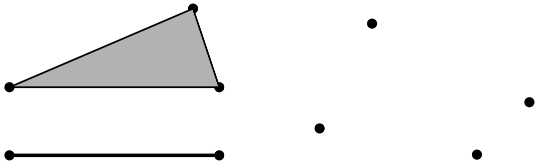
- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.
- Három nem kollineáris pont konvex burka: háromszög.



Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

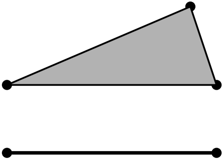
- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.
- Három nem kollineáris pont konvex burka: háromszög.
- Négy nem egysíkú pont konvex burka:

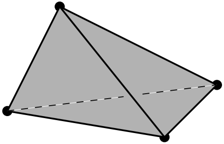


Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.
- Három nem kollineáris pont konvex burka: háromszög.
- Négy nem egysíkú pont konvex burka: tetraéder.

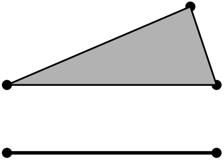


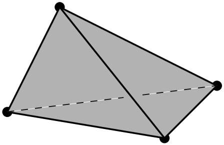


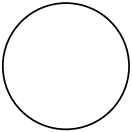
Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.
- Három nem kollineáris pont konvex burka: háromszög.
- Négy nem egysíkú pont konvex burka: tetraéder.
- Körvonal konvex burka:



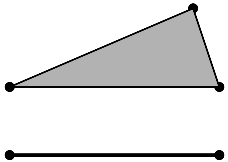


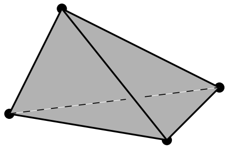


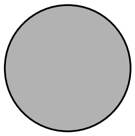
Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.
- Három nem kollineáris pont konvex burka: háromszög.
- Négy nem egysíkú pont konvex burka: tetraéder.
- Körvonal konvex burka: körlemez.



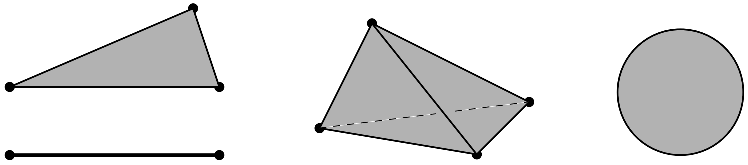




Konvex halmazok: konvex burok

Példák ponthalmazok konvex burkára:

- Egy ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha azonos a saját konvex burkával.
- Két pont konvex burka: szakasz.
- Három nem kollineáris pont konvex burka: háromszög.
- Négy nem egysíkú pont konvex burka: tetraéder.
- Körvonal konvex burka: körlemez.



- Gömbfelület konvex burka: gömbtest.

Súlypontok és konvex halmazok

Súlypontok és konvex halmazok

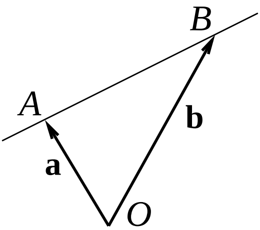
Példa:

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.

Súlypontok és konvex halmazok

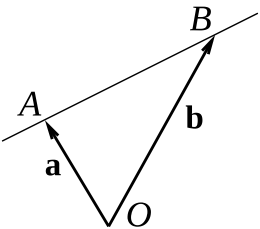
Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora,

Súlypontok és konvex halmazok

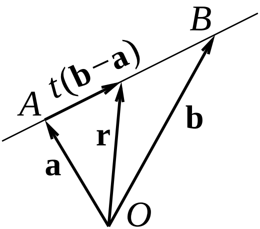
Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora.

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.

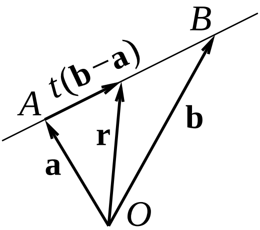


Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora. Az

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



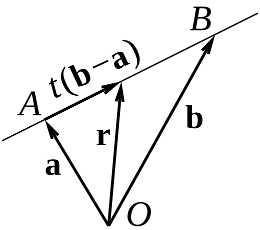
Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora. Az

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

paraméteres vektoregyenlet

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



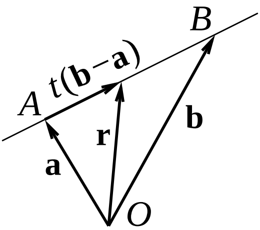
Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora. Az

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

paraméteres vektoregyenlet pontosan akkor adja meg az $[A, B]$ szakasz valamely pontját,

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



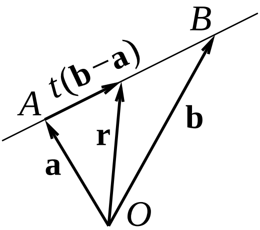
Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora. Az

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

paraméteres vektoregyenlet pontosan akkor adja meg az $[A, B]$ szakasz valamely pontját, ha $t \in [0, 1]$.

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora. Az

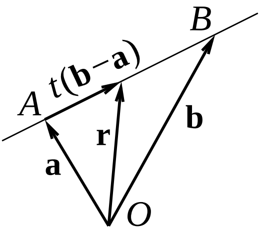
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

paraméteres vektoregyenlet pontosan akkor adja meg az $[A, B]$ szakasz valamely pontját, ha $t \in [0, 1]$.

Ilyenkor t is és $(1 - t)$ is nemnegatív.

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



Legyen **a** és **b** az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora. Az

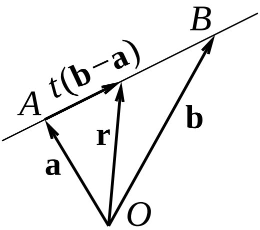
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

paraméteres vektoregyenlet pontosan akkor adja meg az $[A, B]$ szakasz valamely pontját, ha $t \in [0, 1]$.

Ilyenkor t is és $(1 - t)$ is nemnegatív. Az $[A, B]$ szakasz pontjai tehát az A és B alappontokból nemnegatív súlyokkal állíthatók elő súlypontként.

Súlypontok és konvex halmazok

Példa: Legyen $A \neq B$ és tekintsük az $[A, B]$ szakaszt.



Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ az A, illetve B helyvektora, ekkor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ az AB egyenes irányvektora. Az

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \\ &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \end{aligned}$$

paraméteres vektoregyenlet pontosan akkor adja meg az $[A, B]$ szakasz valamely pontját, ha $t \in [0, 1]$.

Ilyenkor t is és $(1 - t)$ is nemnegatív. Az $[A, B]$ szakasz pontjai tehát az A és B alappontokból nemnegatív súlyokkal állíthatók elő súlypontként.

Megfordítva, ha A-t és B-t tetszőleges nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert súlypont az $[A, B]$ szakasz egy pontja.

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el,

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő.

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő. Feltehetjük, hogy mindegyik $\alpha_i > 0$, hiszen a 0 súlyú pontok elhagyhatók.

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő. Feltehetjük, hogy mindegyik $\alpha_i > 0$, hiszen a 0 súlyú pontok elhagyhatók.

Az n szám szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy $S \in K$.

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő. Feltehetjük, hogy mindegyik $\alpha_i > 0$, hiszen a 0 súlyú pontok elhagyhatók.

Az n szám szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy $S \in K$.
Az $n = 1$ eset nyilvánvaló.

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő. Feltehetjük, hogy mindegyik $\alpha_i > 0$, hiszen a 0 súlyú pontok elhagyhatók.

Az n szám szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy $S \in K$.
Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és n-nél kevesebb pontra az állítást már beláttuk.

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő. Feltehetjük, hogy mindegyik $\alpha_i > 0$, hiszen a 0 súlyú pontok elhagyhatók.

Az n szám szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy $S \in K$.
Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és n-nél kevesebb pontra az állítást már beláttuk.

Bontsuk az $A_1, \ldots, A_n$ pontrendszert két kisebb elemszámú diszjunkt csoportra

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő. Feltehetjük, hogy mindegyik $\alpha_i > 0$, hiszen a 0 súlyú pontok elhagyhatók.

Az n szám szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy $S \in K$.
Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és n-nél kevesebb pontra az állítást már beláttuk.

Bontsuk az $A_1, \ldots, A_n$ pontrendszert két kisebb elemszámú diszjunkt csoportra (pl. $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ és $\{A_n\}$),

Súlypontok és konvex halmazok

Tétel

Ha egy K konvex halmaz tetszőleges véges sok pontját nemnegatív súlyokkal látjuk el, akkor az így nyert pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik.

Bizonyítás:

Adottak az $A_1, \ldots, A_n \in K$ pontok rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ súlyokkal, amelyek az S súlypontot állítják elő. Feltehetjük, hogy mindegyik $\alpha_i > 0$, hiszen a 0 súlyú pontok elhagyhatók.

Az n szám szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy $S \in K$.
Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és n-nél kevesebb pontra az állítást már beláttuk.

Bontsuk az $A_1, \ldots, A_n$ pontrendszert két kisebb elemszámú diszjunkt csoportra (pl. $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ és $\{A_n\}$), és alkalmazzuk a csoportosíthatósági tételt.

Súlypontok és konvex halmazok

Az indukciós feltevés miatt a csoportonként vett súlypontok (S_1 és S_2) K-hoz tartoznak,

Súlypontok és konvex halmazok

Az indukciós feltevés miatt a csoportonként vett súlypontok (S_1 és S_2) K-hoz tartoznak, továbbá a csoportosíthatósági tétel miatt S előáll az S_1 és S_2 pozitív súlyokkal vett súlypontjaként.

Súlypontok és konvex halmazok

Az indukciós feltevés miatt a csoportonként vett súlypontok (S_1 és S_2) K-hoz tartoznak, továbbá a csoportosíthatósági tétel miatt S előáll az S_1 és S_2 pozitív súlyokkal vett súlypontjaként. Ezért $S \in [S_1, S_2]$.

Súlypontok és konvex halmazok

Az indukciós feltevés miatt a csoportonként vett súlypontok (S_1 és S_2) K-hoz tartoznak, továbbá a csoportosíthatósági tétel miatt S előáll az S_1 és S_2 pozitív súlyokkal vett súlypontjaként. Ezért $S \in [S_1, S_2]$.
A K halmaz konvexitása miatt $[S_1, S_2] \subseteq K$, tehát $S \in K$.

Súlypontok és konvex halmazok

Az indukciós feltevés miatt a csoportonként vett súlypontok (S_1 és S_2) K-hoz tartoznak, továbbá a csoportosíthatósági tétel miatt S előáll az S_1 és S_2 pozitív súlyokkal vett súlypontjaként. Ezért $S \in [S_1, S_2]$.
A K halmaz konvexitása miatt $[S_1, S_2] \subseteq K$, tehát $S \in K$.

A tétel megfordítása is igaz:

Súlypontok és konvex halmazok

Az indukciós feltevés miatt a csoportonként vett súlypontok (S_1 és S_2) K-hoz tartoznak, továbbá a csoportosíthatósági tétel miatt S előáll az S_1 és S_2 pozitív súlyokkal vett súlypontjaként. Ezért $S \in [S_1, S_2]$. A K halmaz konvexitása miatt $[S_1, S_2] \subseteq K$, tehát $S \in K$.

A tétel megfordítása is igaz:

Ha egy K ponthalmazból bármely véges sok pontot nemnegatív súlyokkal ellátva az így nyert súlyozott pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik, akkor K konvex.

Súlypontok és konvex halmazok

Az indukciós feltevés miatt a csoportonként vett súlypontok (S_1 és S_2) K-hoz tartoznak, továbbá a csoportosíthatósági tétel miatt S előáll az S_1 és S_2 pozitív súlyokkal vett súlypontjaként. Ezért $S \in [S_1, S_2]$.
A K halmaz konvexitása miatt $[S_1, S_2] \subseteq K$, tehát $S \in K$.

A tétel megfordítása is igaz:

Ha egy K ponthalmazból bármely véges sok pontot nemnegatív súlyokkal ellátva az így nyert súlyozott pontrendszer súlypontja is K-hoz tartozik, akkor K konvex.

Valóban, kételemű pontrendszerekre szorítkozva a feltétel éppen azt jelenti, hogy K bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakasz minden pontja K-hoz tartozik.

Súlypontok és konvex halmazok

Ezzel a konvex halmazok alábbi jellemzését kaptuk:

Súlypontok és konvex halmazok

Ezzel a konvex halmazok alábbi jellemzését kaptuk:

Tétel

Egy K ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely véges sok pontját nemnegatív súlyokkal ellátva a hozzájuk tartozó súlypont is K-ban van.

Súlypontok és konvex halmazok

Ezzel a konvex halmazok alábbi jellemzését kaptuk:

Tétel

Egy K ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely véges sok pontját nemnegatív súlyokkal ellátva a hozzájuk tartozó súlypont is K-ban van.

Tetszőleges ponthalmaz konvex burka is leírható súlypontok segítségével:

Súlypontok és konvex halmazok

Ezzel a konvex halmazok alábbi jellemzését kaptuk:

Tétel

Egy K ponthalmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely véges sok pontját nemnegatív súlyokkal ellátva a hozzájuk tartozó súlypont is K-ban van.

Tetszőleges ponthalmaz konvex burka is leírható súlypontok segítségével:

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Súlypontok és konvex burok

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Bizonyítás:

Súlypontok és konvex burok

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Bizonyítás:

Legyen S az a halmaz, amely a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjaiból áll.

Súlypontok és konvex burok

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Bizonyítás:

Legyen S az a halmaz, amely a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjaiból áll. Belátjuk, hogy S teljesíti a konvex burok definíciójában szereplő három követelményt.

Súlypontok és konvex burok

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Bizonyítás:

Legyen S az a halmaz, amely a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjaiból áll. Belátjuk, hogy S teljesíti a konvex burok definíciójában szereplő három követelményt.

(i): S konvex:

Súlypontok és konvex burok

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Bizonyítás:

Legyen S az a halmaz, amely a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjaiból áll. Belátjuk, hogy S teljesíti a konvex burok definíciójában szereplő három követelményt.

(i): S konvex: Legyen $A, B \in S$, megmutatjuk, hogy $[A, B] \subseteq S$.

Súlypontok és konvex burok

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Bizonyítás:

Legyen S az a halmaz, amely a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjaiból áll. Belátjuk, hogy S teljesíti a konvex burok definíciójában szereplő három követelményt.

(i): S konvex: Legyen $A, B \in S$, megmutatjuk, hogy $[A, B] \subseteq S$. Legyen $P \in [A, B]$, azt kell igazolnunk, hogy $P \in S$.

Súlypontok és konvex burok

Tétel

Bármely H ponthalmazra H konvex burka éppen a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjai alkotta halmaz.

Bizonyítás:

Legyen S az a halmaz, amely a nemnegatív súlyokkal ellátott véges H-beli pontrendszerek súlypontjaiból áll. Belátjuk, hogy S teljesíti a konvex burok definíciójában szereplő három követelményt.

(i): S konvex: Legyen $A, B \in S$, megmutatjuk, hogy $[A, B] \subseteq S$. Legyen $P \in [A, B]$, azt kell igazolnunk, hogy $P \in S$. Miután $A \in S$, az A pont előáll, mint valamilyen $A_1, \ldots, A_i \in H$ pontrendszernek valamilyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \geq 0$ súlyokkal vett súlypontja.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.
Tekintsük a H-beli $A_1, \ldots, A_i, B_1, \ldots, B_j$ pontrendszert

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.
Tekintsük a H-beli $A_1, \ldots, A_i, B_1, \ldots, B_j$ pontrendszert rendre az $\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_i, \beta\beta_1, \ldots, \beta\beta_j$ súlyokkal ellátva. A csoportosíthatósági tételt alkalmazva ennek a pontrendszernek a súlypontja P,

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.
Tekintsük a H-beli $A_1, \ldots, A_i, B_1, \ldots, B_j$ pontrendszert rendre az $\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_i, \beta\beta_1, \ldots, \beta\beta_j$ súlyokkal ellátva. A csoportosíthatósági tételt alkalmazva ennek a pontrendszernek a súlypontja P, emiatt valóban $P \in S$.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.
Tekintsük a H-beli $A_1, \ldots, A_i, B_1, \ldots, B_j$ pontrendszert rendre az $\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_i, \beta\beta_1, \ldots, \beta\beta_j$ súlyokkal ellátva. A csoportosíthatósági tételt alkalmazva ennek a pontrendszernek a súlypontja P, emiatt valóban $P \in S$.

(ii): $H \subseteq S$:

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.
Tekintsük a H-beli $A_1, \ldots, A_i, B_1, \ldots, B_j$ pontrendszert rendre az $\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_i, \beta\beta_1, \ldots, \beta\beta_j$ súlyokkal ellátva. A csoportosíthatósági tételt alkalmazva ennek a pontrendszernek a súlypontja P, emiatt valóban $P \in S$.

(ii): $H \subseteq S$: Ez nyilvánvaló, hiszen a H-ból vett egyelemű súlyozott pontrendszerek súlypontjai éppen H elemei.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.
Tekintsük a H-beli $A_1, \ldots, A_i, B_1, \ldots, B_j$ pontrendszert rendre az $\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_i, \beta\beta_1, \ldots, \beta\beta_j$ súlyokkal ellátva. A csoportosíthatósági tételt alkalmazva ennek a pontrendszernek a súlypontja P, emiatt valóban $P \in S$.

(ii): $H \subseteq S$: Ez nyilvánvaló, hiszen a H-ból vett egyelemű súlyozott pontrendszerek súlypontjai éppen H elemei.

(iii): Legyen L konvex halmaz, melyre $H \subseteq L$.

Súlypontok és konvex burok

Hasonlóan $B \in S$ miatt B egy $\beta_1, \ldots, \beta_j \geq 0$ súlyokkal ellátott $B_1, \ldots, B_j \in H$ pontrendszer súlypontja.
Feltehetjük (a súlyokat alkalmas pozitív skalárral végigszorozva), hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i = \beta_1 + \ldots + \beta_j = 1$.
Mivel $P \in [A, B]$, a P pont is előáll A és B súlypontjaként alkalmas $\alpha, \beta \geq 0$ súlyokkal. Feltehetjük, hogy $P \neq A, B$, azaz $\alpha, \beta > 0$.
Tekintsük a H-beli $A_1, \ldots, A_i, B_1, \ldots, B_j$ pontrendszert rendre az $\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_i, \beta\beta_1, \ldots, \beta\beta_j$ súlyokkal ellátva. A csoportosíthatósági tételt alkalmazva ennek a pontrendszernek a súlypontja P, emiatt valóban $P \in S$.

(ii): $H \subseteq S$: Ez nyilvánvaló, hiszen a H-ból vett egyelemű súlyozott pontrendszerek súlypontjai éppen H elemei.

(iii): Legyen L konvex halmaz, melyre $H \subseteq L$. Be kell látnunk, hogy ekkor $S \subseteq L$.

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai,

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek.

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Példa:

Súlypontok és konvex burok

> Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

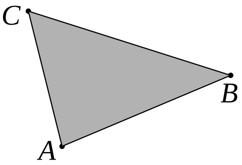
Példa:
Legyen A, B, C három nem kollineáris pont, $H = \{A, B, C\}$.

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Példa:
Legyen A, B, C három nem kollineáris pont, $H = \{A, B, C\}$.



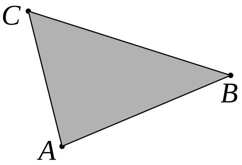
Ha A-t, B-t, C-t rendre az $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ súlyokkal látjuk el, akkor a súlypont az ABC háromszög valamely pontja.

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Példa:
Legyen A, B, C három nem kollineáris pont, $H = \{A, B, C\}$.



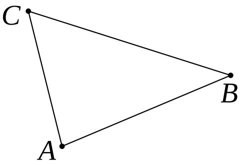
Ha A-t, B-t, C-t rendre az α, β, $\gamma \geq 0$ súlyokkal látjuk el, akkor a súlypont az ABC háromszög valamely pontja. Belső pont, ha α, β, $\gamma > 0$,

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Példa:
Legyen A, B, C három nem kollineáris pont, $H = \{A, B, C\}$.



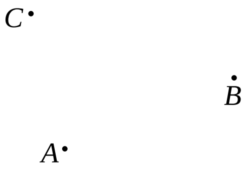
Ha A-t, B-t, C-t rendre az $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ súlyokkal látjuk el, akkor a súlypont az ABC háromszög valamely pontja. Belső pont, ha $\alpha, \beta, \gamma > 0$, határpont, ha a súlyok közt van 0.

Súlypontok és konvex burok

Az S halmaz pontjai H-ból vett, nemnegatív súlyokkal ellátott pontrendszerek súlypontjai, amelyek $H \subseteq L$ miatt egyúttal L-beli pontrendszerek. Az előző tétel szerint (L konvexitása miatt) ezek a súlypontok L-hez tartoznak, így $S \subseteq L$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Példa:
Legyen A, B, C három nem kollineáris pont, $H = \{A, B, C\}$.



Ha A-t, B-t, C-t rendre az $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ súlyokkal látjuk el, akkor a súlypont az ABC háromszög valamely pontja. Belső pont, ha $\alpha, \beta, \gamma > 0$, határpont, ha a súlyok közt van 0. Ha a súlyok közül kettő is 0, akkor a súlypont a háromszög egyik csúcsa.

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Sokszög

Sokszög

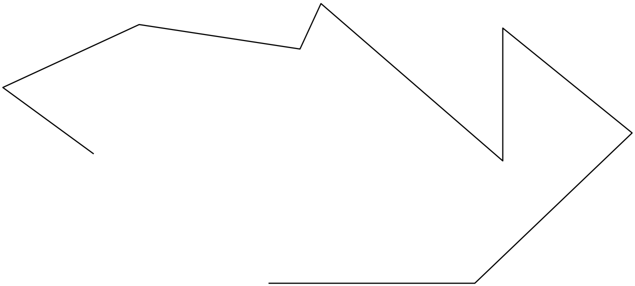
Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát.

Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:

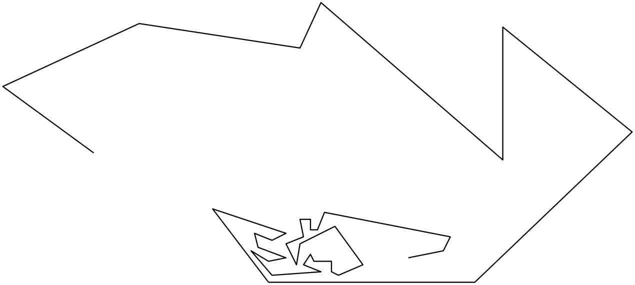
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



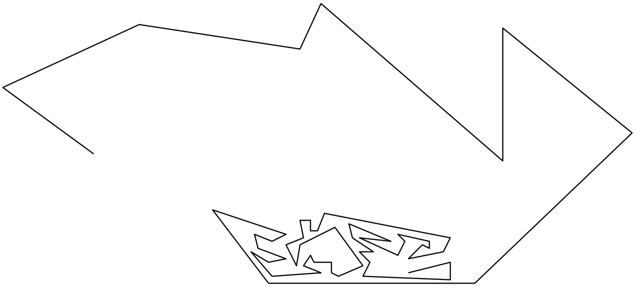
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



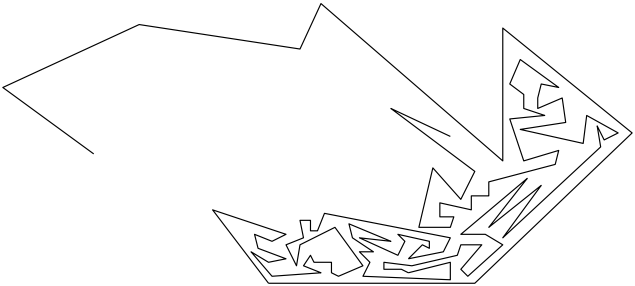
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



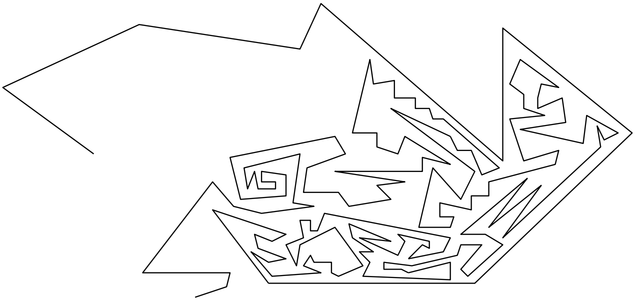
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



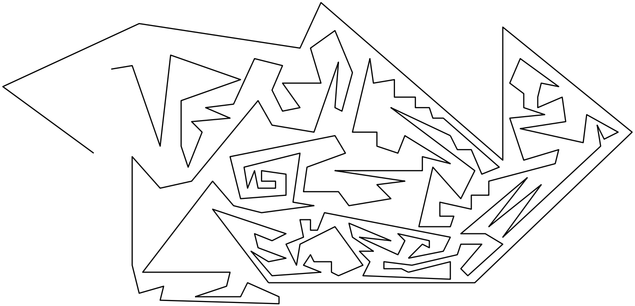
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



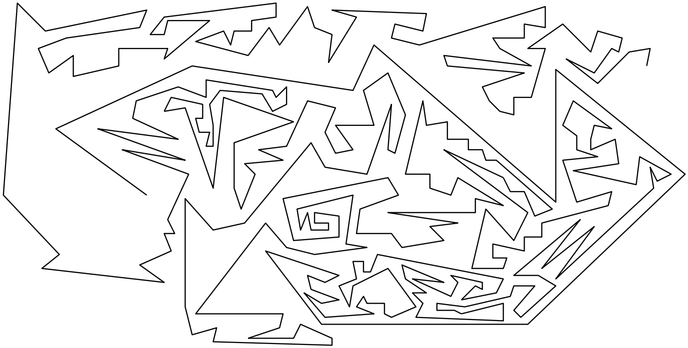
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



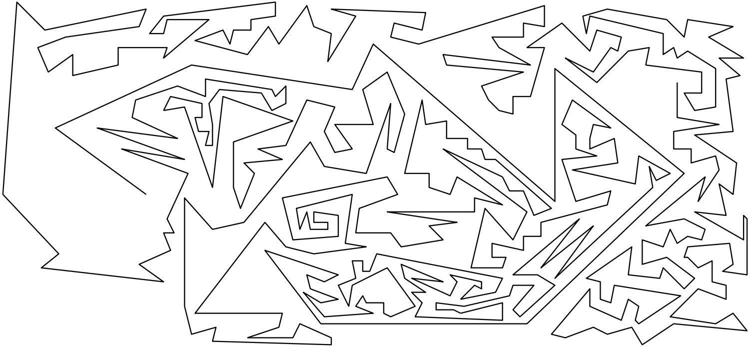
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



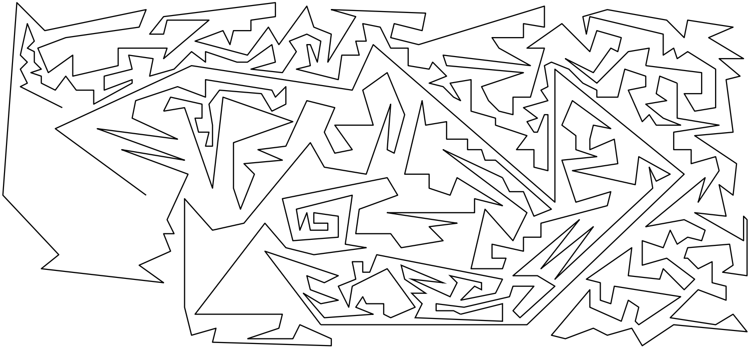
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



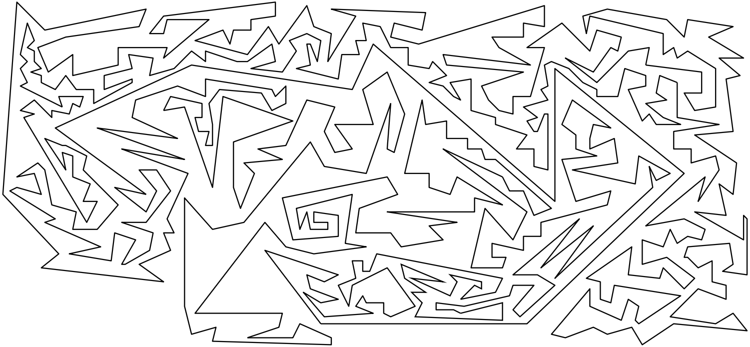
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



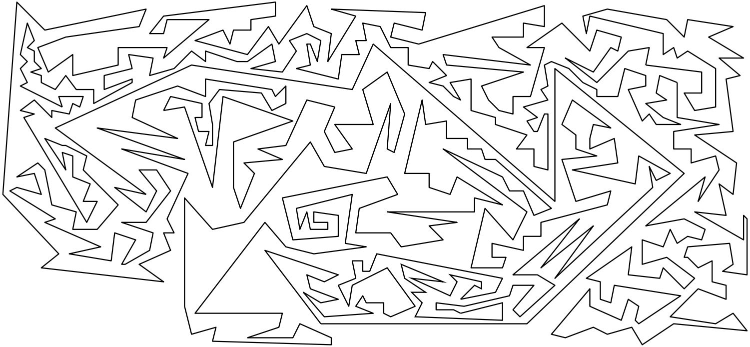
Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



Sokszög

Értelmezni szeretnénk a síkban a sokszög fogalmát. Ha egy sokszög nem feltétlenül konvex, akkor igen bonyolult is lehet:



Ezért a sokszög szabatos definíciója gondos előkészítést igényel.

Töröttvonal

Töröttvonal

Definíciók:

Töröttvonal

Definíciók:

Töröttvonalnak nevezzük szakaszok egy véges

$$T = \big([A_1, B_1], [A_2, B_2], \ldots, [A_n, B_n]\big)$$

sorozatát, ahol minden $i = 1, \ldots, n-1$-re $B_i = A_{i+1}$:

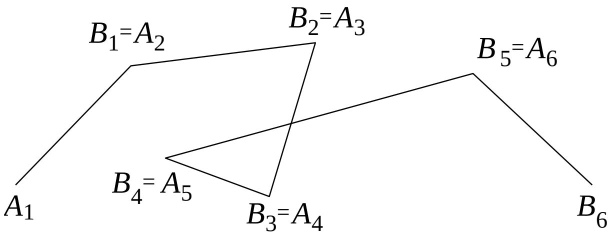
Töröttvonal

Definíciók:

Töröttvonalnak nevezzük szakaszok egy véges

$$T = \big([A_1, B_1], [A_2, B_2], \ldots, [A_n, B_n]\big)$$

sorozatát, ahol minden $i = 1, \ldots, n-1$-re $B_i = A_{i+1}$:



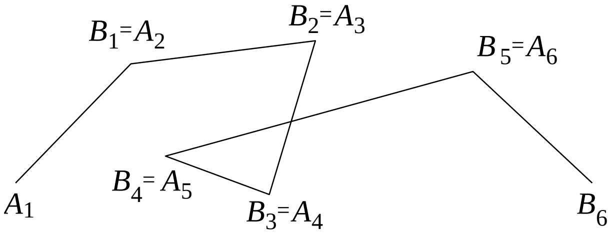
Töröttvonal

Definíciók:

Töröttvonalnak nevezzük szakaszok egy véges

$$T = \big([A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_n, B_n]\big)$$

sorozatát, ahol minden $i = 1, \dots, n-1$-re $B_i = A_{i+1}$:



Az A_1 pontot a T töröttvonal kezdőpontjának, a B_n pontot T végpontjának nevezzük.

Töröttvonal

A T töröttvonal zárt, ha a kezdőpontja és a végpontja azonos: $A_1 = B_n$.

Töröttvonal

A T töröttvonal zárt, ha a kezdőpontja és a végpontja azonos: $A_1 = B_n$.

A T töröttvonal egyszerű, ha a benne szereplő szakaszoknak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincs közös pontja.

Töröttvonal

A T töröttvonal zárt, ha a kezdőpontja és a végpontja azonos: $A_1 = B_n$.

A T töröttvonal egyszerű, ha a benne szereplő szakaszoknak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincs közös pontja.

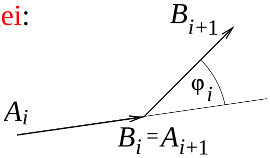
A töröttvonal törésszögei:

Töröttvonal

A T töröttvonal zárt, ha a kezdőpontja és a végpontja azonos: $A_1 = B_n$.

A T töröttvonal egyszerű, ha a benne szereplő szakaszoknak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincs közös pontja.

A töröttvonal törésszögei:



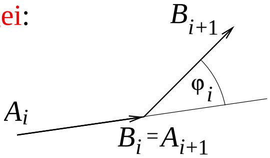
A φ_i törésszög az $\overrightarrow{A_iB_i}$ és az $\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$ vektor szöge.

Töröttvonal

A T töröttvonal zárt, ha a kezdőpontja és a végpontja azonos: $A_1 = B_n$.

A T töröttvonal egyszerű, ha a benne szereplő szakaszoknak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincs közös pontja.

A töröttvonal törésszögei:



A φ_i törésszög az $\overrightarrow{A_iB_i}$ és az $\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$ vektor szöge.

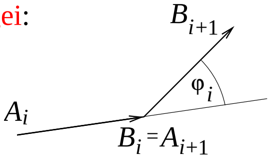
Ha a töröttvonal síkban fekszik, és rögzítettük a sík egy irányítását, akkor a (π-től különböző) törésszögeknek előjelet is tulajdoníthatunk:

Töröttvonal

A T töröttvonal zárt, ha a kezdőpontja és a végpontja azonos: $A_1 = B_n$.

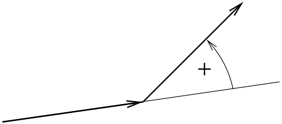
A T töröttvonal egyszerű, ha a benne szereplő szakaszoknak az előírt csatlakozási pontokon kívül nincs közös pontja.

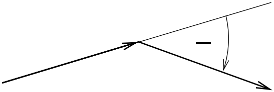
A töröttvonal törésszögei:



A φ_i törésszög az $\overrightarrow{A_iB_i}$ és az $\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$ vektor szöge.

Ha a töröttvonal síkban fekszik, és rögzítettük a sík egy irányítását, akkor a (π-től különböző) törésszögeknek előjelet is tulajdoníthatunk:





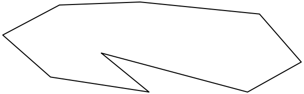
Sokszögvonal

A továbbiakban síkbeli töröttvonalakra szorítkozunk.

Sokszögvonal

A továbbiakban síkbeli töröttvonalakra szorítkozunk.

Egy egyszerű, zárt töröttvonalat, amelynek nincsen zérus törésszöge, sokszögvonalnak hívunk.

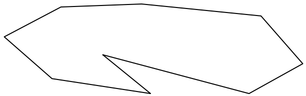


A csatlakozási pontok a sokszögvonal csúcsai, a szakaszok a sokszögvonal oldalai.

Sokszögvonal

A továbbiakban síkbeli töröttvonalakra szorítkozunk.

Egy egyszerű, zárt töröttvonalat, amelynek nincsen zérus törésszöge, sokszögvonalnak hívunk.

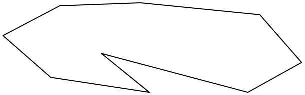


A csatlakozási pontok a sokszögvonal csúcsai, a szakaszok a sokszögvonal oldalai. A csúcsok száma és az oldalak száma egyenlő.

Sokszögvonal

A továbbiakban síkbeli töröttvonalakra szorítkozunk.

Egy egyszerű, zárt töröttvonalat, amelynek nincsen zérus törésszöge, sokszögvonalnak hívunk.



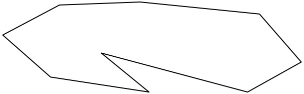
A csatlakozási pontok a sokszögvonal csúcsai, a szakaszok a sokszögvonal oldalai. A csúcsok száma és az oldalak száma egyenlő.

(Ugyancsak sokszögvonalnak szokás nevezni a benne szereplő szakaszok egyesítését, mint síkbeli ponthalmazt.)

Sokszögvonal

A továbbiakban síkbeli töröttvonalakra szorítkozunk.

Egy egyszerű, zárt töröttvonalat, amelynek nincsen zérus törésszöge, sokszögvonalnak hívunk.



A csatlakozási pontok a sokszögvonal csúcsai, a szakaszok a sokszögvonal oldalai. A csúcsok száma és az oldalak száma egyenlő.

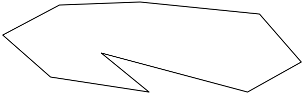
(Ugyancsak sokszögvonalnak szokás nevezni a benne szereplő szakaszok egyesítését, mint síkbeli ponthalmazt.)

A sokszöglemez értelmezése céljából meg kell tudni különböztetni a sokszögvonalon belül elhelyezkedő pontokat a sokszögvonalon kívüliektől.

Sokszögvonal

A továbbiakban síkbeli töröttvonalakra szorítkozunk.

Egy egyszerű, zárt töröttvonalat, amelynek nincsen zérus törésszöge, sokszögvonalnak hívunk.

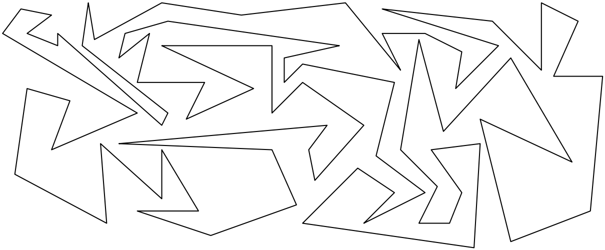


A csatlakozási pontok a sokszögvonal csúcsai, a szakaszok a sokszögvonal oldalai. A csúcsok száma és az oldalak száma egyenlő.

(Ugyancsak sokszögvonalnak szokás nevezni a benne szereplő szakaszok egyesítését, mint síkbeli ponthalmazt.)

A sokszöglemez értelmezése céljából meg kell tudni különböztetni a sokszögvonalon belül elhelyezkedő pontokat a sokszögvonalon kívüliektől. Ezt nem könnyű szabatosan megtenni. A következő tétel (amelyet nem bizonyítunk be) adja a megoldást.

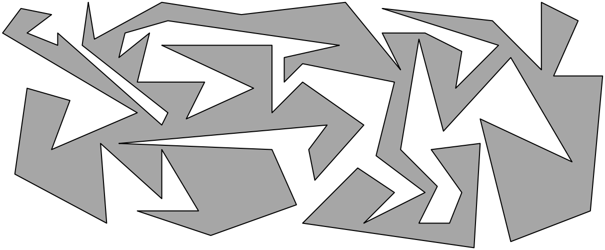
Sokszögvonal



A sokszögekre vonatkozó Jordan-féle tétel

Bármely T sokszögvonal a sík T-hez nem tartozó pontjait két osztályba sorolja aszerint, hogy ugyanabba az osztályba tartozó pontok összeköthetők T-től diszjunkt töröttvonallal, míg különböző osztályba tartozók nem. A két osztály közül az egyik korlátos, a másik nem.

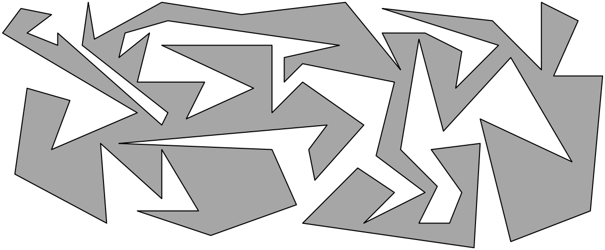
Sokszögvonal



A sokszögekre vonatkozó Jordan-féle tétel

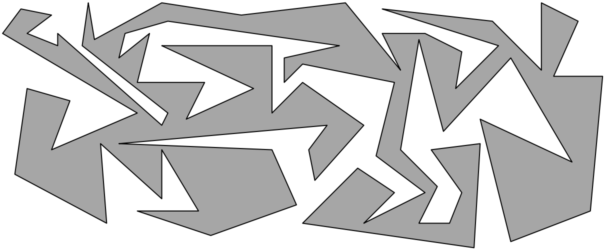
Bármely T sokszögvonal a sík T-hez nem tartozó pontjait két osztályba sorolja aszerint, hogy ugyanabba az osztályba tartozó pontok összeköthetők T-től diszjunkt töröttvonallal, míg különböző osztályba tartozók nem. A két osztály közül az egyik korlátos, a másik nem.

Sokszög



A két osztály közül a korlátosat nevezzük a T sokszögvonal belsejének, a másikat a külsejének.

Sokszög

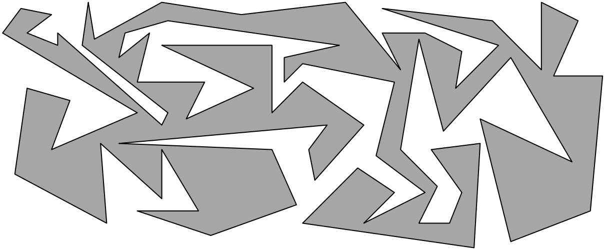


A két osztály közül a korlátosat nevezzük a T sokszögvonal belsejének, a másikat a külsejének.

Definíció

Sokszög: olyan ponthalmaz a síkon, amely egy sokszögvonal és a belseje egyesítéseként áll elő.

Sokszög



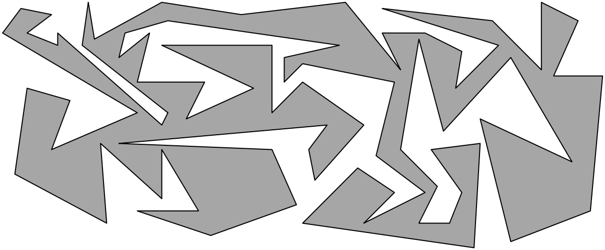
A két osztály közül a korlátosat nevezzük a T sokszögvonal belsejének, a másikat a külsejének.

Definíció

Sokszög: olyan ponthalmaz a síkon, amely egy sokszögvonal és a belseje egyesítéseként áll elő.

Például bármely háromszög, bármely négyszög, stb., egyúttal sokszög.

Sokszög



A két osztály közül a korlátosat nevezzük a T sokszögvonal belsejének, a másikat a külsejének.

Definíció

Sokszög: olyan ponthalmaz a síkon, amely egy sokszögvonal és a belseje egyesítéseként áll elő.

Például bármely háromszög, bármely négyszög, stb., egyúttal sokszög. Az n oldalú sokszögeket n-szögeknek is nevezzük.

Sokszög

Elnevezések:

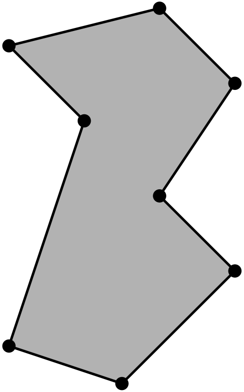
Sokszög

Elnevezések:

A sokszög csúcsain és oldalain

Sokszög

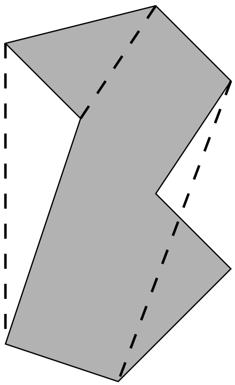
Elnevezések:



A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

Sokszög

Elnevezések:

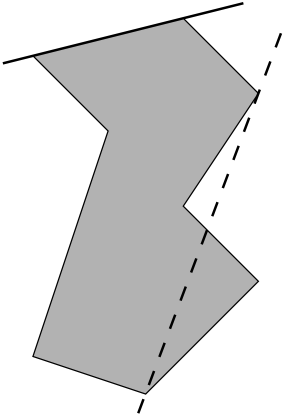


A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

A sokszög átlói a csúcsokat összekötő, oldaltól különböző szakaszok.

Sokszög

Elnevezések:



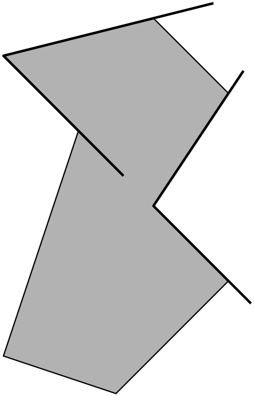
A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

A sokszög átlói a csúcsokat összekötő, oldaltól különböző szakaszok.

Oldalegyenesek, átlóegyenesek: az oldalakat, illetve átlókat tartalmazó egyenesek.

Sokszög

Elnevezések:



A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

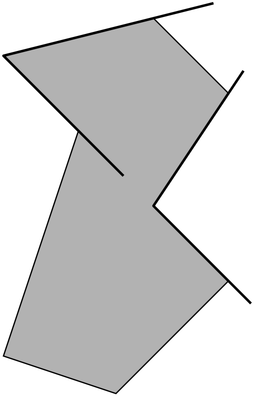
A sokszög átlói a csúcsokat összekötő, oldaltól különböző szakaszok.

Oldalegyenesek, átlóegyenesek: az oldalakat, illetve átlókat tartalmazó egyenesek.

Belső szögek: Bármely csúcsnál az oda befutó két él a teljes szöget két szögtartományra bontja,

Sokszög

Elnevezések:



A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

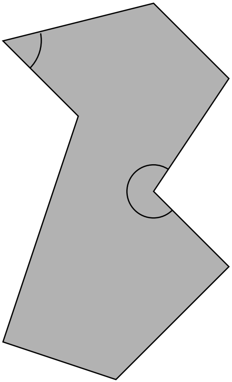
A sokszög átlói a csúcsokat összekötő, oldaltól különböző szakaszok.

Oldalegyenesek, átlóegyenesek: az oldalakat, illetve átlókat tartalmazó egyenesek.

Belső szögek: Bármely csúcsnál az oda befutó két él a teljes szöget két szögtartományra bontja, ezek közül az egyik nyílik a sokszög belseje felé.

Sokszög

Elnevezések:



A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

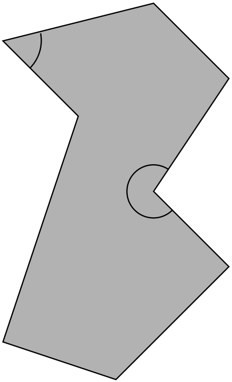
A sokszög átlói a csúcsokat összekötő, oldaltól különböző szakaszok.

Oldalegyenesek, átlóegyenesek: az oldalakat, illetve átlókat tartalmazó egyenesek.

Belső szögek: Bármely csúcsnál az oda befutó két él a teljes szöget két szögtartományra bontja, ezek közül az egyik nyílik a sokszög belseje felé.
Ezt a szöget nevezzük a sokszög belső szögének a szóban forgó csúcsnál.

Sokszög

Elnevezések:



A sokszög csúcsain és oldalain a sokszögvonal csúcsait, illetve oldalait értjük.

A sokszög átlói a csúcsokat összekötő, oldaltól különböző szakaszok.

Oldalegyenesek, átlóegyenesek: az oldalakat, illetve átlókat tartalmazó egyenesek.

Belső szögek: Bármely csúcsnál az oda befutó két él a teljes szöget két szögtartományra bontja, ezek közül az egyik nyílik a sokszög belseje felé.
Ezt a szöget nevezzük a sokszög belső szögének a szóban forgó csúcsnál.

Ha nem vezet félreértésre, akkor a belső szögeket egyszerűen a sokszög szögeinek is nevezhetjük.

Sokszögek szögösszege

Sokszögek szögösszege

Tétel (szögösszegtétel)

Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege $(n-2)\pi$.

Sokszögek szögösszege

Tétel (szögösszegtétel)

Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege $(n-2)\pi$.

A szögösszegtételt nem bizonyítjuk be.

Sokszögek szögösszege

Tétel (szögösszegtétel)

Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege $(n-2)\pi$.

A szögösszegtételt nem bizonyítjuk be.
Meg lehet mutatni, hogy bármely n-szöget egymást nem metsző átlókkal fel lehet darabolni $(n-2)$ darab háromszögre,

Sokszögek szögösszege

Tétel (szögösszegtétel)

Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege $(n-2)\pi$.

A szögösszegtételt nem bizonyítjuk be.
Meg lehet mutatni, hogy bármely n-szöget egymást nem metsző átlókkal fel lehet darabolni $(n-2)$ darab háromszögre, amiből a tétel rögtön következik.

Sokszögek szögösszege

Tétel (szögösszegtétel)

Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege $(n-2)\pi$.

A szögösszegtételt nem bizonyítjuk be.
Meg lehet mutatni, hogy bármely n-szöget egymást nem metsző átlókkal fel lehet darabolni $(n-2)$ darab háromszögre, amiből a tétel rögtön következik.

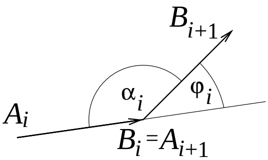
Észrevétel:

Sokszögek szögösszege

Tétel (szögösszegtétel)

Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege $(n-2)\pi$.

A szögösszegtételt nem bizonyítjuk be.
Meg lehet mutatni, hogy bármely n-szöget egymást nem metsző átlókkal fel lehet darabolni $(n-2)$ darab háromszögre, amiből a tétel rögtön következik.



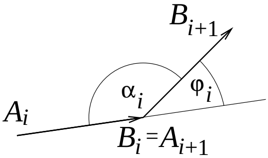
Észrevétel: Pozitív körüljárású sokszögben a sokszög i-edik belső szögének és a sokszögvonal i-edik (előjelesen tekintett) törésszögének az összege π.

Sokszögek szögösszege

Tétel (szögösszegtétel)

Bármely n oldalú sokszögben a belső szögek összege $(n-2)\pi$.

A szögösszegtételt nem bizonyítjuk be.
Meg lehet mutatni, hogy bármely n-szöget egymást nem metsző átlókkal fel lehet darabolni $(n-2)$ darab háromszögre, amiből a tétel rögtön következik.



Észrevétel: Pozitív körüljárású sokszögben a sokszög i-edik belső szögének és a sokszögvonal i-edik (előjelesen tekintett) törésszögének az összege π.

Emiatt a szögösszegtétel egyenértékű változata:

Bármely pozitív körüljárású sokszögvonal előjeles törésszögeinek az összege 2π-vel egyenlő.

Konvex sokszögek

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között.

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

(1) S konvex;

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

(1) S konvex;

(2) S bármelyik oldalegyenese két olyan félsíkot határol, amelyek egyike lefedi S-et;

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

(1) S konvex;

(2) S bármelyik oldalegyenese két olyan félsíkot határol, amelyek egyike lefedi S-et;

(3) Bármely, az oldalegyenesektől különböző egyenesnek a sokszögvonallal legfeljebb 2 közös pontja van;

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

(1) S konvex;

(2) S bármelyik oldalegyenese két olyan félsíkot határol, amelyek egyike lefedi S-et;

(3) Bármely, az oldalegyenesektől különböző egyenesnek a sokszögvonallal legfeljebb 2 közös pontja van;

(4) S tartalmazza mindegyik átlóját;

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

(1) S konvex;

(2) S bármelyik oldalegyenese két olyan félsíkot határol, amelyek egyike lefedi S-et;

(3) Bármely, az oldalegyenesektől különböző egyenesnek a sokszögvonallal legfeljebb 2 közös pontja van;

(4) S tartalmazza mindegyik átlóját;

(5) S mindegyik belső szöge π-nél kisebb.

Konvex sokszögek

Nevezetes tény, hogy a konvex sokszögeket többféleképpen lehet jellemezni a sokszögek között. Az alábbi tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

Bármely S sokszögre az alábbi tulajdonságok egyenértékűek:

(1) S konvex;

(2) S bármelyik oldalegyenese két olyan félsíkot határol, amelyek egyike lefedi S-et;

(3) Bármely, az oldalegyenesektől különböző egyenesnek a sokszögvonallal legfeljebb 2 közös pontja van;

(4) S tartalmazza mindegyik átlóját;

(5) S mindegyik belső szöge π-nél kisebb.

(Az $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5)$ implikációkat nem nehéz igazolni; az $(5) \implies (1)$ nehezebb.)

Konvex sokszögek

Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket.

Konvex sokszögek

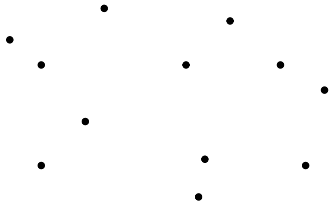
Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Konvex sokszögek

Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka

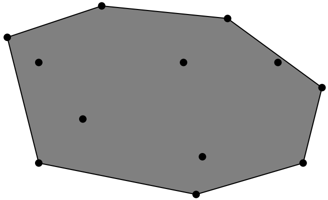


Konvex sokszögek

Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

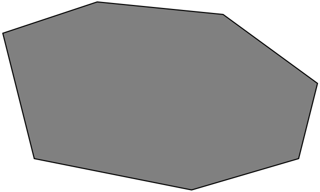


Konvex sokszögek

Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.



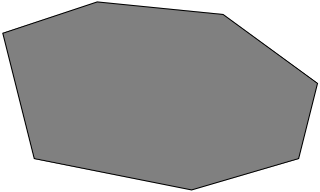
Konvex sokszögek

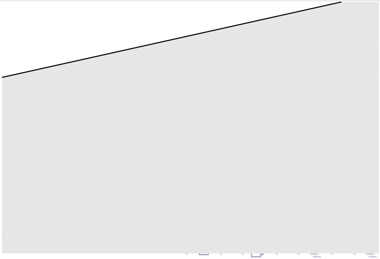
Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

(2) Ha egy síkbeli korlátos ponthalmaz előáll mint véges sok olyan zárt félsík metszete, amelyeknek van közös belső pontja,





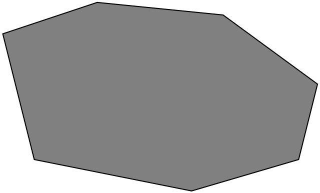
Konvex sokszögek

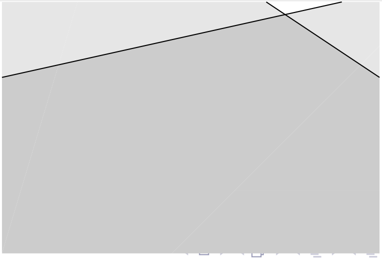
Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

(2) Ha egy síkbeli korlátos ponthalmaz előáll mint véges sok olyan zárt félsík metszete, amelyeknek van közös belső pontja,





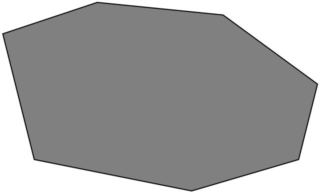
Konvex sokszögek

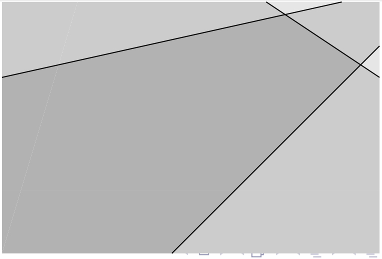
Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

(2) Ha egy síkbeli korlátos ponthalmaz előáll mint véges sok olyan zárt félsík metszete, amelyeknek van közös belső pontja,





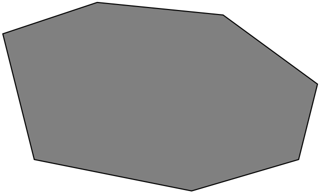
Konvex sokszögek

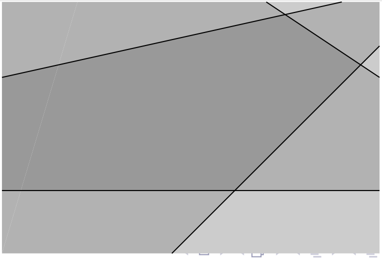
Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

(2) Ha egy síkbeli korlátos ponthalmaz előáll mint véges sok olyan zárt félsík metszete, amelyeknek van közös belső pontja,





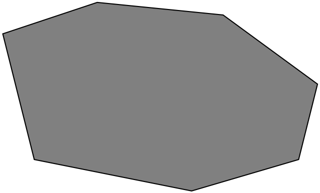
Konvex sokszögek

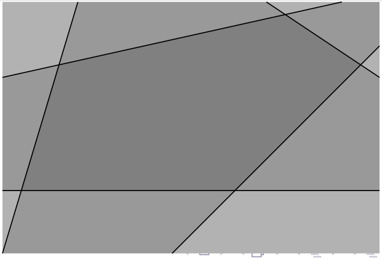
Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

(2) Ha egy síkbeli korlátos ponthalmaz előáll mint véges sok olyan zárt félsík metszete, amelyeknek van közös belső pontja, akkor ez a ponthalmaz konvex sokszög.





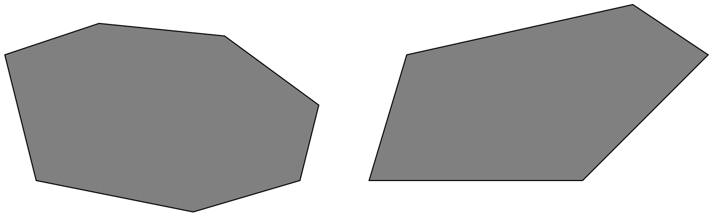
Konvex sokszögek

Az alábbi tétel azt a két eljárást tisztázza, amelyekkel a leggyakrabban származtatunk konvex sokszögeket. Ezt a tételt sem bizonyítjuk be.

Tétel

(1) A síkban bármely véges sok nem kollineáris pont konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek a csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki.

(2) Ha egy síkbeli korlátos ponthalmaz előáll mint véges sok olyan zárt félsík metszete, amelyeknek van közös belső pontja, akkor ez a ponthalmaz konvex sokszög.



Szabályos sokszögek

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\Longrightarrow$

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\implies$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge $\dfrac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\Longrightarrow$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge $\dfrac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

Következmény:

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\Longrightarrow$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge $\dfrac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \dfrac{2\pi}{n} < \pi.$

Következmény: minden szabályos sokszög konvex.

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\Longrightarrow$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge $\dfrac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

Következmény: minden szabályos sokszög konvex.

Hogyan lehet szabályos sokszögeket származtatni?

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\implies$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge $\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n} < \pi.$

Következmény: minden szabályos sokszög konvex.

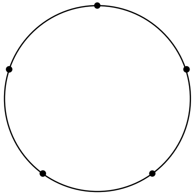
Hogyan lehet szabályos sokszögeket származtatni? Ha adott az $n \geq 3$ természetes szám,

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\implies$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge
$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n} < \pi.$$
Következmény: minden szabályos sokszög konvex.

Hogyan lehet szabályos sokszögeket származtatni? Ha adott az $n \geq 3$ természetes szám,



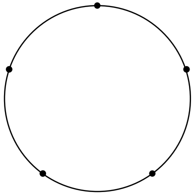
osszuk az egységkör kerületét n egyenlő részre.

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\Longrightarrow$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge
$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n} < \pi.$$
Következmény: minden szabályos sokszög konvex.

Hogyan lehet szabályos sokszögeket származtatni? Ha adott az $n \geq 3$ természetes szám,



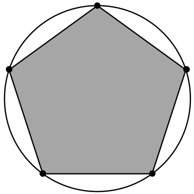
osszuk az egységkör kerületét n egyenlő részre. (A részívek mindegyikéhez tehát $360^\circ/n$ középponti szög tartozik.)

Szabályos sokszögek

Egy sokszög szabályos, ha minden oldala egyenlő és minden szöge egyenlő.

Szögösszegtétel $\Longrightarrow$ bármely n-oldalú szabályos sokszög szöge
$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n} < \pi.$$
Következmény: minden szabályos sokszög konvex.

Hogyan lehet szabályos sokszögeket származtatni? Ha adott az $n \geq 3$ természetes szám,



osszuk az egységkör kerületét n egyenlő részre. (A részívek mindegyikéhez tehát $360^\circ/n$ középponti szög tartozik.)

Ekkor az osztópontok konvex burka szabályos n-szög.

Szabályos sokszögek

Állítás

Rögzített n mellett bármely két szabályos n-szög hasonló.

Szabályos sokszögek

Állítás

Rögzített n mellett bármely két szabályos n-szög hasonló.

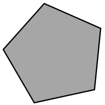
Magyarázat:

Szabályos sokszögek

Állítás

Rögzített n mellett bármely két szabályos n-szög hasonló.

Magyarázat:



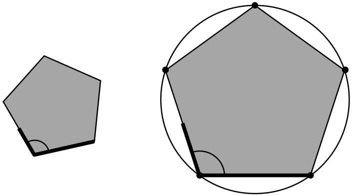
Ha adott egy tetszőleges szabályos n-szög,

Szabályos sokszögek

Állítás

Rögzített n mellett bármely két szabályos n-szög hasonló.

Magyarázat:



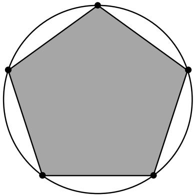
Ha adott egy tetszőleges szabályos n-szög, akkor először alkalmas nagyítással/kicsinyítéssel és mozgatással elérhetjük, hogy az egyik oldala és az azon fekvő egyik szöge fedésbe kerüljön az imént konstruált, egységkörbe írt S szabályos n-szöggel.

Szabályos sokszögek

Állítás

Rögzített n mellett bármely két szabályos n-szög hasonló.

Magyarázat:



Ha adott egy tetszőleges szabályos n-szög, akkor először alkalmas nagyítással/kicsinyítéssel és mozgatással elérhetjük, hogy az egyik oldala és az azon fekvő egyik szöge fedésbe kerüljön az imént konstruált, egységkörbe írt S szabályos n-szöggel.
Ezután a sokszög oldalain lépésről lépésre haladva látjuk, hogy az egész sokszög fedésbe került S-sel.

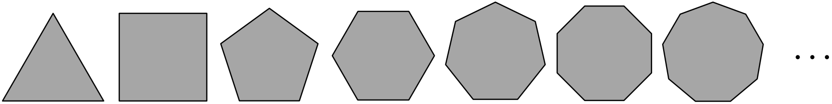
Szabályos sokszögek

Következmény:

Szabályos sokszögek

Következmény:

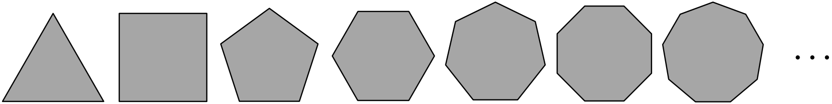
Minden $n \geq 3$-ra hasonlóság erejéig egyértelműen létezik szabályos n-szög.



Szabályos sokszögek

Következmény:

Minden $n \geq 3$-ra hasonlóság erejéig egyértelműen létezik szabályos n-szög.



Észrevétel:
Egy n-oldalú sokszög pontosan akkor szabályos, ha n-edrendben forgásszimmetrikus.