

---

# Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton

[nmarci@math.elte.hu](mailto:nmarci@math.elte.hu)

[www.math.elte.hu/~nmarci](http://www.math.elte.hu/~nmarci)

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest



# A félév anyaga

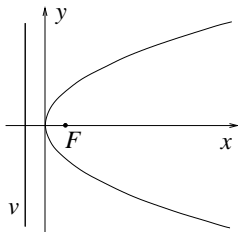
- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- **Vektorgeometria**
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- **Konvexitás**
- **Sokszögek és poliéderek**
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Azt mondjuk, hogy

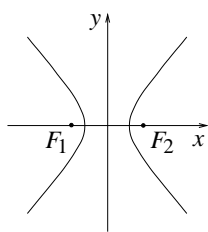
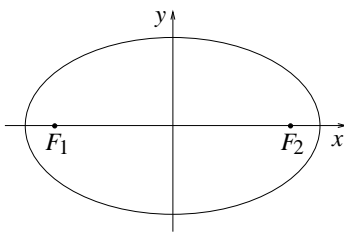
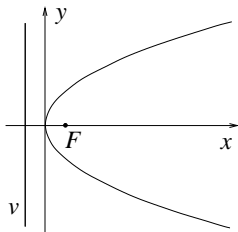
- egy parabola a koordináta-rendszerhez képest **kanonikus helyzetű**, ha a szimmetriatengelye az  $x$ -tengely, csúcspontja az origó, és fókusza az  $x$ -tengely pozitív félegyenesére esik;



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Azt mondjuk, hogy

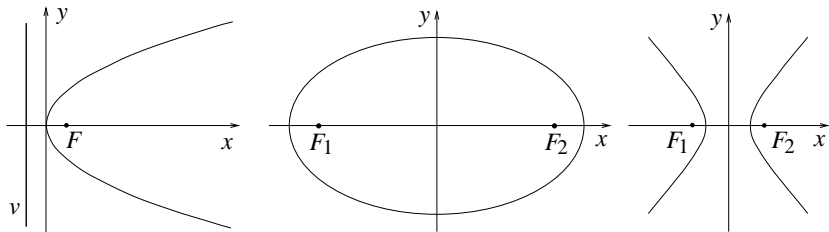
- egy parabola a koordinátarendszerhez képest **kanonikus helyzetű**, ha a szimmetriatengelye az  $x$ -tengely, csúcspontja az origó, és fókusza az  $x$ -tengely pozitív félegyenesére esik;
- egy ellipszis vagy egy hiperbola a koordinátarendszerhez képest **kanonikus helyzetű**, ha szimmetriatengelyei a koordináta-tengelyek, és fókuszai az  $x$ -tengelyre esnek.



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Azt mondjuk, hogy

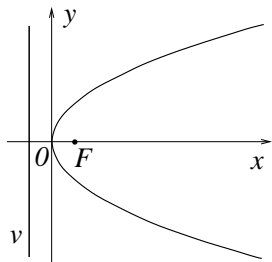
- egy parabola a koordinátarendszerhez képest **kanonikus helyzetű**, ha a szimmetriatengelye az  $x$ -tengely, csúcspontja az origó, és fókusza az  $x$ -tengely pozitív félegyenesére esik;
- egy ellipszis vagy egy hiperbola a koordinátarendszerhez képest **kanonikus helyzetű**, ha szimmetriatengelyei a koordináta-tengelyek, és fókuszai az  $x$ -tengelyre esnek.



Meghatározzuk a kanonikus helyzetű kúpszeletek egyenleteit.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

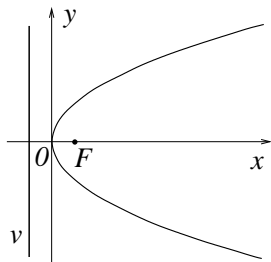
Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

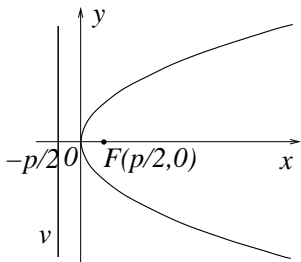
Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.

Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát,



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

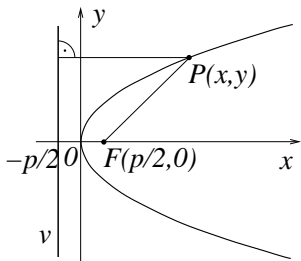
Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.

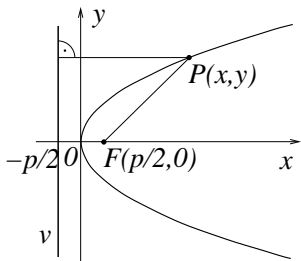


Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

A sík bármely  $P(x, y)$  pontjára  $d(P, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$  és  $d(P, v) = |x + p/2|$ .

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

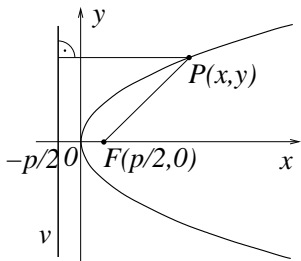
A sík bármely  $P(x, y)$  pontjára

$d(P, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$  és  $d(P, v) = |x + p/2|$ .

A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a parabolához, ha

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

A sík bármely  $P(x, y)$  pontjára

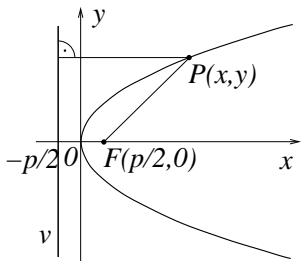
$d(P, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$  és  $d(P, v) = |x + p/2|$ .

A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a

parabolához, ha  $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$ ,

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

A sík bármely  $P(x, y)$  pontjára

$d(P, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$  és  $d(P, v) = |x + p/2|$ .

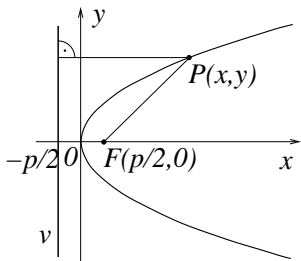
A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a

parabolához, ha  $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$ , azaz

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

A sík bármely  $P(x, y)$  pontjára

$d(P, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$  és  $d(P, v) = |x + p/2|$ .

A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a

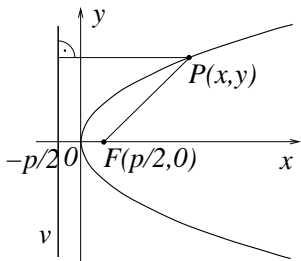
parabolához, ha  $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$ , azaz

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

$$x^2 - px + (p/2)^2 + y^2 = x^2 + px + (p/2)^2$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

A sík bármely  $P(x, y)$  pontjára

$d(P, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$  és  $d(P, v) = |x + p/2|$ .

A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a

parabolához, ha  $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$ , azaz

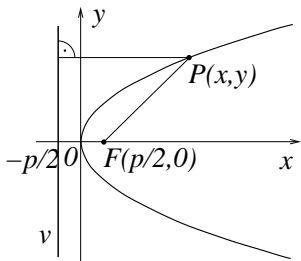
$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

$$x^2 - px + (p/2)^2 + y^2 = x^2 + px + (p/2)^2$$

$$y^2 = 2px$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Tekintsünk először egy kanonikus helyzetű parabolát.



Jelölje  $p$  a fókusz és a vezéregyenes távolságát, ekkor a fókusz az  $F(p/2, 0)$  pont, a vezéregyenes pedig az  $x = -p/2$  egyenletű  $v$  egyenes.

A sík bármely  $P(x, y)$  pontjára  $d(P, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$  és  $d(P, v) = |x + p/2|$ . A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a parabolához, ha  $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$ , azaz

$$\begin{aligned} (x - p/2)^2 + y^2 &= (x + p/2)^2 \\ x^2 - px + (p/2)^2 + y^2 &= x^2 + px + (p/2)^2 \\ y^2 &= 2px \end{aligned}$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért:

A parabola kanonikus egyenlete  $y^2 = 2px$ .

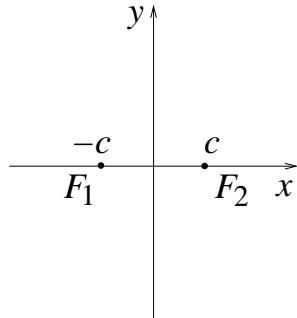
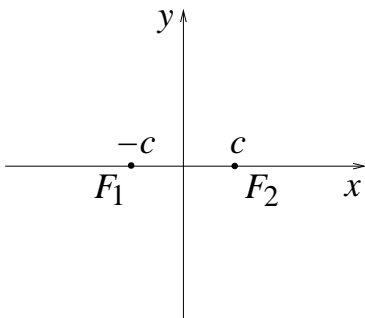
# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenletét egyszerre vezethetjük le.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenletét egyszerre vezethetjük le.

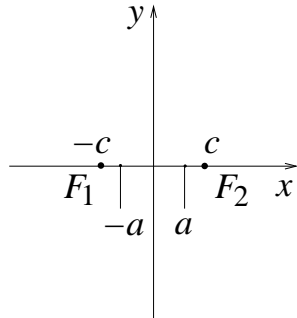
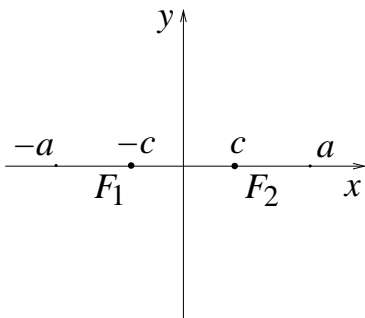
Legyenek a fókuszok a  $(\pm c, 0)$  pontokban,



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenletét egyszerre vezethetjük le.

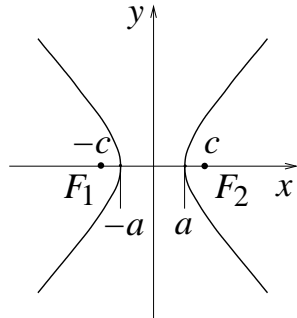
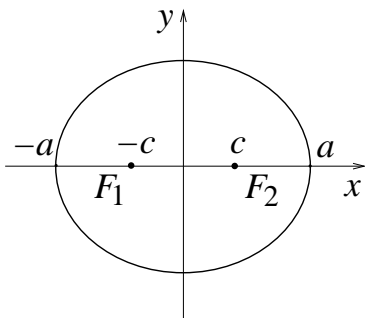
Legyenek a fókuszok a  $(\pm c, 0)$  pontokban, és jelölje  $2a$  a görbe definíciójában szereplő állandót



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

Az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenletét egyszerre vezethetjük le.

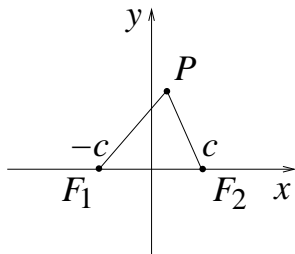
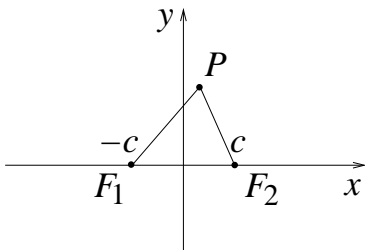
Legyenek a fókuszok a  $(\pm c, 0)$  pontokban, és jelölje  $2a$  a görbe definíciójában szereplő állandót (azaz: az  $x$ -tengellyel vett metszéspontok távolságát).



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

A sík valamely  $P(x, y)$  pontjának a fókuszoktól mért távolsága

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

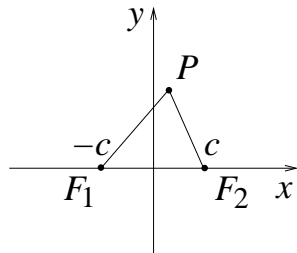
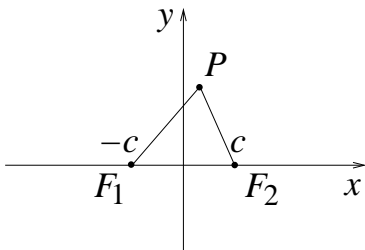


# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

A sík valamely  $P(x, y)$  pontjának a fókuszoktól mért távolsága

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a görbéhez,



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

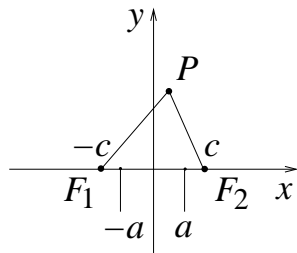
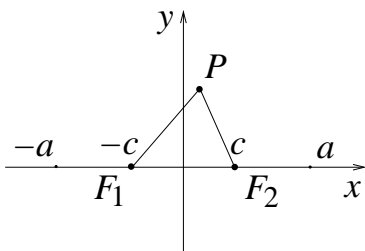
A sík valamely  $P(x, y)$  pontjának a fókuszoktól mért távolsága

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{és} \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

A  $P$  pont tehát akkor és csak akkor tartozik a görbéhez, ha

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a,$$

ahol összeadás áll ellipszis esetén, kivonás áll hiperbola esetén.



# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

## Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Kétszer négyzetre emelve és átrendezve:

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Kétszer négyzetre emelve és átrendezve:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Kétszer négyzetre emelve és átrendezve:

$$(x+c)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$\pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Kétszer négyzetre emelve és átrendezve:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

$$\pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2$$

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Kétszer négyzetre emelve és átrendezve:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

$$\pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2$$

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 &= 4a^4 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - \\ &- 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) \end{aligned}$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Kétszer négyzetre emelve és átrendezve:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

$$\pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2$$

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 &= 4a^4 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - \\ &\quad - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Kétszer négyzetre emelve és átrendezve:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 \pm 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

$$\pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2$$

$$((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) = (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 &= 4a^4 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - \\ &\quad - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

(Az egyenletrendezés lépései ekvivalens átalakítások voltak.)

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

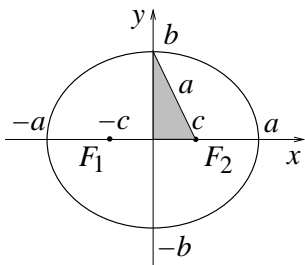
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ellipszis esetén  $a > c$ , ezért az  $a^2 - c^2$  mennyiséget jelölhetjük  $b^2$ -tel.

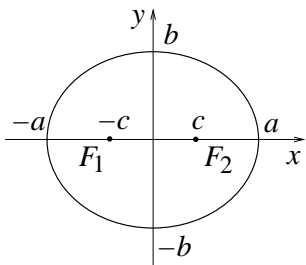
# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ellipszis esetén  $a > c$ , ezért az  $a^2 - c^2$  mennyiséget jelölhetjük  $b^2$ -tel. (Ekkor az ellipszis kistengelye, azaz a függőleges tengelymetszetek távolsága éppen  $2b$ -vel egyenlő.)

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

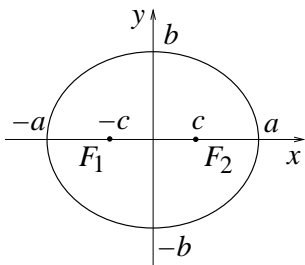


$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ellipszis esetén  $a > c$ , ezért az  $a^2 - c^2$  mennyiséget jelölhetjük  $b^2$ -tel. (Ekkor az ellipszis kistengelye, azaz a függőleges tengelymetszetek távolsága éppen  $2b$ -vel egyenlő.) Behelyettesítve

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

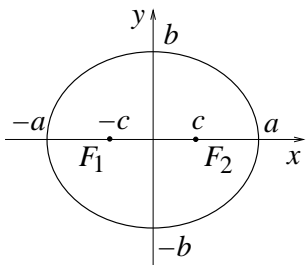
Ellipszis esetén  $a > c$ , ezért az  $a^2 - c^2$  mennyiséget jelölhetjük  $b^2$ -tel. (Ekkor az ellipszis kistengelye, azaz a függőleges tengelymetszetek távolsága éppen  $2b$ -vel egyenlő.) Behelyettesítve

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez az ellipszis kanonikus egyenlete.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ellipszis esetén  $a > c$ , ezért az  $a^2 - c^2$  mennyiséget jelölhetjük  $b^2$ -tel. (Ekkor az ellipszis kistengelye, azaz a függőleges tengelymetszetek távolsága éppen  $2b$ -vel egyenlő.) Behelyettesítve

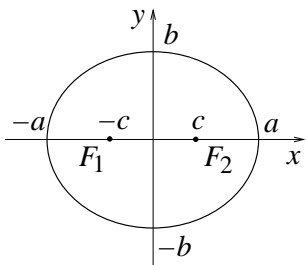
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez az ellipszis kanonikus egyenlete.

Megjegyzés:

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ellipszis esetén  $a > c$ , ezért az  $a^2 - c^2$  mennyiséget jelölhetjük  $b^2$ -tel. (Ekkor az ellipszis kistengelye, azaz a függőleges tengelymetszetek távolsága éppen  $2b$ -vel egyenlő.) Behelyettesítve

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez az ellipszis kanonikus egyenlete.

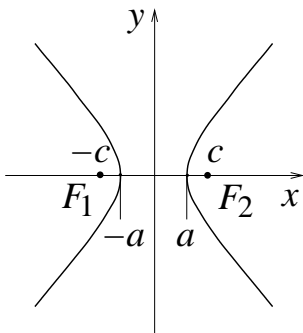
**Megjegyzés:**

Bármely ellipszisben  $a > b$ . Látható viszont, hogy  $a = b$  esetén az ellipszis kanonikus egyenlete az origó körüli  $a$  sugarú kör egyenletévé alakul át.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

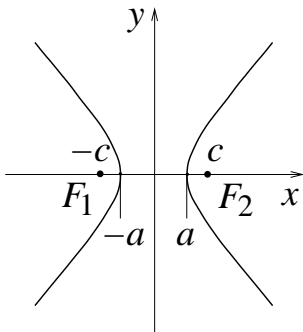
# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Hiperbola esetén  $a < c$ , ezért most a  $c^2 - a^2$  mennyiséget jelöljük  $b^2$ -tel.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete

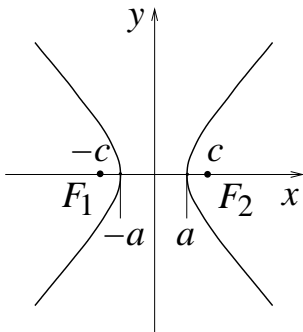


$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Hiperbola esetén  $a < c$ , ezért most a  $c^2 - a^2$  mennyiséget jelöljük  $b^2$ -tel. Behelyettesítve

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

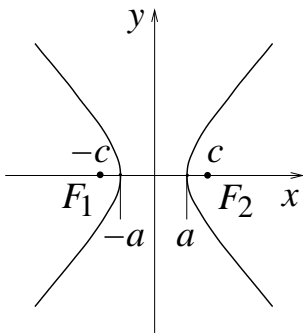
Hiperbola esetén  $a < c$ , ezért most a  $c^2 - a^2$  mennyiséget jelöljük  $b^2$ -tel. Behelyettesítve

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez a hiperbola kanonikus egyenlete.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



Megjegyzés:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

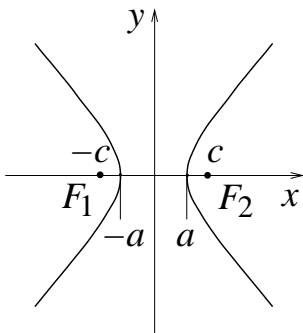
Hiperbola esetén  $a < c$ , ezért most a  $c^2 - a^2$  mennyiséget jelöljük  $b^2$ -tel. Behelyettesítve

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez a hiperbola kanonikus egyenlete.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Hiperbola esetén  $a < c$ , ezért most a  $c^2 - a^2$  mennyiséget jelöljük  $b^2$ -tel. Behelyettesítve

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

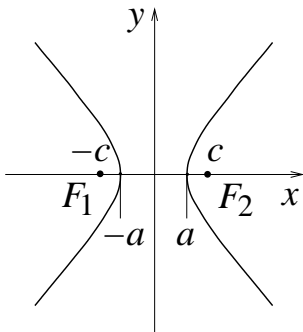
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez a hiperbola kanonikus egyenlete.

Megjegyzés:

Figyeljünk föl az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenlete közti hasonlóságra. Bár a két görbe alakja lényegesen különböző, az egyenletek közt csak egyetlen előjelben van eltérés.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Hiperbola esetén  $a < c$ , ezért most a  $c^2 - a^2$  mennyiséget jelöljük  $b^2$ -tel. Behelyettesítve

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

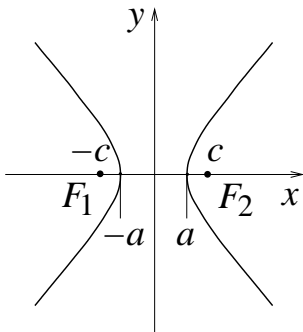
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez a hiperbola kanonikus egyenlete.

**Megjegyzés:**

Figyeljünk föl az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenlete közti hasonlóságra. Bár a két görbe alakja lényegesen különböző, az egyenletek közt csak egyetlen előjelben van eltérés. Ez a két görbe közti mélyebb rokonságra utal.

# Egyenletek: kúpszeletek kanonikus egyenlete



$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Hiperbola esetén  $a < c$ , ezért most a  $c^2 - a^2$  mennyiséget jelöljük  $b^2$ -tel. Behelyettesítve

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

adódik; ez a hiperbola kanonikus egyenlete.

**Megjegyzés:**

Figyeljünk föl az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenlete közti hasonlóságra. Bár a két görbe alakja lényegesen különböző, az egyenletek közt csak egyetlen előjelben van eltérés. Ez a két görbe közti mélyebb rokonságra utal. Formai hasonlóságot fogunk tapasztalni paraméteres előállításuk között is.

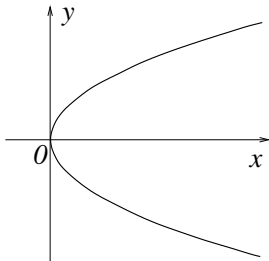
# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Előállítjuk a kanonikus helyzetű kúpszeletek paraméteres egyenletrendszerét.

# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Előállítjuk a kanonikus helyzetű kúpszeletek paraméteres egyenletrendszerét.

Parabola,  $y^2 = 2px$ :

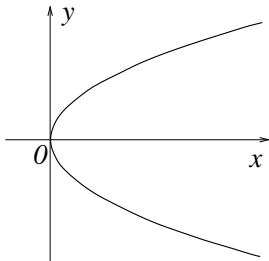


# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Előállítjuk a kanonikus helyzetű kúpszeletek paraméteres egyenletrendszerét.

Parabola,  $y^2 = 2px$ :

Érdekes az  $y$  koordinátát választani paraméter gyanánt, mert azzal mindkét koordináta könnyen kifejezhető:

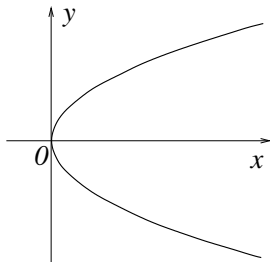


# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Előállítjuk a kanonikus helyzetű kúpszeletek paraméteres egyenletrendszerét.

Parabola,  $y^2 = 2px$ :

Érdekes az  $y$  koordinátát választani paraméter gyanánt, mert azzal mindkét koordináta könnyen kifejezhető:



$$y = t$$

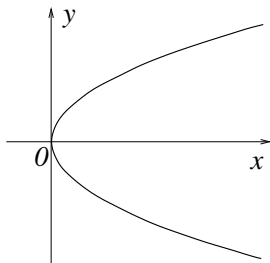
# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Előállítjuk a kanonikus helyzetű kúpszeletek paraméteres egyenletrendszerét.

Parabola,  $y^2 = 2px$ :

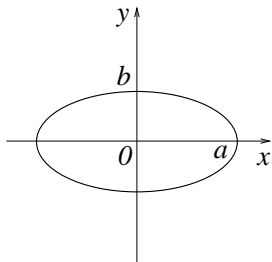
Érdekes az  $y$  koordinátát választani paraméter gyanánt, mert azzal mindkét koordináta könnyen kifejezhető:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2p} t^2 \\y &= t\end{aligned}$$



# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Ellipszis,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :



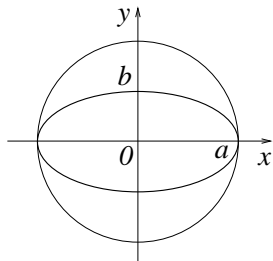


# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

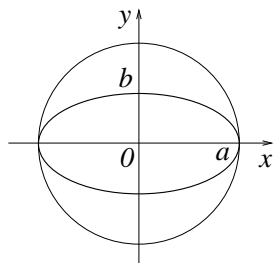
Ellipszis,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

Látható, hogy ha valamely  $(x, y)$  számpár kielégíti az  $x^2 + y^2 = a^2$  köregyenletet, akkor az  $(x, \frac{b}{a}y)$  számpár kielégíti az ellipszis egyenletét.

Ezt felhasználva (azaz a második koordinátát  $\frac{b}{a}$ -val szorozva) a kör paraméterezéséből



## Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



képleteket nyerjük;

Ellipszis,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

Látható, hogy ha valamely  $(x, y)$  számpár kielégíti az  $x^2 + y^2 = a^2$  köregyenletet, akkor az  $(x, \frac{b}{a}y)$  számpár kielégíti az ellipszis egyenletét.

Ezt felhasználva (azaz a második koordinátát  $\frac{b}{a}$ -val szorozva) a kör paraméterezéséből az

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

## Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Ellipszis,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

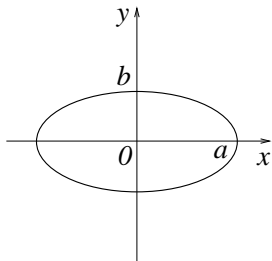
Látható, hogy ha valamely  $(x, y)$  számpár kielégíti az  $x^2 + y^2 = a^2$  köregyenletet, akkor az  $(x, \frac{b}{a}y)$  számpár kielégíti az ellipszis egyenletét.

Ezt felhasználva (azaz a második koordinátát  $\frac{b}{a}$ -val szorozva) a kör paraméterezéséből az

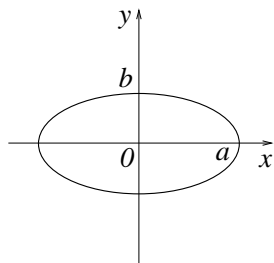
$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

képleteket nyerjük; az ellipszis egyenletébe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez valóban a kanonikus helyzetű ellipszis paraméteres előállítása:



# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



Ellipszis,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

Látható, hogy ha valamely  $(x, y)$  számpár kielégíti az  $x^2 + y^2 = a^2$  köregyenletet, akkor az  $(x, \frac{b}{a}y)$  számpár kielégíti az ellipszis egyenletét.

Ezt felhasználva (azaz a második koordinátát  $\frac{b}{a}$ -val szorozva) a kör paraméterezéséből az

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

képleteket nyerjük; az ellipszis egyenletébe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez valóban a kanonikus helyzetű ellipszis paraméteres előállítása:

$$\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} =$$

# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Ellipszis,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

Látható, hogy ha valamely  $(x, y)$  számpár kielégíti az  $x^2 + y^2 = a^2$  köregyenletet, akkor az  $(x, \frac{b}{a}y)$  számpár kielégíti az ellipszis egyenletét.

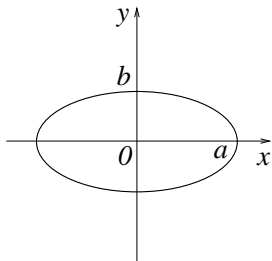
Ezt felhasználva (azaz a második koordinátát  $\frac{b}{a}$ -val szorozva) a kör paraméterezéséből az

$$x = a \cos t$$

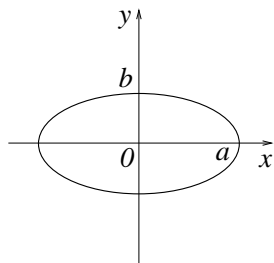
$$y = b \sin t$$

képleteket nyerjük; az ellipszis egyenletébe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez valóban a kanonikus helyzetű ellipszis paraméteres előállítása:

$$\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$



# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



Ellipszis,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

Látható, hogy ha valamely  $(x, y)$  számpár kielégíti az  $x^2 + y^2 = a^2$  köregyenletet, akkor az  $(x, \frac{b}{a}y)$  számpár kielégíti az ellipszis egyenletét.

Ezt felhasználva (azaz a második koordinátát  $\frac{b}{a}$ -val szorozva) a kör paraméterezéséből az

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

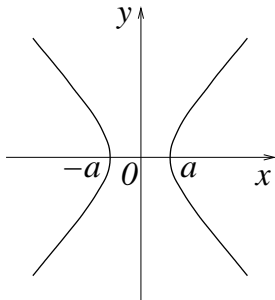
képleteket nyerjük; az ellipszis egyenletébe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez valóban a kanonikus helyzetű ellipszis paraméteres előállítása:

$$\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

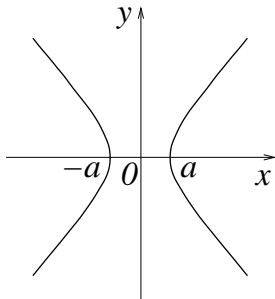
(Látszik, hogy a paraméterezés helyessége a  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  trigonometriai alapösszefüggésen múlik.)

# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése

Hiperbola,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ :



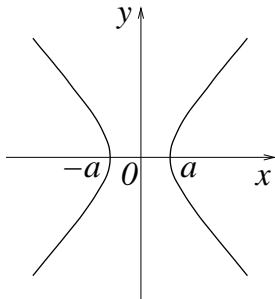
# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



Hiperbola,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

A  $\text{ch } t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  és  $\text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  hiperbolikus függvényekre érvényes a  $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$  azonosság.

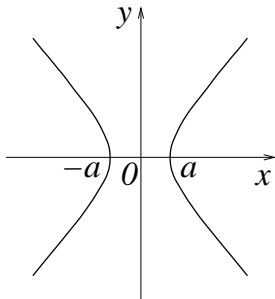
# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



Hiperbola,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

A  $\text{ch } t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  és  $\text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  hiperbolikus függvényekre érvényes a  $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$  azonosság. Ezért a  $\cos t$  és  $\sin t$  függvények helyett ezeket használva a kanonikus helyzetű ellipszis paraméterezéséből a kanonikus helyzetű hiperbola paraméterezését kell kapnunk:

# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



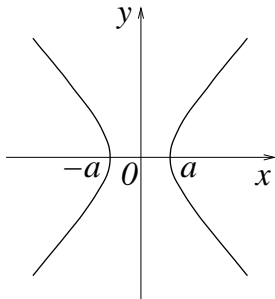
Hiperbola,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

A  $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  és  $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  hiperbolikus függvényekre érvényes a  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$  azonosság. Ezért a  $\cos t$  és  $\sin t$  függvények helyett ezeket használva a kanonikus helyzetű ellipszis paraméterezéséből a kanonikus helyzetű hiperbola paraméterezését kell kapnunk:

$$x = a \operatorname{ch} t$$

$$y = b \operatorname{sh} t$$

# Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



Hiperbola,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

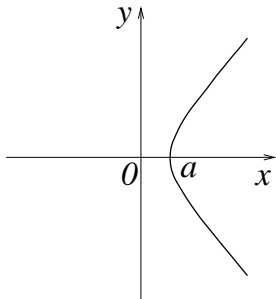
A  $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  és  $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  hiperbolikus függvényekre érvényes a  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$  azonosság. Ezért a  $\cos t$  és  $\sin t$  függvények helyett ezeket használva a kanonikus helyzetű ellipszis paraméterezéséből a kanonikus helyzetű hiperbola paraméterezését kell kapnunk:

$$x = a \operatorname{ch} t$$

$$y = b \operatorname{sh} t$$

Valóban, az egyenletbe való behelyettesítés mutatja, hogy a képlet által adott  $(x, y)$  pont minden valós  $t$ -értékre a hiperbola pontja.

## Egyenletek: kúpszeletek paraméterezése



Hiperbola,  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ :

A  $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  és  $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  hiperbolikus függvényekre érvényes a  $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$  azonosság. Ezért a  $\cos t$  és  $\sin t$  függvények helyett ezeket használva a kanonikus helyzetű ellipszis paraméterezéséből a kanonikus helyzetű hiperbola paraméterezését kell kapnunk:

$$x = a \operatorname{ch} t$$

$$y = b \operatorname{sh} t$$

Valóban, az egyenletbe való behelyettesítés mutatja, hogy a képlet által adott  $(x, y)$  pont minden valós  $t$ -értékre a hiperbola pontja. Nem kapjuk meg viszont az egész hiperbolát: a paraméteresen előállított pont csak a hiperbola jobb oldali ágát (az  $x > 0$  félsíkba eső részét) futja be.

# A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- **Vektorgeometria**
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

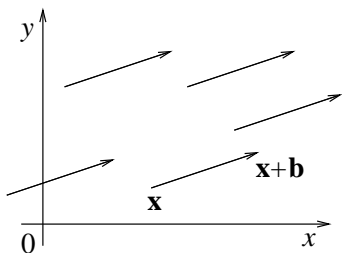
# Transzformációk és koordináták

# Transzformációk és koordináták

Eltolás (akár síkban, akár térben):

# Transzformációk és koordináták

Eltolás (akár síkban, akár térben):



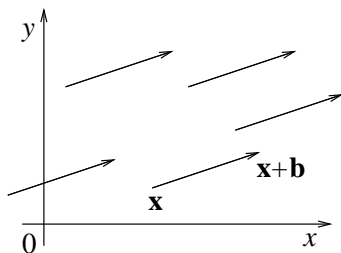
valamely rögzített  $\mathbf{b}$  vektor hozzáadása a sík, illetve a tér bármely pontjához:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

(ahol  $\mathbf{x}$  a változó pont helyvektora).

# Transzformációk és koordináták

Eltolás (akár síkban, akár térben):



valamely rögzített  $\mathbf{b}$  vektor hozzáadása a sík, illetve a tér bármely pontjához:

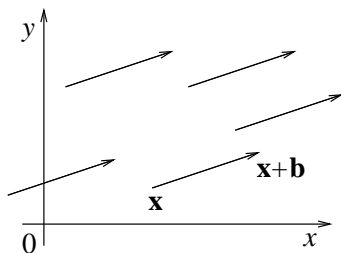
$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

(ahol  $\mathbf{x}$  a változó pont helyvektora).

Tehát:

# Transzformációk és koordináták

Eltolás (akár síkban, akár térben):



valamely rögzített  $\mathbf{b}$  vektor hozzáadása a sík, illetve a tér bármely pontjához:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

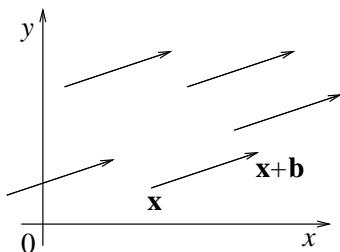
(ahol  $\mathbf{x}$  a változó pont helyvektora).

Tehát:

ha  $x', y', z'$  jelöli az  $(x, y, z)$  pont eltoltjának koordinátáit

# Transzformációk és koordináták

Eltolás (akár síkban, akár térben):



valamely rögzített  $\mathbf{b}$  vektor hozzáadása a sík, illetve a tér bármely pontjához:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

(ahol  $\mathbf{x}$  a változó pont helyvektora).

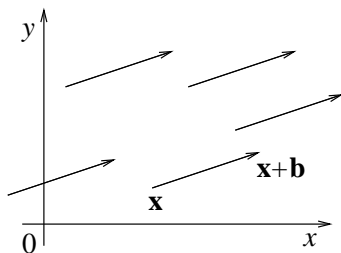
Tehát:

ha  $x', y', z'$  jelöli az  $(x, y, z)$  pont eltoltjának koordinátáit

és  $\mathbf{b} = (p, q, r)$ ,

# Transzformációk és koordináták

Eltolás (akár síkban, akár térben):



valamely rögzített  $\mathbf{b}$  vektor hozzáadása a sík, illetve a tér bármely pontjához:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

(ahol  $\mathbf{x}$  a változó pont helyvektora).

Tehát:

ha  $x', y', z'$  jelöli az  $(x, y, z)$  pont eltoltjának koordinátáit és  $\mathbf{b} = (p, q, r)$ , akkor

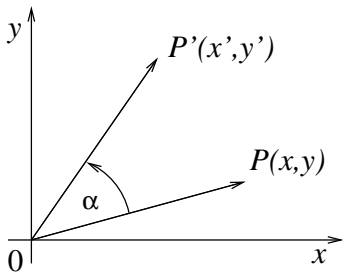
$$x' = x + p, \quad y' = y + q, \quad z' = z + r.$$

# Transzformációk és koordináták

A sík elforgatása az origó körül  $\alpha$  szöggel:

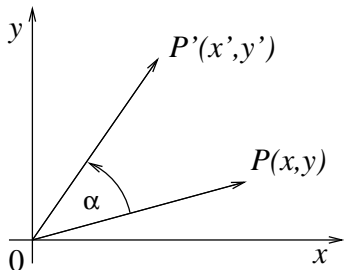
# Transzformációk és koordináták

A sík elforgatása az origó körül  $\alpha$  szöggel:



# Transzformációk és koordináták

A sík elforgatása az origó körül  $\alpha$  szöggel:



## Tétel

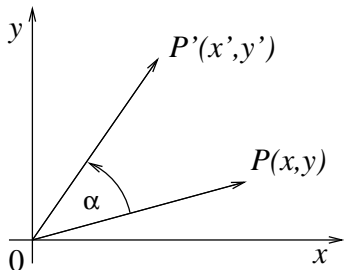
Tetszőleges  $P(x, y)$  pont  
 $P'(x', y')$  képezére

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

# Transzformációk és koordináták

A sík elforgatása az origó körül  $\alpha$  szöggel:



Bizonyítás:

## Tétel

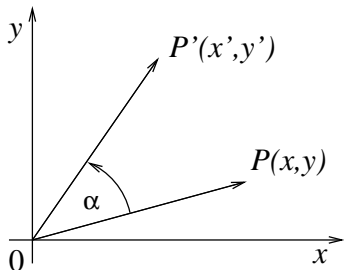
Tetszőleges  $P(x, y)$  pont  
 $P'(x', y')$  képezére

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

# Transzformációk és koordináták

A sík elforgatása az origó körül  $\alpha$  szöggel:



## Tétel

Tetszőleges  $P(x, y)$  pont  
 $P'(x', y')$  képezére

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

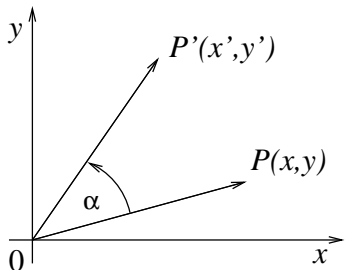
$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Bizonyítás:

Tekintsük először az  $x = 1, y = 0$ , illetve  $x = 0, y = 1$  speciális esetet,

# Transzformációk és koordináták

A sík elforgatása az origó körül  $\alpha$  szöggel:



## Tétel

Tetszőleges  $P(x, y)$  pont  
 $P'(x', y')$  képezére

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Bizonyítás:

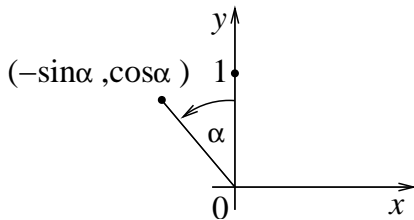
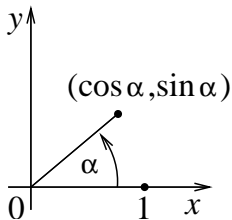
Tekintsük először az  $x = 1, y = 0$ , illetve  $x = 0, y = 1$  speciális esetet, azaz az  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  helyvektorú pontok elforgatottjait.

# Transzformációk és koordináták

Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :

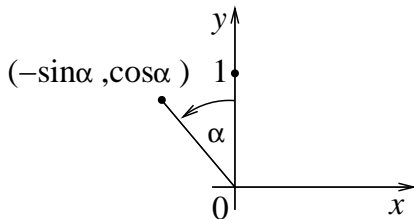
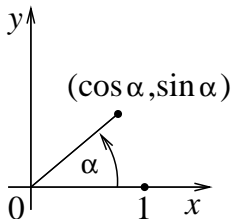
# Transzformációk és koordináták

Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :



# Transzformációk és koordináták

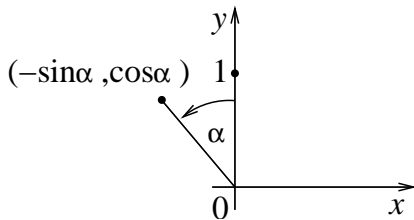
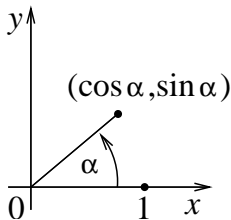
Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :



Ha az általános esetben  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ ,

# Transzformációk és koordináták

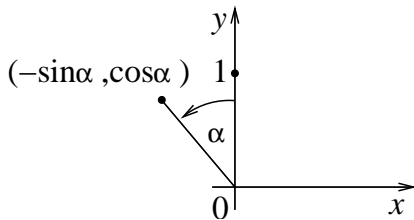
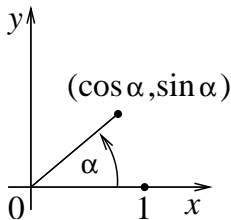
Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :



Ha az általános esetben  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ , akkor  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$   
és  $\mathbf{x}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ ,

# Transzformációk és koordináták

Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :

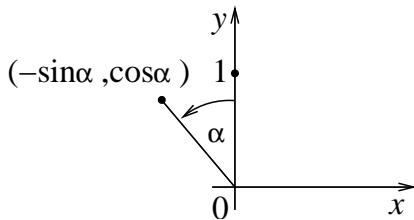
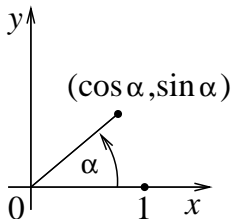


Ha az általános esetben  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ , akkor  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$   
és  $\mathbf{x}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ , másrészt

$$\mathbf{x}' = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})'$$

# Transzformációk és koordináták

Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :

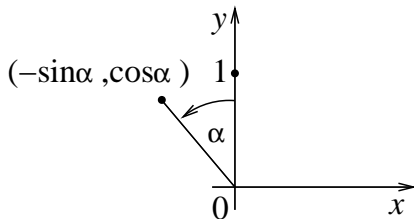
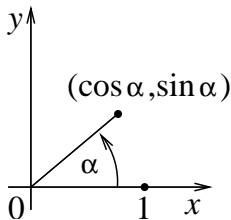


Ha az általános esetben  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ , akkor  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$   
és  $\mathbf{x}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ , másrészt

$$\mathbf{x}' = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}'$$

# Transzformációk és koordináták

Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :

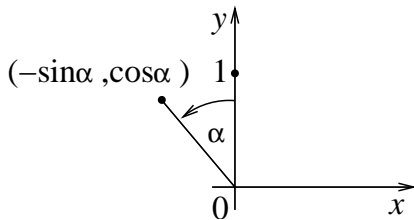
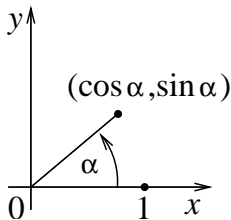


Ha az általános esetben  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ , akkor  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$   
és  $\mathbf{x}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ , másrészt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' = \\ &= x(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) + y(-\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}) \end{aligned}$$

# Transzformációk és koordináták

Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :

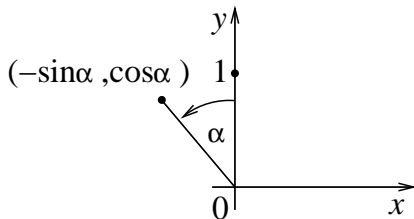
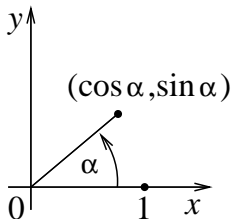


Ha az általános esetben  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ , akkor  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$   
és  $\mathbf{x}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ , másrészt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' = \\ &= x(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) + y(-\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}) = \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha)\mathbf{i} + (x \sin \alpha + y \cos \alpha)\mathbf{j}, \end{aligned}$$

# Transzformációk és koordináták

Ekkor valóban  $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$  és  $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ :



Ha az általános esetben  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{OP'}$ , akkor  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$   
és  $\mathbf{x}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ , másrészt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' = \\ &= x(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) + y(-\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}) = \\ &= (x \cos \alpha - y \sin \alpha)\mathbf{i} + (x \sin \alpha + y \cos \alpha)\mathbf{j}, \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

# Transzformációk és koordináták

$$\begin{aligned} \text{Az} \quad x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

képletek mátrixos alakja:

# Transzformációk és koordináták

$$\begin{aligned} \text{Az} \quad x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

képletek mátrixos alakja:

$$\mathbf{x}' = A_\alpha \mathbf{x},$$

ahol  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  (oszlopvektorok), és

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

az  $\alpha$  szögű **forgatásmátrix**.

# Transzformációk és koordináták

$$\begin{aligned} \text{Az} \quad x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

képletek mátrixos alakja:

$$\mathbf{x}' = A_\alpha \mathbf{x},$$

ahol  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  (oszlopvektorok), és

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

az  $\alpha$  szögű **forgatásmátrix**.

Észrevétel:

# Transzformációk és koordináták

$$\begin{aligned} \text{Az} \quad x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

képletek mátrixos alakja:

$$\mathbf{x}' = A_\alpha \mathbf{x},$$

ahol  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  (oszlopvektorok), és

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

az  $\alpha$  szögű **forgatásmátrix**.

Észrevétel:  $A_{\alpha+\beta} = A_\alpha A_\beta$  mátrixszorzat.

# Transzformációk és koordináták

$$\begin{aligned} \text{Az} \quad x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

képletek mátrixos alakja:

$$\mathbf{x}' = A_\alpha \mathbf{x},$$

ahol  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  (oszlopvektorok), és

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

az  $\alpha$  szögű **forgatásmátrix**.

Észrevétel:  $A_{\alpha+\beta} = A_\alpha A_\beta$  mátrixszorzat.

(Feladat: végezzük el a szorzást)

# Transzformációk és koordináták

$$\begin{aligned} \text{Az} \quad x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

képletek mátrixos alakja:

$$\mathbf{x}' = A_\alpha \mathbf{x},$$

ahol  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  (oszlopvektorok), és

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

az  $\alpha$  szögű **forgatásmátrix**.

Észrevétel:  $A_{\alpha+\beta} = A_\alpha A_\beta$  mátrixszorzat.

(Feladat: végezzük el a szorzást és ismerjük rá a sin és cos függvényekre érvényes összegképletekre.)

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként.

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű,

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

Tehát ha a mozgást az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés írja le,

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

Tehát ha a mozgást az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés írja le, akkor

$$f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

alakú (ahol  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorváltozó).

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

Tehát ha a mozgást az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés írja le, akkor

$$f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

alakú (ahol  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorváltozó).

Például ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

Tehát ha a mozgást az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés írja le, akkor

$$f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

alakú (ahol  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorváltozó).

Például ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor origó körüli forgatásról van szó,

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

Tehát ha a mozgást az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés írja le, akkor

$$f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

alakú (ahol  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorváltozó).

Például ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor origó körüli forgatásról van szó, ha pedig  $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ ,

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

Tehát ha a mozgást az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés írja le, akkor

$$f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

alakú (ahol  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorváltozó).

Például ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor origó körüli forgatásról van szó, ha pedig  $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ , azaz  $A_\alpha = I$  (egységmátrix),

# Transzformációk és koordináták

A sík mozgásai:

Tények (bizonyítás nélkül):

- A sík bármely mozgása vagy eltolás, vagy valamely pont körüli forgatás.
- A sík bármely mozgása előáll egy origó körüli forgatás és egy eltolás egymásutánjaként. Ez az előállítás egyértelmű, azaz adott mozgást csak egyféleképpen lehet ilyen kompozícióként felírni.

Tehát ha a mozgást az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés írja le, akkor

$$f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

alakú (ahol  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorváltozó).

Például ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor origó körüli forgatásról van szó, ha pedig  $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ , azaz  $A_\alpha = I$  (egységmátrix), akkor eltolásról.

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ ,

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

$$(f_2 \circ f_1)(\mathbf{x}) = f_2(f_1(\mathbf{x}))$$

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

$$(f_2 \circ f_1)(\mathbf{x}) = f_2(f_1(\mathbf{x})) = A_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2$$

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(\mathbf{x}) &= f_2(f_1(\mathbf{x})) = A_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_2}A_{\alpha_1}\mathbf{x} + A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2\end{aligned}$$

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(\mathbf{x}) &= f_2(f_1(\mathbf{x})) = A_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_2}A_{\alpha_1}\mathbf{x} + A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_1+\alpha_2}\mathbf{x} + (A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2).\end{aligned}$$

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(\mathbf{x}) &= f_2(f_1(\mathbf{x})) = A_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_2}A_{\alpha_1}\mathbf{x} + A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_1+\alpha_2}\mathbf{x} + (A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2).\end{aligned}$$

Az  $f(\mathbf{x}) = A_{\alpha}\mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás inverze pedig

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(\mathbf{x}) &= f_2(f_1(\mathbf{x})) = A_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_2}A_{\alpha_1}\mathbf{x} + A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_1+\alpha_2}\mathbf{x} + (A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2).\end{aligned}$$

Az  $f(\mathbf{x}) = A_{\alpha}\mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás inverze pedig az

$$f^{-1}(\mathbf{x}) = A_{-\alpha}\mathbf{x} - A_{-\alpha}\mathbf{b}$$

képlettel adható meg.

# Transzformációk és koordináták

Mi a síkmozgások egymás után történő végrehajtásának képlete?

Legyen  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2}\mathbf{x} + \mathbf{b}_2$ , és tekintsük az  $f_2 \circ f_1$  mozgást:

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(\mathbf{x}) &= f_2(f_1(\mathbf{x})) = A_{\alpha_2}(A_{\alpha_1}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_2}A_{\alpha_1}\mathbf{x} + A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \\ &= A_{\alpha_1+\alpha_2}\mathbf{x} + (A_{\alpha_2}\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2).\end{aligned}$$

Az  $f(\mathbf{x}) = A_{\alpha}\mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás inverze pedig az

$$f^{-1}(\mathbf{x}) = A_{-\alpha}\mathbf{x} - A_{-\alpha}\mathbf{b}$$

képlettel adható meg.

Valóban, a fenti kompozíciós szabályt alkalmazva

$$A_{-\alpha}(A_{\alpha}\mathbf{x} + \mathbf{b}) - A_{-\alpha}\mathbf{b} = \mathbf{x}.$$

# Transzformációk és koordináták

Az  $f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás **egyesített mátrix**ának nevezzük

# Transzformációk és koordináták

Az  $f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás **egyesített mátrixának** nevezzük az

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & p \\ \sin \alpha & \cos \alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3$ -as mátrixot, ahol  $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  és  $\mathbf{b} = (p, q)$ .

# Transzformációk és koordináták

Az  $f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás **egyesített mátrixának** nevezzük az

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & p \\ \sin \alpha & \cos \alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3$ -as mátrixot, ahol  $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  és  $\mathbf{b} = (p, q)$ .

Az egyesített mátrix fontos tulajdonsága,

# Transzformációk és koordináták

Az  $f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás **egyesített mátrixának** nevezzük az

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & p \\ \sin \alpha & \cos \alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3$ -as mátrixot, ahol  $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  és  $\mathbf{b} = (p, q)$ .

Az egyesített mátrix fontos tulajdonsága, hogy két síkmozgás egymásutánját a két mátrix szorzata adja meg.

# Transzformációk és koordináták

Az  $f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás **egyesített mátrixának** nevezzük az

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & p \\ \sin \alpha & \cos \alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3$ -as mátrixot, ahol  $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  és  $\mathbf{b} = (p, q)$ .

Az egyesített mátrix fontos tulajdonsága, hogy két síkmozgás egymásutánját a két mátrix szorzata adja meg.

Ezt most ellenőrizzük:

# Transzformációk és koordináták

Az  $f(\mathbf{x}) = A_\alpha \mathbf{x} + \mathbf{b}$  síkmozgás **egyesített mátrixának** nevezzük az

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & p \\ \sin \alpha & \cos \alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3$ -as mátrixot, ahol  $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  és  $\mathbf{b} = (p, q)$ .

Az egyesített mátrix fontos tulajdonsága, hogy két síkmozgás egymásutánját a két mátrix szorzata adja meg.

Ezt most ellenőrizzük:

Tekintsük az  $f_1(\mathbf{x}) = A_{\alpha_1} \mathbf{x} + \mathbf{b}_1$  és  $f_2(\mathbf{x}) = A_{\alpha_2} \mathbf{x} + \mathbf{b}_2$  síkmozgásokat.

# Transzformációk és koordináták

Az egyesített mátrixok szorzata:

# Transzformációk és koordináták

Az egyesített mátrixok szorzata:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & p_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & p_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

# Transzformációk és koordináták

Az egyesített mátrixok szorzata:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & p_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & p_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & p' \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

# Transzformációk és koordináták

Az egyesített mátrixok szorzata:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & p_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & p_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & p' \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol

$$p' = p_1 \cos \alpha_2 - q_1 \sin \alpha_2 + p_2,$$

$$q' = p_1 \sin \alpha_2 + q_1 \cos \alpha_2 + q_2,$$

# Transzformációk és koordináták

Az egyesített mátrixok szorzata:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & p_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & p_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & p' \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol

$$p' = p_1 \cos \alpha_2 - q_1 \sin \alpha_2 + p_2,$$

$$q' = p_1 \sin \alpha_1 + q_1 \cos \alpha_2 + q_2,$$

azaz a szorzatmátrix valóban az  $A_{\alpha_1 + \alpha_2} \mathbf{x} + (A_{\alpha_2} \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$  képlettel leírható  $f_2 \circ f_1$  síkmozgás egyesített mátrixa.

# Transzformációk és koordináták

Az egyesített mátrixok szorzata:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & p_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & p_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & p' \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol

$$p' = p_1 \cos \alpha_2 - q_1 \sin \alpha_2 + p_2,$$

$$q' = p_1 \sin \alpha_1 + q_1 \cos \alpha_2 + q_2,$$

azaz a szorzatmátrix valóban az  $A_{\alpha_1 + \alpha_2} \mathbf{x} + (A_{\alpha_2} \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$  képlettel leírható  $f_2 \circ f_1$  síkmozgás egyesített mátrixa.

Megjegyzés: A sík mozgásait a különféle számítógépes grafikai alkalmazások általában az egyesített mátrixokkal kezelik.

# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

# Transzformációk és koordináták

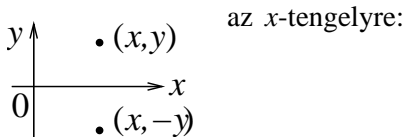
Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

A sík tükrözése

# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

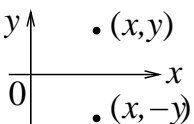
A sík tükrözése



# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

A sík tükrözése



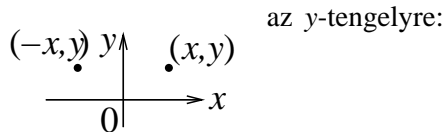
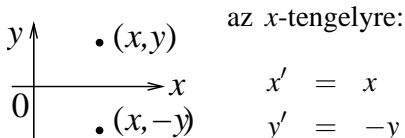
az  $x$ -tengelyre:

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

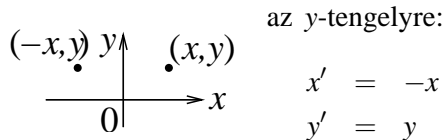
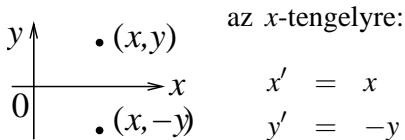
A sík tükrözése



# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

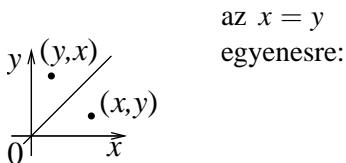
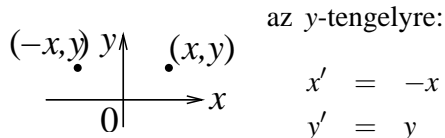
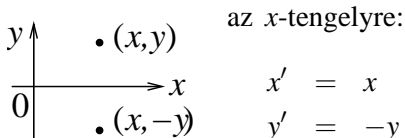
A sík tükrözése



# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

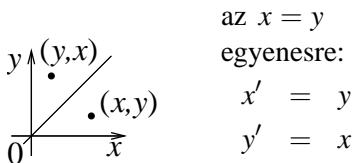
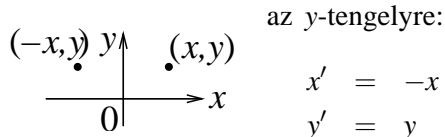
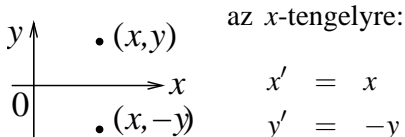
A sík tükrözése



# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

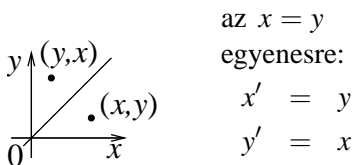
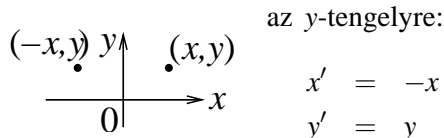
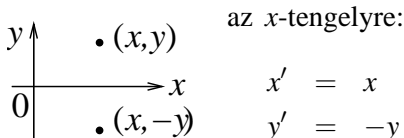
A sík tükrözése



# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

A sík tükrözése

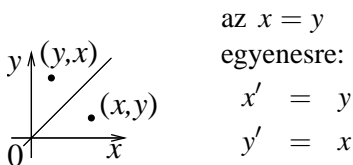
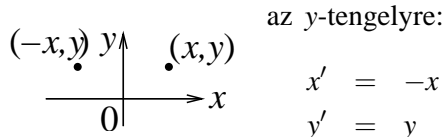
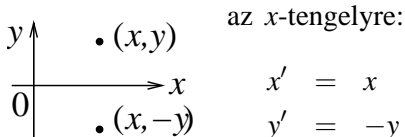


A tér forgatása a  $z$ -tengely körül  
 $\alpha$  szöggel:

# Transzformációk és koordináták

Néhány további geometriai transzformáció koordinátás alakban:

A sík tükrözése



A tér forgatása a  $z$ -tengely körül  $\alpha$  szöggel:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$z' = z$$

# Egyenletek és transzformációk

# Egyenletek és transzformációk

Az egyszerűség kedvéért csak síkbeli egyenletekre és a sík mozgásaira szorítkozunk.

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ ,

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

Hogyan lehet az  $f(H)$  alakzat egyenletét származtatni?

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

Hogyan lehet az  $f(H)$  alakzat egyenletét származtatni?

A sík valamely tetszőleges  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontjára

$$\mathbf{x} \in f(H) \iff$$

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

Hogyan lehet az  $f(H)$  alakzat egyenletét származtatni?

A sík valamely tetszőleges  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontjára

$$\mathbf{x} \in f(H) \iff f^{-1}(\mathbf{x}) \in H$$

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

Hogyan lehet az  $f(H)$  alakzat egyenletét származtatni?

A sík valamely tetszőleges  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontjára

$$\mathbf{x} \in f(H) \iff f^{-1}(\mathbf{x}) \in H \iff F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0.$$

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

Hogyan lehet az  $f(H)$  alakzat egyenletét származtatni?

A sík valamely tetszőleges  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontjára

$$\mathbf{x} \in f(H) \iff f^{-1}(\mathbf{x}) \in H \iff F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0.$$

Ezért  $F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0$  az  $f(H)$  alakzat egyenlete.

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

Hogyan lehet az  $f(H)$  alakzat egyenletét származtatni?

A sík valamely tetszőleges  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontjára

$$\mathbf{x} \in f(H) \iff f^{-1}(\mathbf{x}) \in H \iff F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0.$$

Ezért  $F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0$  az  $f(H)$  alakzat egyenlete.

Tehát az eredeti egyenletből úgy kapjuk a transzformált alakzat egyenletét,

# Egyenletek és transzformációk

Tekintsük az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel megadott  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzatot.

Tehát ekkor  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ , azaz a  $H$  alakzat vektoregyenlete  $F(\mathbf{x}) = 0$ , ahol  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgás.

Hogyan lehet az  $f(H)$  alakzat egyenletét származtatni?

A sík valamely tetszőleges  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontjára

$$\mathbf{x} \in f(H) \iff f^{-1}(\mathbf{x}) \in H \iff F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0.$$

Ezért  $F(f^{-1}(\mathbf{x})) = 0$  az  $f(H)$  alakzat egyenlete.

Tehát az eredeti egyenletből úgy kapjuk a transzformált alakzat egyenletét, hogy a transzformáció **inverzét** helyettesítjük az egyenletbe.

# Egyenletek és transzformációk: példák

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral.

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

Például:

- A  $(p, q)$  középpontú,  $a$  sugarú kört eltolással kapjuk az origó középpontú körből,

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

Például:

- A  $(p, q)$  középpontú,  $a$  sugarú kört eltolással kapjuk az origó középpontú körből, így az egyenlete (ahogyan azt már korábban láttuk):

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

Például:

- A  $(p, q)$  középpontú,  $a$  sugarú kört eltolással kapjuk az origó középpontú körből, így az egyenlete (ahogyan azt már korábban láttuk):

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2.$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

Például:

- A  $(p, q)$  középpontú,  $a$  sugarú kört eltolással kapjuk az origó középpontú körből, így az egyenlete (ahogyan azt már korábban láttuk):

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2.$$

- Ha a kanonikus helyzetű ellipszist vagy hiperbolát eltoljuk a  $(p, q)$  vektorral,

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

Például:

- A  $(p, q)$  középpontú,  $a$  sugarú kört eltolással kapjuk az origó középpontú körből, így az egyenlete (ahogyan azt már korábban láttuk):

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2.$$

- Ha a kanonikus helyzetű ellipszist vagy hiperbolát eltoljuk a  $(p, q)$  vektorral, akkor az eltolt kúpszelet egyenlete

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

Például:

- A  $(p, q)$  középpontú,  $a$  sugarú kört eltolással kapjuk az origó középpontú körből, így az egyenlete (ahogyan azt már korábban láttuk):

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2.$$

- Ha a kanonikus helyzetű ellipszist vagy hiperbolát eltoljuk a  $(p, q)$  vektorral, akkor az eltolt kúpszelet egyenlete

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1,$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Eltolás:

Legyen  $F(x, y) = 0$  a  $H$  alakzat egyenlete, és alkalmazzunk  $H$ -ra eltolást a  $(p, q)$  vektorral. Az eltolt alakzat egyenlete

$$F(x - p, y - q) = 0.$$

Például:

- A  $(p, q)$  középpontú,  $a$  sugarú kört eltolással kapjuk az origó középpontú körből, így az egyenlete (ahogyan azt már korábban láttuk):

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2.$$

- Ha a kanonikus helyzetű ellipszist vagy hiperbolát eltoljuk a  $(p, q)$  vektorral, akkor az eltolt kúpszelet egyenlete

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1, \quad \text{illetve} \quad \frac{(x - p)^2}{a^2} - \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1.$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (= A_\alpha^\top)$$

mátrix,

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (= A_\alpha^\top)$$

mátrix, ezért az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás esetén az  $x \cos \alpha + y \sin \alpha$  és  $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (= A_\alpha^\top)$$

mátrix, ezért az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás esetén az  $x \cos \alpha + y \sin \alpha$  és  $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$  kifejezéseket kell  $x$ , illetve  $y$  helyébe helyettesíteni.

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (= A_\alpha^\top)$$

mátrix, ezért az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás esetén az  $x \cos \alpha + y \sin \alpha$  és  $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$  kifejezéseket kell  $x$ , illetve  $y$  helyébe helyettesíteni.

Például:

# Egyenletek és transzformációk: példák

Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (= A_\alpha^\top)$$

mátrix, ezért az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás esetén az  $x \cos \alpha + y \sin \alpha$  és  $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$  kifejezéseket kell  $x$ , illetve  $y$  helyébe helyettesíteni.

Például:

Forgassuk el az  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$   
kanonikus helyzetű hiperbolát  
az origó körül  $45^\circ$ -kal,

# Egyenletek és transzformációk: példák

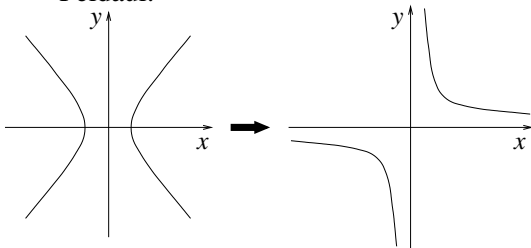
Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (= A_\alpha^\top)$$

mátrix, ezért az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás esetén az  $x \cos \alpha + y \sin \alpha$  és  $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$  kifejezéseket kell  $x$ , illetve  $y$  helyébe helyettesíteni.

Például:



Forgassuk el az  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$  kanonikus helyzetű hiperbolát az origó körül  $45^\circ$ -kal,

# Egyenletek és transzformációk: példák

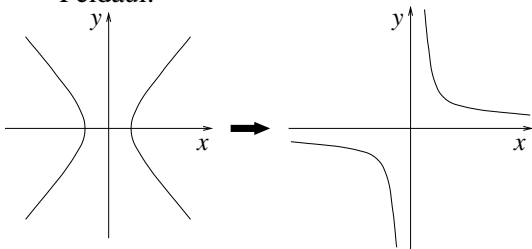
Elforgatás:

Az origó körüli  $\alpha$  szögű  $A_\alpha$  forgatásmátrix inverze az

$$A_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (= A_\alpha^\top)$$

mátrix, ezért az origó körüli  $\alpha$  szögű forgatás esetén az  $x \cos \alpha + y \sin \alpha$  és  $-x \sin \alpha + y \cos \alpha$  kifejezéseket kell  $x$ , illetve  $y$  helyébe helyettesíteni.

Például:



Forgassuk el az  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$  kanonikus helyzetű hiperbolát az origó körül  $45^\circ$ -kal, és írjuk föl az elforgatott hiperbola egyenletét.

# Egyenletek és transzformációk: példák

Megoldás:

# Egyenletek és transzformációk: példák

Megoldás:

Az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletben  $x$  helyébe  $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ -t,  
 $y$  helyébe  $(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ -t kell helyettesítenünk  
(ahol  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ):

# Egyenletek és transzformációk: példák

Megoldás:

Az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletben  $x$  helyébe  $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ -t,  
 $y$  helyébe  $(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ -t kell helyettesítenünk  
(ahol  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ):

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}{2} = 1,$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Megoldás:

Az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletben  $x$  helyébe  $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ -t,  
 $y$  helyébe  $(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ -t kell helyettesítenünk  
(ahol  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ):

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}{2} = 1,$$

egyszerűsítve

$$xy = 1$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Megoldás:

Az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletben  $x$  helyébe  $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ -t,  
 $y$  helyébe  $(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ -t kell helyettesítenünk  
(ahol  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ):

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2}{2} = 1,$$

egyszerűsítve

$$xy = 1 \quad \left( \text{vagy } y = \frac{1}{x} \right).$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Másik példa:

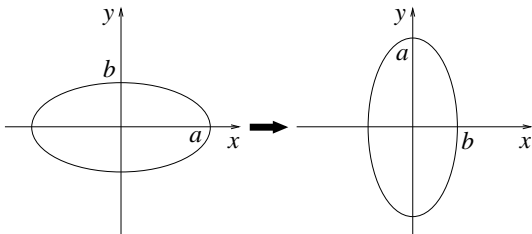
# Egyenletek és transzformációk: példák

Másik példa:

Forgassuk el az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
kanonikus helyzetű ellipszist

# Egyenletek és transzformációk: példák

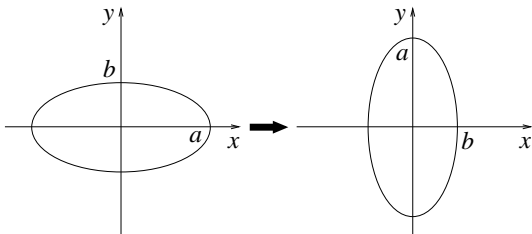
Másik példa:



Forgassuk el az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
kanonikus helyzetű ellipszist  
az origó körül  $90^\circ$ -kal.

# Egyenletek és transzformációk: példák

Másik példa:

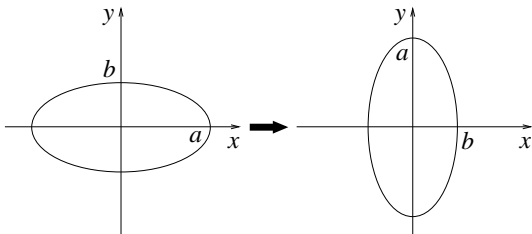


Forgassuk el az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
kanonikus helyzetű ellipszist  
az origó körül  $90^\circ$ -kal.

Most  $x$  helyébe  $x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ =$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Másik példa:

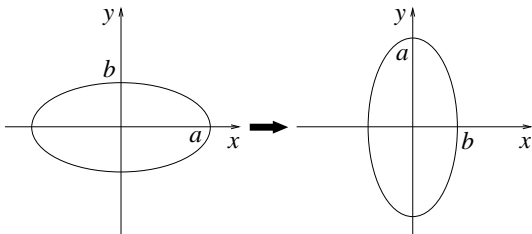


Forgassuk el az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
 kanonikus helyzetű ellipszist  
 az origó körül  $90^\circ$ -kal.

Most  $x$  helyébe  $x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = y$ ,  
 $y$  helyébe pedig  $-x \sin 90^\circ + y \cos 90^\circ =$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Másik példa:

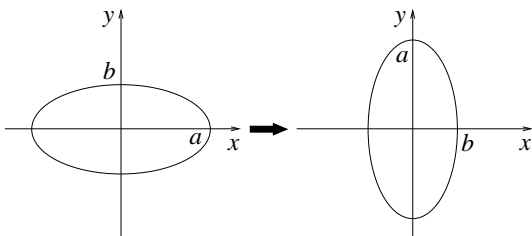


Forgassuk el az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
 kanonikus helyzetű ellipszist  
 az origó körül  $90^\circ$ -kal.

Most  $x$  helyébe  $x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = y$ ,  
 $y$  helyébe pedig  $-x \sin 90^\circ + y \cos 90^\circ = -x$  helyettesítendő:

# Egyenletek és transzformációk: példák

Másik példa:



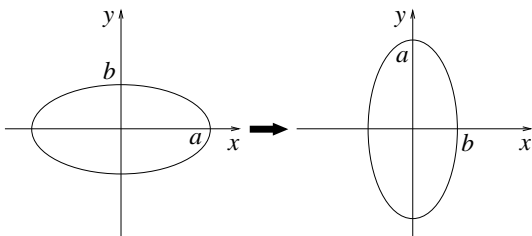
Forgassuk el az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
 kanonikus helyzetű ellipszist  
 az origó körül  $90^\circ$ -kal.

Most  $x$  helyébe  $x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = y$ ,  
 $y$  helyébe pedig  $-x \sin 90^\circ + y \cos 90^\circ = -x$  helyettesítendő:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

# Egyenletek és transzformációk: példák

Másik példa:



Forgassuk el az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   
kanonikus helyzetű ellipszist  
az origó körül  $90^\circ$ -kal.

Most  $x$  helyébe  $x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = y$ ,  
 $y$  helyébe pedig  $-x \sin 90^\circ + y \cos 90^\circ = -x$  helyettesítendő:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

(Ugyanezt kapnánk az  $x \longleftrightarrow y$  tükrözéssel is.)

# Egyenletek és transzformációk

Tegyük fel most, hogy a  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzat az

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel van megadva.

# Egyenletek és transzformációk

Tegyük fel most, hogy a  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzat az

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel van megadva.

Ha az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgást  $H$ -ra alkalmazzuk,

# Egyenletek és transzformációk

Tegyük fel most, hogy a  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzat az

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel van megadva.

Ha az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgást  $H$ -ra alkalmazzuk, akkor az elmozgatott  $f(H)$  alakzat paraméteres egyenletrendszerét

# Egyenletek és transzformációk

Tegyük fel most, hogy a  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzat az

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel van megadva.

Ha az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgást  $H$ -ra alkalmazzuk, akkor az elmozgatott  $f(H)$  alakzat paraméteres egyenletrendszerét a  $\varphi(t)$  és  $\psi(t)$  képletek  $f$ -be történő behelyettesítésével nyerjük.

# Egyenletek és transzformációk

Tegyük fel most, hogy a  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzat az

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel van megadva.

Ha az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgást  $H$ -ra alkalmazzuk, akkor az elmozgatott  $f(H)$  alakzat paraméteres egyenletrendszerét a  $\varphi(t)$  és  $\psi(t)$  képletek  $f$ -be történő behelyettesítésével nyerjük.

Példa:

# Egyenletek és transzformációk

Tegyük fel most, hogy a  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  alakzat az

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel van megadva.

Ha az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  síkmozgást  $H$ -ra alkalmazzuk, akkor az elmozgatott  $f(H)$  alakzat paraméteres egyenletrendszerét a  $\varphi(t)$  és  $\psi(t)$  képletek  $f$ -be történő behelyettesítésével nyerjük.

Példa:

A  $(p, q)$  vektorral történő eltolás eredményeként az

$$x = \varphi(t) + p$$

$$y = \psi(t) + q$$

paraméteres egyenletrendszert kapjuk.

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállítás:

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t + q$$

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t + q$$

Másik példa:

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t \qquad x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t \qquad y = a \sin t + q$$

Másik példa:

Forgassuk el az  $x = t^2$ ,  $y = t$  paraméterezéssel adott kanonikus helyzetű parabolát az origó körül  $30^\circ$ -kal,

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t \qquad x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t \qquad y = a \sin t + q$$

Másik példa:

Forgassuk el az  $x = t^2$ ,  $y = t$  paraméterezéssel adott kanonikus helyzetű parabolát az origó körül  $30^\circ$ -kal, majd toljuk el a  $(2, 1)$  vektorral;

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t \qquad x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t \qquad y = a \sin t + q$$

Másik példa:

Forgassuk el az  $x = t^2$ ,  $y = t$  paraméterezéssel adott kanonikus helyzetű parabolát az origó körül  $30^\circ$ -kal, majd toljuk el a  $(2, 1)$  vektorral; írjuk föl a transzformált parabola paraméteres egyenletrendszerét.

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t \qquad x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t \qquad y = a \sin t + q$$

Másik példa:

Forgassuk el az  $x = t^2$ ,  $y = t$  paraméterezéssel adott kanonikus helyzetű parabolát az origó körül  $30^\circ$ -kal, majd toljuk el a  $(2, 1)$  vektorral; írjuk föl a transzformált parabola paraméteres egyenletrendszerét.

A transzformáció:

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t \qquad x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t \qquad y = a \sin t + q$$

Másik példa:

Forgassuk el az  $x = t^2$ ,  $y = t$  paraméterezéssel adott kanonikus helyzetű parabolát az origó körül  $30^\circ$ -kal, majd toljuk el a  $(2, 1)$  vektorral; írjuk föl a transzformált parabola paraméteres egyenletrendszerét.

A transzformáció:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ + 2 \\ y' &= x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ + 1. \end{aligned}$$

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállításai:

$$x = a \cos t \qquad x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t \qquad y = a \sin t + q$$

Másik példa:

Forgassuk el az  $x = t^2$ ,  $y = t$  paraméterezéssel adott kanonikus helyzetű parabolát az origó körül  $30^\circ$ -kal, majd toljuk el a  $(2, 1)$  vektorral; írjuk föl a transzformált parabola paraméteres egyenletrendszerét.

A transzformáció:  $x' = x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ + 2$

$$y' = x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ + 1.$$

Az új egyenletrendszer

## Egyenletek és transzformációk: példák

Így például az origó középpontú, illetve a  $(p, q)$  középpontú  $a$  sugarú kör paraméteres előállítására:

$$x = a \cos t \qquad x = a \cos t + p$$

$$y = a \sin t \qquad y = a \sin t + q$$

Másik példa:

Forgassuk el az  $x = t^2$ ,  $y = t$  paraméterezéssel adott kanonikus helyzetű parabolát az origó körül  $30^\circ$ -kal, majd toljuk el a  $(2, 1)$  vektorral; írjuk föl a transzformált parabola paraméteres egyenletrendszerét.

A transzformáció:

$$x' = x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ + 2$$
$$y' = x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ + 1.$$

Az új egyenletrendszer (végül  $(x', y')$  helyett  $(x, y)$ -t írva):

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + 2$$

$$y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1.$$