Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton

`nmarci@math.elte.hu`

`www.math.elte.hu/~nmarci`

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest

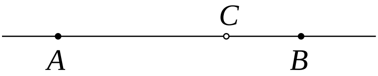
A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

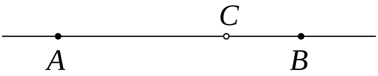
Osztóviszony:



$$(ABC) = \frac{AC}{CB} \quad \text{(előjelesen)}$$

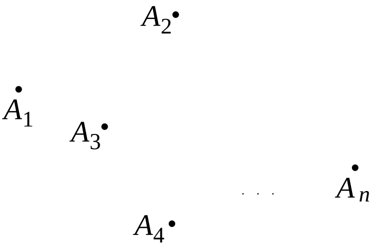
Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

Osztóviszony:



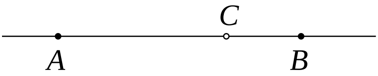
$$(ABC) = \frac{AC}{CB} \qquad \text{(előjelesen)}$$

Súlypont:



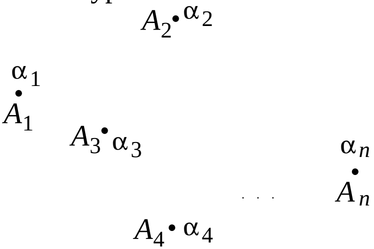
Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

Osztóviszony:



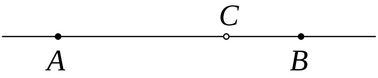
$$(ABC) = \frac{AC}{CB} \quad \text{(előjelesen)}$$

Súlypont:



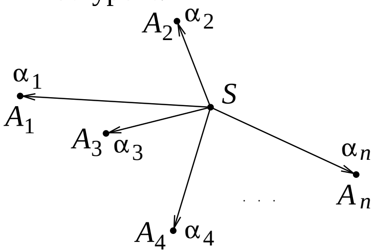
Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

Osztóviszony:



$$(ABC) = \frac{AC}{CB} \quad \text{(előjelesen)}$$

Súlypont:

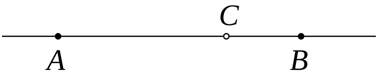


$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

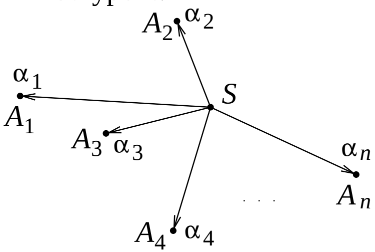
Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

Osztóviszony:



$$(ABC) = \frac{AC}{CB} \quad \text{(előjelesen)}$$

Súlypont:



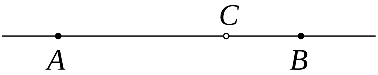
$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

A súlypont és az osztóviszony kapcsolata:

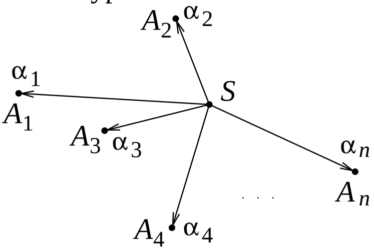
Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

Osztóviszony:



$$(ABC) = \frac{AC}{CB} \quad \text{(előjelesen)}$$

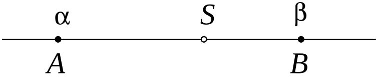
Súlypont:



$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

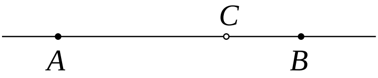
A súlypont és az osztóviszony kapcsolata:



Ha A súlya α ($\neq 0$), B súlya β,

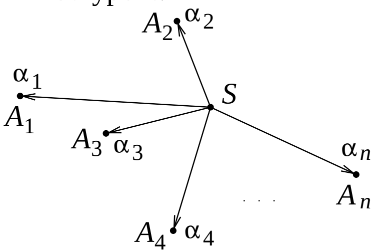
Emlékeztető: osztóviszony, súlypont

Osztóviszony:



$$(ABC) = \frac{AC}{CB} \quad \text{(előjelesen)}$$

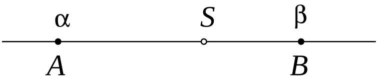
Súlypont:



$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

A súlypont és az osztóviszony kapcsolata:



Ha A súlya α $(\neq 0)$, B súlya β, akkor $(ABS) = \beta/\alpha$.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

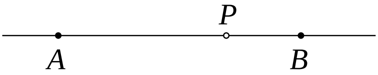
Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.
A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.
A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

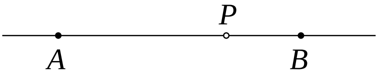


Valóban, ha $P \neq B$, akkor

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.
A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

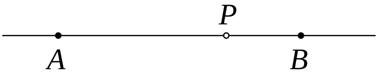


Valóban, ha $P \neq B$, akkor írjuk P osztóviszonyát $(ABP) = \beta/\alpha$ alakban,

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.
A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

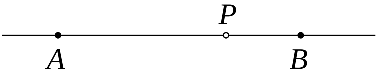


Valóban, ha $P \neq B$, akkor írjuk P osztóviszonyát $(ABP) = \beta/\alpha$ alakban, ekkor α és β jó súlyok.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.
A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

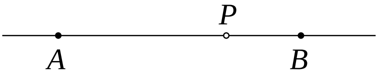


Valóban, ha $P \neq B$, akkor írjuk P osztóviszonyát $(ABP) = \beta/\alpha$ alakban, ekkor α és β jó súlyok.
Ha pedig $P = B$, akkor $\alpha = 0$ és $\beta = 1$ választható.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.
A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

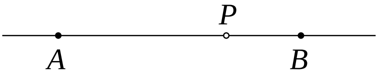


Valóban, ha $P \neq B$, akkor írjuk P osztóviszonyát $(ABP) = \beta/\alpha$ alakban, ekkor α és β jó súlyok.
Ha pedig $P = B$, akkor $\alpha = 0$ és $\beta = 1$ választható.
Miután ($\alpha \neq 0$ esetén) a súlyok aránya az osztóviszonnyal egyenlő,

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A és B két különböző pont. Ekkor az AB egyenes bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A és B súlypontjaként.
A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.



Valóban, ha $P \neq B$, akkor írjuk P osztóviszonyát $(ABP) = \beta/\alpha$ alakban, ekkor α és β jó súlyok.
Ha pedig $P = B$, akkor $\alpha = 0$ és $\beta = 1$ választható.
Miután ($\alpha \neq 0$ esetén) a súlyok aránya az osztóviszonnyal egyenlő, azt P egyértelműen meghatározza.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

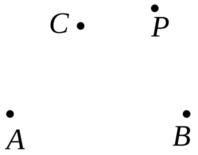
Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:

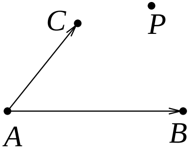


Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:



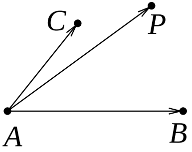
Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor bázist alkot a sík vektorai számára.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:



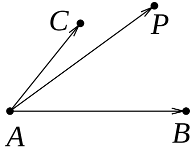
Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor bázist alkot a sík vektorai számára. Ezért alkalmas β és γ együtthatókkal $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:



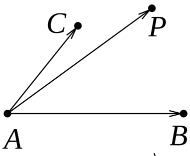
Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor bázist alkot a sík vektorai számára. Ezért alkalmas β és γ együtthatókkal $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Legyen **a**, **b** és **c** az A, B, illetve C pont helyvektora,

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:



Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor bázist alkot a sík vektorai számára. Ezért alkalmas β és γ együtthatókkal $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ az A, B, illetve C pont helyvektora, ekkor a P pont helyvektora:

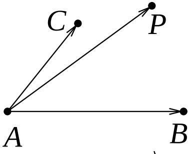
$$\mathbf{a} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) =$$

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:



Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor bázist alkot a sík vektorai számára. Ezért alkalmas β és γ együtthatókkal $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Legyen **a**, **b** és **c** az A, B, illetve C pont helyvektora, ekkor a P pont helyvektora:

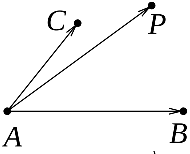
$$\mathbf{a} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \beta - \gamma)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c},$$

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:



Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor bázist alkot a sík vektorai számára. Ezért alkalmas β és γ együtthatókkal $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Legyen **a**, **b** és **c** az A, B, illetve C pont helyvektora, ekkor a P pont helyvektora:

$$\mathbf{a} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \beta - \gamma)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c},$$

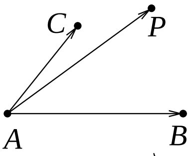
ami azt jelenti, hogy P előáll az A, B, C pontok súlypontjaként

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Tétel

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont. Ekkor az ABC sík bármely P pontja előállítható alkalmas súlyokkal A, B és C súlypontjaként. A P pont az előállításához szükséges súlyok arányát egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:



Az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor bázist alkot a sík vektorai számára. Ezért alkalmas β és γ együtthatókkal $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Legyen **a**, **b** és **c** az A, B, illetve C pont helyvektora, ekkor a P pont helyvektora:

$$\mathbf{a} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \beta - \gamma)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c},$$

ami azt jelenti, hogy P előáll az A, B, C pontok súlypontjaként az $\alpha = (1 - \beta - \gamma)$, β, illetve γ súlyokkal.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

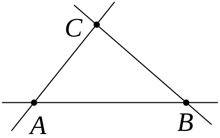
Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

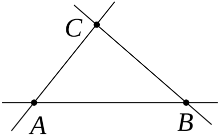
Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik.



Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

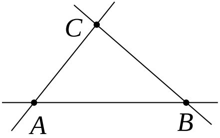
Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk,



Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

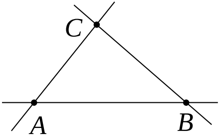
Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk, így feltehetjük, hogy α, β és γ egyike sem 0.



Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk, így feltehetjük, hogy α, β és γ egyike sem 0.

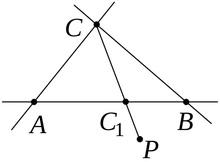


Tekintsük például a $\beta : \alpha$ arányt.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk, így feltehetjük, hogy α, β és γ egyike sem 0.

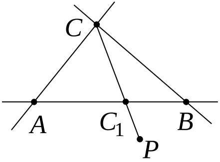


Tekintsük például a $\beta : \alpha$ arányt. Ha a PC egyenes metszi AB-t egy C_1 pontban, akkor

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk, így feltehetjük, hogy α, β és γ egyike sem 0.

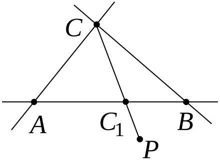


Tekintsük például a $\beta : \alpha$ arányt. Ha a PC egyenes metszi AB-t egy C_1 pontban, akkor a csoportosíthatósági tétel szerint C_1 előáll A és B súlypontjaként α és β súlyokkal,

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk, így feltehetjük, hogy α, β és γ egyike sem 0.

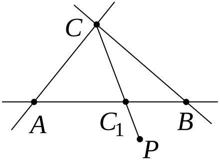


Tekintsük például a $\beta : \alpha$ arányt. Ha a PC egyenes metszi AB-t egy C_1 pontban, akkor a csoportosíthatósági tétel szerint C_1 előáll A és B súlypontjaként α és β súlyokkal, és ezért $\beta/\alpha = (ABC_1)$.

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk, így feltehetjük, hogy α, β és γ egyike sem 0.

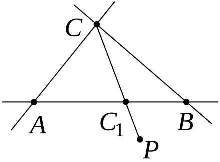


Tekintsük például a $\beta : \alpha$ arányt. Ha a PC egyenes metszi AB-t egy C_1 pontban, akkor a csoportosíthatósági tétel szerint C_1 előáll A és B súlypontjaként α és β súlyokkal, és ezért $\beta/\alpha = (ABC_1)$. Ha pedig $PC \parallel AB$, akkor csak $\beta/\alpha = -1$ lehetséges (különben létezne C_1).

Súlypont: pontok előállítása súlypontként

Egyértelműség:

Tegyük föl, hogy P-t az α, β és γ súlyokkal állítottuk elő. Ha a súlyok valamelyike 0, akkor a P pont az A, B, C közül már kettőnek a súlypontjaként is előáll. Ez pontosan akkor fordul elő, ha P az AB, BC, CA egyenesek valamelyikére esik. Ilyenkor a két pont esetére vonatkozó tétel egyértelműségi állítása miatt készen vagyunk, így feltehetjük, hogy α, β és γ egyike sem 0.



Tekintsük például a $\beta : \alpha$ arányt. Ha a PC egyenes metszi AB-t egy C_1 pontban, akkor a csoportosíthatósági tétel szerint C_1 előáll A és B súlypontjaként α és β súlyokkal, és ezért $\beta/\alpha = (ABC_1)$. Ha pedig $PC \parallel AB$, akkor csak $\beta/\alpha = -1$ lehetséges (különben létezne C_1).

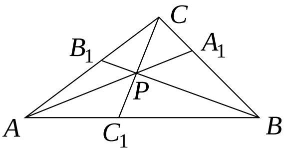
(Megjegyzés: Hasonló tétel érvényes a térben négy nem egy síkban fekvő pontra.)

Súlypont: Ceva tétele

Az előző bizonyítás következménye:

Súlypont: Ceva tétele

Az előző bizonyítás következménye:

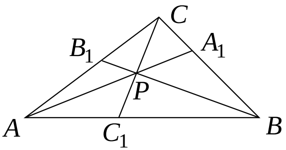


Vegyük föl az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein rendre a csúcsoktól különböző C_1, A_1 és B_1 pontokat. Ha az AA_1, BB_1 és CC_1 egyeneseknek van közös pontja, akkor

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1.$$

Súlypont: Ceva tétele

Az előző bizonyítás következménye:



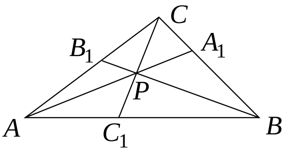
Vegyük föl az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein rendre a csúcsoktól különböző C_1, A_1 és B_1 pontokat. Ha az AA_1, BB_1 és CC_1 egyeneseknek van közös pontja, akkor

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1.$$

Valóban, ha a P közös pontot az A, B, C pontrendszerből az α, β, γ súlyokkal lehet súlypontként előállítani,

Súlypont: Ceva tétele

Az előző bizonyítás következménye:



Vegyük föl az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein rendre a csúcsoktól különböző C_1, A_1 és B_1 pontokat. Ha az AA_1, BB_1 és CC_1 egyeneseknek van közös pontja, akkor

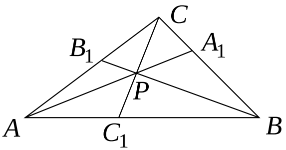
$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1.$$

Valóban, ha a P közös pontot az A, B, C pontrendszerből az α, β, γ súlyokkal lehet súlypontként előállítani, akkor az előzőek szerint

$$(ABC_1) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (BCA_1) = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{és} \quad (CAB_1) = \frac{\alpha}{\gamma},$$

Súlypont: Ceva tétele

Az előző bizonyítás következménye:



Vegyük föl az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein rendre a csúcsoktól különböző C_1, A_1 és B_1 pontokat. Ha az AA_1, BB_1 és CC_1 egyeneseknek van közös pontja, akkor

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1.$$

Valóban, ha a P közös pontot az A, B, C pontrendszerből az α, β, γ súlyokkal lehet súlypontként előállítani, akkor az előzőek szerint

$$(ABC_1) = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (BCA_1) = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{és} \quad (CAB_1) = \frac{\alpha}{\gamma},$$

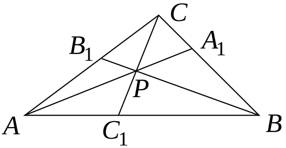
ahonnan az állítás rögtön adódik.

Súlypont: Ceva tétele

Az állítás (részlegesen) meg is fordítható:

Súlypont: Ceva tétele

Az állítás (részlegesen) meg is fordítható:



Ceva tétele

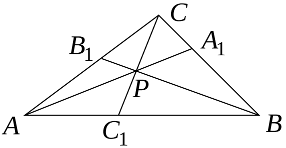
Vegyük föl az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein rendre a csúcsoktól különböző C_1, A_1 és B_1 pontokat. Ezekre

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1$$

akkor és csak akkor teljesül, ha az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy ponton haladnak át, vagy párhuzamosak.

Súlypont: Ceva tétele

Az állítás (részlegesen) meg is fordítható:



Ceva tétele

Vegyük föl az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein rendre a csúcsoktól különböző C_1, A_1 és B_1 pontokat. Ezekre

$$(ABC_1) \cdot (BCA_1) \cdot (CAB_1) = 1$$

akkor és csak akkor teljesül, ha az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy ponton haladnak át, vagy párhuzamosak.

A tétel érdekes irányát az előbb beláttuk; a megfordítás is könnyen meggondolható.

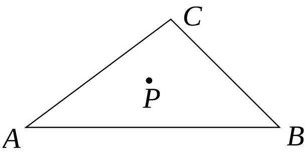
Súlypont: példák

Példák a súlyok meghatározására:

Súlypont: példák

Példák a súlyok meghatározására:

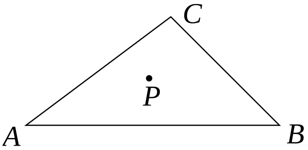
Legyen A, B és C három nem kollineáris pont, és P tetszőleges további pont a síkon.



Súlypont: példák

Példák a súlyok meghatározására:

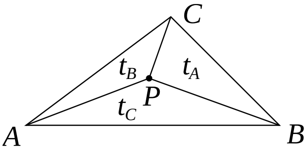
Legyen A, B és C három nem kollineáris pont, és P tetszőleges további pont a síkon. Először tegyük fel, hogy P az ABC háromszög belső pontja.



Súlypont: példák

Példák a súlyok meghatározására:

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont, és P tetszőleges további pont a síkon. Először tegyük fel, hogy P az ABC háromszög belső pontja.

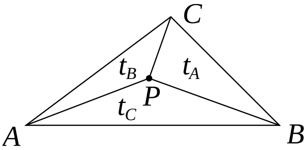


A PA, PB, PC szakaszok a háromszöget a PBC, PCA és PAB részháromszögekre bontják, amelyek területe rendre legyen t_A, t_B, illetve t_C.

Súlypont: példák

Példák a súlyok meghatározására:

Legyen A, B és C három nem kollineáris pont, és P tetszőleges további pont a síkon. Először tegyük fel, hogy P az ABC háromszög belső pontja.



A PA, PB, PC szakaszok a háromszöget a PBC, PCA és PAB részháromszögekre bontják, amelyek területe rendre legyen t_A, t_B, illetve t_C.

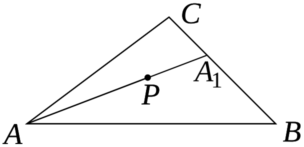
Azt állítjuk hogy ekkor a P pont t_A, t_B, t_C súlyokkal áll elő az A, B, C pontok súlypontjaként.

Súlypont: példák

Tudjuk, hogy P előáll valamilyen α, β, γ súlyokkal súlypontként,

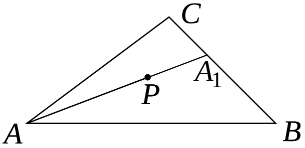
Súlypont: példák

Tudjuk, hogy P előáll valamilyen α, β, γ súlyokkal súlypontként, továbbá P ezeknek a súlyoknak az arányát egyértelműen meghatározza, pl. $\gamma/\beta = (BCA_1)$.



Súlypont: példák

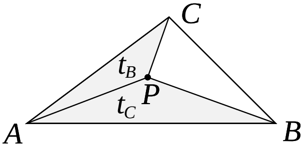
Tudjuk, hogy P előáll valamilyen α, β, γ súlyokkal súlypontként, továbbá P ezeknek a súlyoknak az arányát egyértelműen meghatározza, pl. $\gamma/\beta = (BCA_1)$.



Elegendő tehát azt ellenőrizni, hogy a t_A, t_B, t_C számok egymás közti arányai egyenlők az α, β, γ számokéval.

Súlypont: példák

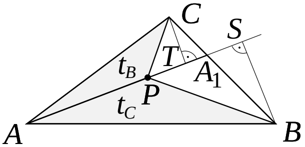
Tudjuk, hogy P előáll valamilyen α, β, γ súlyokkal súlypontként, továbbá P ezeknek a súlyoknak az arányát egyértelműen meghatározza, pl. $\gamma/\beta = (BCA_1)$.



Elegendő tehát azt ellenőrizni, hogy a t_A, t_B, t_C számok egymás közti arányai egyenlők az α, β, γ számokéval. Tekintsük például a t_C/t_B arányt:

Súlypont: példák

Tudjuk, hogy P előáll valamilyen α, β, γ súlyokkal súlypontként, továbbá P ezeknek a súlyoknak az arányát egyértelműen meghatározza, pl. $\gamma/\beta = (BCA_1)$.

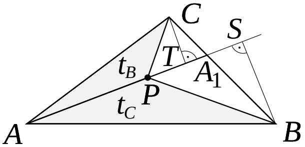


Elegendő tehát azt ellenőrizni, hogy a t_A, t_B, t_C számok egymás közti arányai egyenlők az α, β, γ számokéval. Tekintsük például a t_C/t_B arányt:

Közös (AP) alapú háromszögek területaránya a magasságok arányával egyenlő: $t_C/t_B = BS\big/CT$,

Súlypont: példák

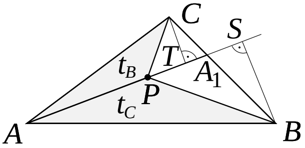
Tudjuk, hogy P előáll valamilyen α, β, γ súlyokkal súlypontként, továbbá P ezeknek a súlyoknak az arányát egyértelműen meghatározza, pl. $\gamma/\beta = (BCA_1)$.



Elegendő tehát azt ellenőrizni, hogy a t_A, t_B, t_C számok egymás közti arányai egyenlők az α, β, γ számokéval. Tekintsük például a t_C/t_B arányt:
Közös (AP) alapú háromszögek területaránya a magasságok arányával egyenlő: $t_C/t_B = BS/CT$, a CTA_1 és BSA_1 háromszögek hasonlósága folytán pedig $BS/CT = BA_1/A_1C$.

Súlypont: példák

Tudjuk, hogy P előáll valamilyen α, β, γ súlyokkal súlypontként, továbbá P ezeknek a súlyoknak az arányát egyértelműen meghatározza, pl. $\gamma/\beta = (BCA_1)$.



Elegendő tehát azt ellenőrizni, hogy a t_A, t_B, t_C számok egymás közti arányai egyenlők az α, β, γ számokéval. Tekintsük például a t_C/t_B arányt:

Közös (AP) alapú háromszögek területaránya a magasságok arányával egyenlő: $t_C/t_B = BS/CT$, a CTA_1 és BSA_1 háromszögek hasonlósága folytán pedig $BS/CT = BA_1/A_1C$.

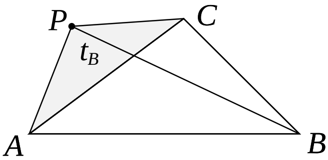
Ezért valóban $t_C/t_B = (BCA_1) = \gamma/\beta$.

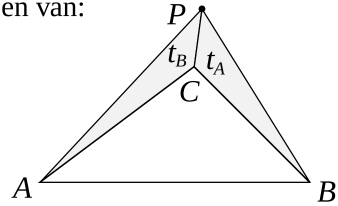
Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:

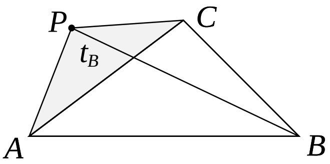


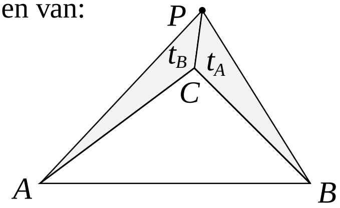


a t_A, t_B, t_C területeket továbbra is úgy értelmezzük, mint a BC, CA, AB szakaszokra támaszkodó, P csúcsú háromszögek területeit,

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:

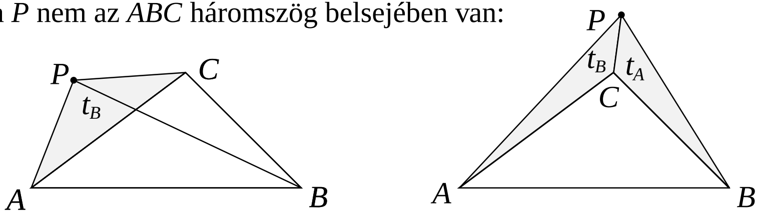




a t_A, t_B, t_C területeket továbbra is úgy értelmezzük, mint a BC, CA, AB szakaszokra támaszkodó, P csúcsú háromszögek területeit, de ezeket most előjelesen kell tekinteni, mégpedig a következőképpen:

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:

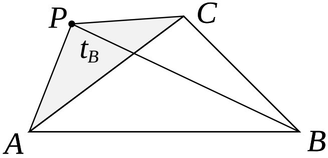


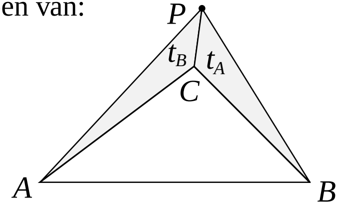
a t_A, t_B, t_C területeket továbbra is úgy értelmezzük, mint a BC, CA, AB szakaszokra támaszkodó, P csúcsú háromszögek területeit, de ezeket most előjelesen kell tekinteni, mégpedig a következőképpen:

Megállapodunk abban, hogy ha P a háromszög valamelyik oldalegyenesének a háromszöget nem tartalmazó oldalára esik, akkor az arra az oldalra támaszkodó területet negatív előjellel látjuk el.

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:





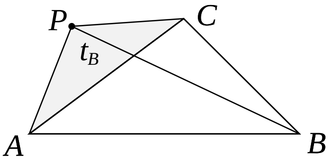
a t_A, t_B, t_C területeket továbbra is úgy értelmezzük, mint a BC, CA, AB szakaszokra támaszkodó, P csúcsú háromszögek területeit, de ezeket most előjelesen kell tekinteni, mégpedig a következőképpen:

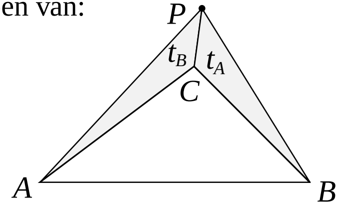
Megállapodunk abban, hogy ha P a háromszög valamelyik oldalegyenesének a háromszöget nem tartalmazó oldalára esik, akkor az arra az oldalra támaszkodó területet negatív előjellel látjuk el.

Az első ábrán például t_B negatív, a másodikon pedig t_A és t_B negatív előjelű.

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:

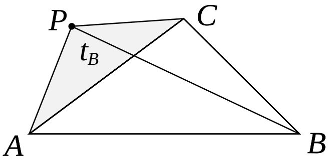


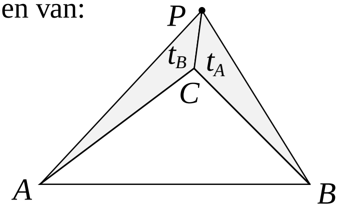


(Észrevehetjük, hogy ezzel az előjel-megállapodással
a $t_A + t_B + t_C$ összeg mindig az ABC háromszög területét adja
a P pont elhelyezkedésétől függetlenül.)

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:

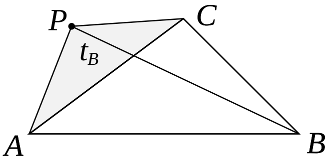


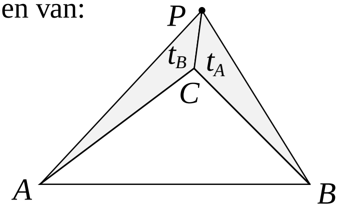


Az előjel-megállapodás következtében a $t_B/t_A = (ABC_1)$, $t_C/t_B = (BCA_1)$, $t_A/t_C = (CAB_1)$ egyenlőségek az előjelüket tekintve is érvényesek.

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:



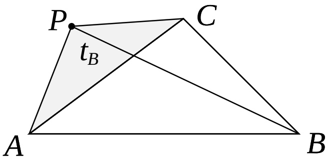


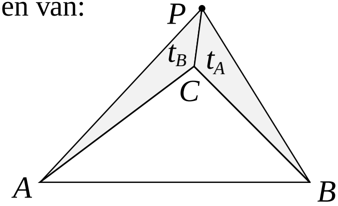
Az előjel-megállapodás következtében a $t_B/t_A = (ABC_1)$, $t_C/t_B = (BCA_1)$, $t_A/t_C = (CAB_1)$ egyenlőségek az előjelüket tekintve is érvényesek.

Tehát ilyenkor is $t_A : t_B : t_C = \alpha : \beta : \gamma$.

Súlypont: példák

Ha P nem az ABC háromszög belsejében van:





Az előjel-megállapodás következtében a $t_B/t_A = (ABC_1)$, $t_C/t_B = (BCA_1)$, $t_A/t_C = (CAB_1)$ egyenlőségek az előjelüket tekintve is érvényesek.
Tehát ilyenkor is $t_A : t_B : t_C = \alpha : \beta : \gamma$.

Az α, β, γ súlyok között a 0 pontosan akkor fordul elő, ha P valamelyik oldalegyenesre esik. Ilyenkor a megfelelő részháromszög is „elfajul”, területe 0.

Súlypont: példák

Nézzük meg, hogy az ABC háromszög néhány nevezetes pontja milyen súlyokkal áll elő a csúcsok súlypontjaként.

Súlypont: példák

Nézzük meg, hogy az ABC háromszög néhány nevezetes pontja milyen súlyokkal áll elő a csúcsok súlypontjaként.

Súlypont: természetesen az 1, 1, 1 súlyok megfelelnek.

Súlypont: példák

Nézzük meg, hogy az ABC háromszög néhány nevezetes pontja milyen súlyokkal áll elő a csúcsok súlypontjaként.

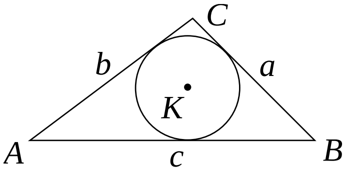
Súlypont: természetesen az 1, 1, 1 súlyok megfelelnek.
(A t_A, t_B, t_C területek ilyenkor valóban egyenlők.)

Súlypont: példák

Nézzük meg, hogy az ABC háromszög néhány nevezetes pontja milyen súlyokkal áll elő a csúcsok súlypontjaként.

Súlypont: természetesen az 1, 1, 1 súlyok megfelelnek.
(A t_A, t_B, t_C területek ilyenkor valóban egyenlők.)

A beírt kör középpontja, K:

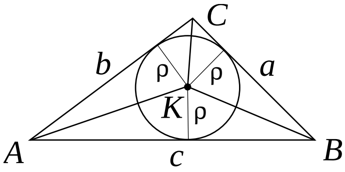


Súlypont: példák

Nézzük meg, hogy az ABC háromszög néhány nevezetes pontja milyen súlyokkal áll elő a csúcsok súlypontjaként.

Súlypont: természetesen az 1, 1, 1 súlyok megfelelnek.
(A t_A, t_B, t_C területek ilyenkor valóban egyenlők.)

A beírt kör középpontja, K:



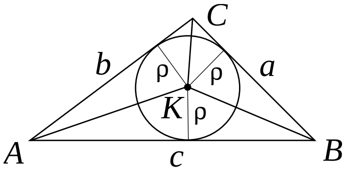
$$t_A = \frac{a \cdot \rho}{2}, \; t_B = \frac{b \cdot \rho}{2}, \; t_C = \frac{c \cdot \rho}{2},$$ ahol ρ a beírt kör sugara.

Súlypont: példák

Nézzük meg, hogy az ABC háromszög néhány nevezetes pontja milyen súlyokkal áll elő a csúcsok súlypontjaként.

Súlypont: természetesen az 1, 1, 1 súlyok megfelelnek. (A t_A, t_B, t_C területek ilyenkor valóban egyenlők.)

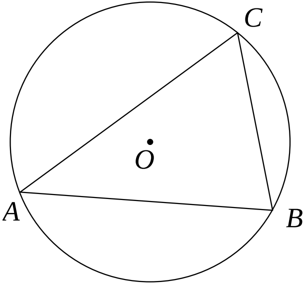
A beírt kör középpontja, K:



$t_A = \dfrac{a \cdot \rho}{2}$, $t_B = \dfrac{b \cdot \rho}{2}$, $t_C = \dfrac{c \cdot \rho}{2}$, ahol ρ a beírt kör sugara. Emiatt a K középpont az a, b, c súlyokkal áll elő A, B és C súlypontjaként.

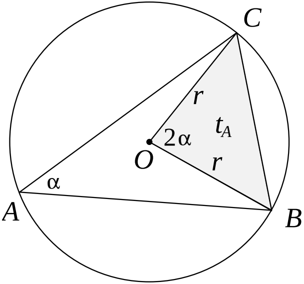
Súlypont: példák

A körülírt kör középpontja, O:



Súlypont: példák

A körülírt kör középpontja, O:

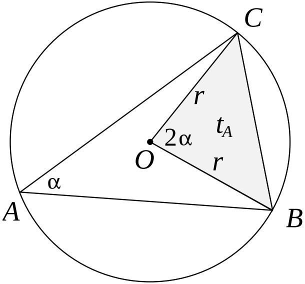


$$t_A = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}, \quad t_B = \frac{r^2 \sin 2\beta}{2}, \quad t_C = \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2},$$

ahol r a körülírt kör sugara.

Súlypont: példák

A körülírt kör középpontja, O:

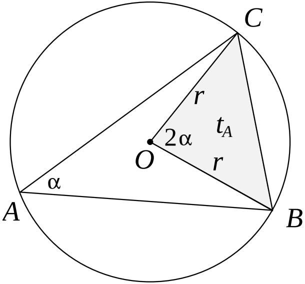


$$t_A = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}, \; t_B = \frac{r^2 \sin 2\beta}{2}, \; t_C = \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2},$$

ahol r a körülírt kör sugara.
(Tompaszögű háromszög esetén az előjelet is beleértve.)

Súlypont: példák

A körülírt kör középpontja, O:



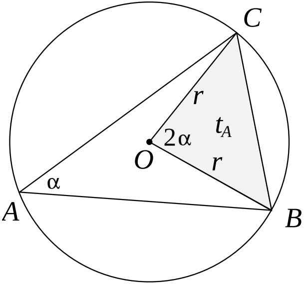
$$t_A = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}, \quad t_B = \frac{r^2 \sin 2\beta}{2}, \quad t_C = \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2},$$

ahol r a körülírt kör sugara.
(Tompaszögű háromszög esetén az előjelet is beleértve.)

Emiatt az O középpont a $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ súlyokkal áll elő A, B és C súlypontjaként.

Súlypont: példák

A körülírt kör középpontja, O:



$$t_A = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}, \quad t_B = \frac{r^2 \sin 2\beta}{2}, \quad t_C = \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2},$$

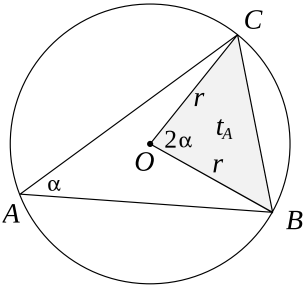
ahol r a körülírt kör sugara.
(Tompaszögű háromszög esetén az előjelet is beleértve.)

Emiatt az O középpont a $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ súlyokkal áll elő A, B és C súlypontjaként.

Magasságpont:

Súlypont: példák

A körülírt kör középpontja, O:



$$t_A = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}, \quad t_B = \frac{r^2 \sin 2\beta}{2}, \quad t_C = \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2},$$

ahol r a körülírt kör sugara.
(Tompaszögű háromszög esetén az előjelet is beleértve.)

Emiatt az O középpont a $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ súlyokkal áll elő A, B és C súlypontjaként.

Magasságpont: könnyen meggondolható (házi feladat), hogy ha a háromszög nem derékszögű, akkor a magasságpontját $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{tg} \gamma$ súlyokkal lehet előállítani.

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Alakzatok egyenletei

Alakzatok egyenletei

Az analitikus geometria a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgálja.

Alakzatok egyenletei

Az analitikus geometria a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgálja.

Mit értünk ezen?

Alakzatok egyenletei

Az analitikus geometria a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgálja.

Mit értünk ezen?

Egyenlet (térben):

Alakzatok egyenletei

Az analitikus geometria a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgálja.

Mit értünk ezen?

Egyenlet (térben): $F(x, y, z) = 0$, ahol F háromváltozós valós függvény.

Alakzatok egyenletei

Az analitikus geometria a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgálja.

Mit értünk ezen?

Egyenlet (térben): $F(x, y, z) = 0$, ahol F háromváltozós valós függvény.

(Síkban: $F(x, y) = 0$, ahol F kétváltozós, illetve egyenesen: $F(x) = 0$, ahol F egyváltozós.)

Alakzatok egyenletei

Az analitikus geometria a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgálja.

Mit értünk ezen?

Egyenlet (térben): $F(x, y, z) = 0$, ahol F háromváltozós valós függvény.

(Síkban: $F(x, y) = 0$, ahol F kétváltozós, illetve egyenesen: $F(x) = 0$, ahol F egyváltozós.)

Azt mondjuk, hogy ez az egyenlet valamely $H \subseteq \mathbb{R}^3$ térbeli alakzat (ponthalmaz) egyenlete,

Alakzatok egyenletei

Az analitikus geometria a geometriai alakzatokat egyenleteik segítségével vizsgálja.

Mit értünk ezen?

Egyenlet (térben): $F(x, y, z) = 0$, ahol F háromváltozós valós függvény.

(Síkban: $F(x, y) = 0$, ahol F kétváltozós, illetve egyenesen: $F(x) = 0$, ahol F egyváltozós.)

Azt mondjuk, hogy ez az egyenlet valamely $H \subseteq \mathbb{R}^3$ térbeli alakzat (ponthalmaz) egyenlete, ha

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\right\},$$

azaz H pontosan azokból a térbeli pontokból áll, amelyek x, y, z koordinátáira az $F(x, y, z) = 0$ egyenlőség teljesül.

Egyenletek

Példa:

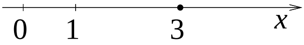
Egyenletek

Példa: $2x = 6$ minek az egyenlete?

Egyenletek

Példa: $2x = 6$ minek az egyenlete?
Válasz:

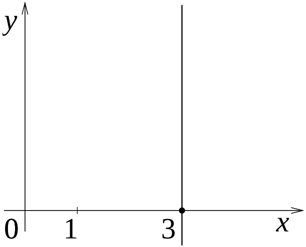
- pont ($x = 3$), ha az egyenesen vagyunk,



Egyenletek

Példa: $2x = 6$ minek az egyenlete?
Válasz:

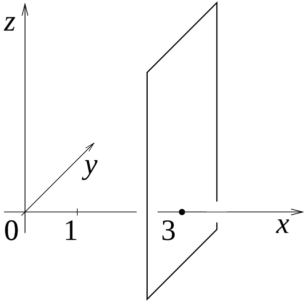
- pont ($x = 3$), ha az egyenesen vagyunk,
- egyenes (az y-tengellyel párhuzamos), ha a síkban vagyunk,



Egyenletek

Példa: $2x = 6$ minek az egyenlete?
Válasz:

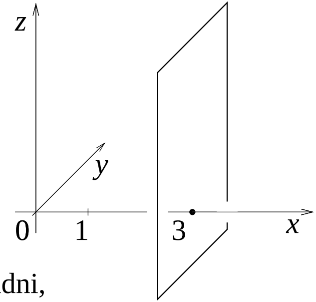
- pont ($x = 3$), ha az egyenesen vagyunk,
- egyenes (az y-tengellyel párhuzamos), ha a síkban vagyunk,
- sík (az yz-síkkal párhuzamos), ha a térben vagyunk.



Egyenletek

Példa: $2x = 6$ minek az egyenlete?
Válasz:

- pont ($x = 3$), ha az egyenesen vagyunk,
- egyenes (az y-tengellyel párhuzamos), ha a síkban vagyunk,
- sík (az yz-síkkal párhuzamos), ha a térben vagyunk.

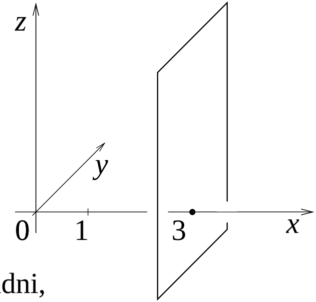


Tanulság: az egyenlettel együtt azt is meg kell adni, hogy hol értelmezzük.

Egyenletek

Példa: $2x = 6$ minek az egyenlete?
Válasz:

- pont ($x = 3$), ha az egyenesen vagyunk,
- egyenes (az y-tengellyel párhuzamos), ha a síkban vagyunk,
- sík (az yz-síkkal párhuzamos), ha a térben vagyunk.



Tanulság: az egyenlettel együtt azt is meg kell adni, hogy hol értelmezzük.

Megjegyzés:
Találkozunk majd egyenletrendszerekkel és ún. paraméteres egyenletrendszerekkel is, ezeket konkrét példákon keresztül ismerjük majd meg.

Egyenletek

A legalapvetőbb geometriai jellegű kérdések egyenletekkel és egyenletrendszerekkel kapcsolatban:

Egyenletek

A legalapvetőbb geometriai jellegű kérdések egyenletekkel és egyenletrendszerekkel kapcsolatban:

- Hogyan írjuk föl valamely adott geometriai alakzat egyenletét?

Egyenletek

A legalapvetőbb geometriai jellegű kérdések egyenletekkel és egyenletrendszerekkel kapcsolatban:

- Hogyan írjuk föl valamely adott geometriai alakzat egyenletét?
- Hogyan ismerjük föl, hogy valamely egyenlet milyen geometriai alakzat egyenlete?

Egyenletek

A legalapvetőbb geometriai jellegű kérdések egyenletekkel és egyenletrendszerekkel kapcsolatban:

- Hogyan írjuk föl valamely adott geometriai alakzat egyenletét?
- Hogyan ismerjük föl, hogy valamely egyenlet milyen geometriai alakzat egyenlete?
- Tudunk-e összefüggést találni az egyenletben szereplő függvények algebrai alakja és az egyenlettel megadott alakzat geometriai típusa között?

Egyenletek

A legalapvetőbb geometriai jellegű kérdések egyenletekkel és egyenletrendszerekkel kapcsolatban:

- Hogyan írjuk föl valamely adott geometriai alakzat egyenletét?
- Hogyan ismerjük föl, hogy valamely egyenlet milyen geometriai alakzat egyenlete?
- Tudunk-e összefüggést találni az egyenletben szereplő függvények algebrai alakja és az egyenlettel megadott alakzat geometriai típusa között?
- Hogyan módosul az egyenlet, ha az alakzaton valamilyen geometriai transzformációt hajtunk végre?

Egyenletek

A legalapvetőbb geometriai jellegű kérdések egyenletekkel és egyenletrendszerekkel kapcsolatban:

- Hogyan írjuk föl valamely adott geometriai alakzat egyenletét?
- Hogyan ismerjük föl, hogy valamely egyenlet milyen geometriai alakzat egyenlete?
- Tudunk-e összefüggést találni az egyenletben szereplő függvények algebrai alakja és az egyenlettel megadott alakzat geometriai típusa között?
- Hogyan módosul az egyenlet, ha az alakzaton valamilyen geometriai transzformációt hajtunk végre?

Ezeket a kérdéseket fogjuk vizsgálni a legegyszerűbb alakzatok (egyenesek, síkok, körök, stb.) esetében.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest megadhatunk egy pont és egy irányvektor rögzítésével.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest megadhatunk egy pont és egy irányvektor rögzítésével.

Definíció

Az e egyenesnek (akár síkban, akár térben) a $\mathbf{v}$ vektor irányvektora, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \parallel e$.

Adott ponton át adott irányvektorral egy és csak egy egyenes található.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest megadhatunk egy pont és egy irányvektor rögzítésével.

Definíció

Az e egyenesnek (akár síkban, akár térben) a $\mathbf{v}$ vektor irányvektora, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \parallel e$.

Adott ponton át adott irányvektorral egy és csak egy egyenes található.

Az egyenes az irányvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest megadhatunk egy pont és egy irányvektor rögzítésével.

Definíció

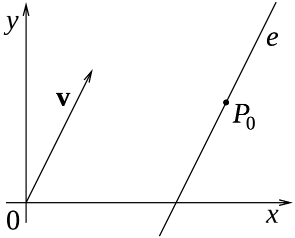
Az e egyenesnek (akár síkban, akár térben) a $\mathbf{v}$ vektor irányvektora, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} \parallel e$.

Adott ponton át adott irányvektorral egy és csak egy egyenes található.

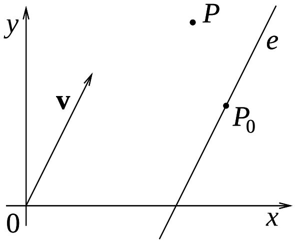
Az egyenes az irányvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

Legyen adott az e egyenes, $P_0 \in e$ és legyen $\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Egyenletek: egyenes síkban

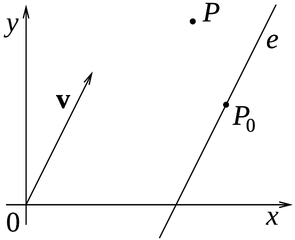


Egyenletek: egyenes síkban



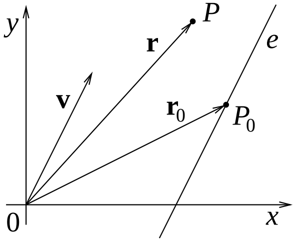
Legyen P a sík tetszőleges pontja,

Egyenletek: egyenes síkban



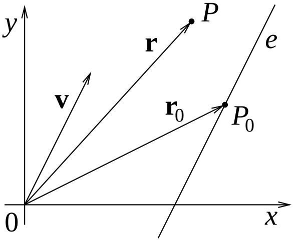
Legyen P a sík tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.

Egyenletek: egyenes síkban



Legyen P a sík tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

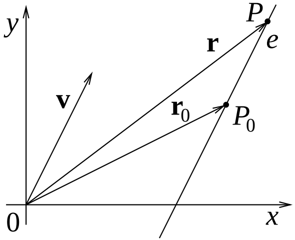
Egyenletek: egyenes síkban



Legyen P a sík tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$P \in e \iff \overrightarrow{P_0P} \parallel e$$

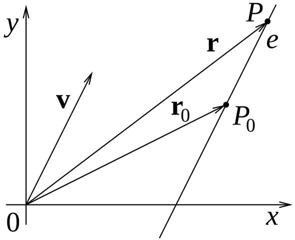
Egyenletek: egyenes síkban



Legyen P a sík tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \end{aligned}$$

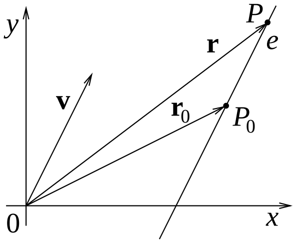
Egyenletek: egyenes síkban



Legyen P a sík tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \\ &\iff \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \text{hogy } \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}, \end{aligned}$$

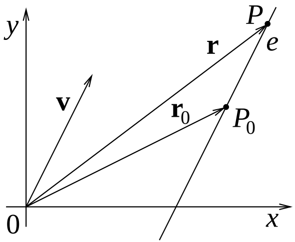
Egyenletek: egyenes síkban



Legyen P a sík tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \\ &\iff \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \text{hogy } \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v},\ \text{azaz } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Egyenletek: egyenes síkban

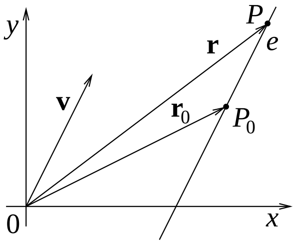


Legyen P a sík tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \\ &\iff \quad \exists t \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}, \text{ azaz } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}. \end{aligned}$$

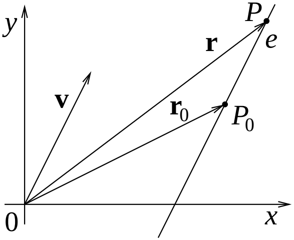
Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletet
az e egyenes paraméteres vektoregyenletének nevezzük.

Egyenletek: egyenes síkban



Koordinátákkal:

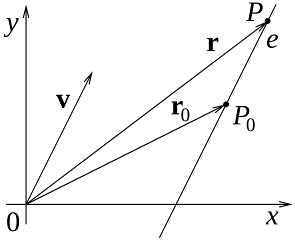
Egyenletek: egyenes síkban



Koordinátákkal:

legyen $\mathbf{v} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$,

Egyenletek: egyenes síkban

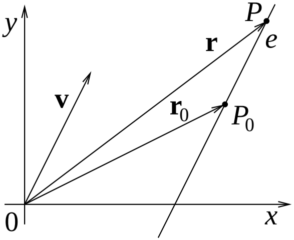


Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$,
ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk;

Egyenletek: egyenes síkban



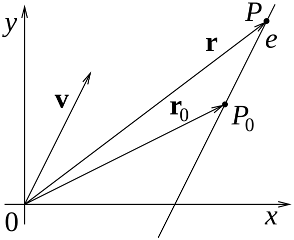
Koordinátákkal:

legyen $\mathbf{v} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e paraméteres egyenletrendszere.

Egyenletek: egyenes síkban



Koordinátákkal:

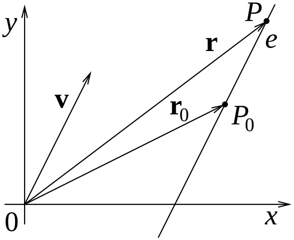
legyen $\mathbf{v} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e paraméteres egyenletrendszere.

Megjegyzés:

Egyenletek: egyenes síkban



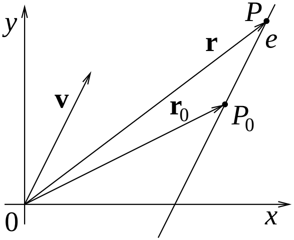
Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$,
ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e paraméteres egyenletrendszere.

Megjegyzés:
A t paramétert az idő múlását mérő változónak szokás tekinteni, ezáltal a paraméteres egyenletrendszer egy pontnak az időben lezajló mozgását írja le.

Egyenletek: egyenes síkban



Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e paraméteres egyenletrendszere.

Megjegyzés:
A t paramétert az idő múlását mérő változónak szokás tekinteni, ezáltal a paraméteres egyenletrendszer egy pontnak az időben lezajló mozgását írja le.
Az egyenes számára most megtalált paraméteres egyenletrendszer a síkbeli egyenesvonalú egyenletes mozgás egyenletrendszere.

Egyenletek: egyenes síkban

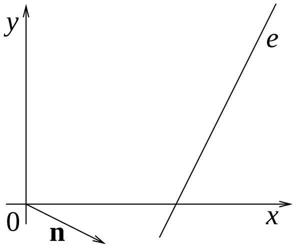
A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Definíció

A síkbeli e egyenesnek az $\mathbf{n}$ síkbeli vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp e$.

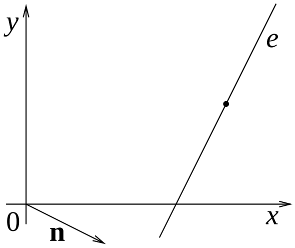


Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Definíció

A síkbeli e egyenesnek az $\mathbf{n}$ síkbeli vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp e$.



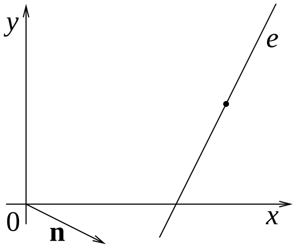
A síkban adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy egyenes található.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Definíció

A síkbeli e egyenesnek az $\mathbf{n}$ síkbeli vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp e$.



A síkban adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy egyenes található.

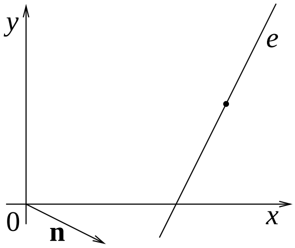
Az egyenes a normálvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Definíció

A síkbeli e egyenesnek az $\mathbf{n}$ síkbeli vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp e$.



A síkban adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy egyenes található.

Az egyenes a normálvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

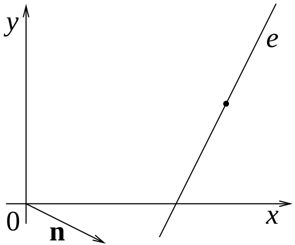
Irányvektorból normálvektort, normálvektorból irányvektort kapunk 90°-os elforgatással.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Definíció

A síkbeli e egyenesnek az $\mathbf{n}$ síkbeli vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp e$.



A síkban adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy egyenes található.

Az egyenes a normálvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

Irányvektorból normálvektort, normálvektorból irányvektort kapunk 90°-os elforgatással.

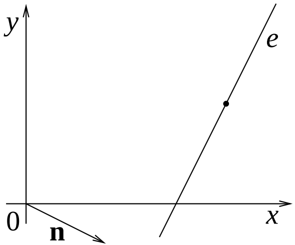
Fontos megjegyzés:

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Definíció

A síkbeli e egyenesnek az $\mathbf{n}$ síkbeli vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp e$.



A síkban adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy egyenes található.

Az egyenes a normálvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

Irányvektorból normálvektort, normálvektorból irányvektort kapunk 90°-os elforgatással.

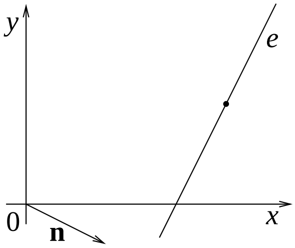
Fontos megjegyzés:
A fentiek csak síkbeli egyenesekre érvényesek.

Egyenletek: egyenes síkban

A síkban egy egyenest egy pont és egy normálvektor rögzítésével is megadhatunk.

Definíció

A síkbeli e egyenesnek az $\mathbf{n}$ síkbeli vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp e$.



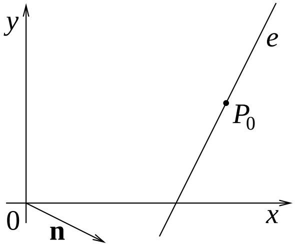
A síkban adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy egyenes található.

Az egyenes a normálvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

Irányvektorból normálvektort, normálvektorból irányvektort kapunk 90°-os elforgatással.

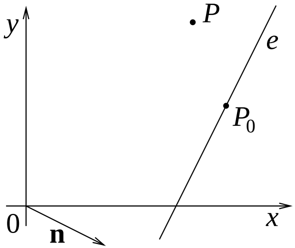
Fontos megjegyzés:
A fentiek csak síkbeli egyenesekre érvényesek.
Térben az egyeneseknek nincs normálvektora.

Egyenletek: egyenes síkban



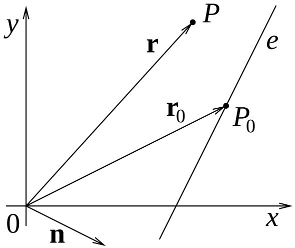
Legyen adott a síkban az e egyenes, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora.

Egyenletek: egyenes síkban



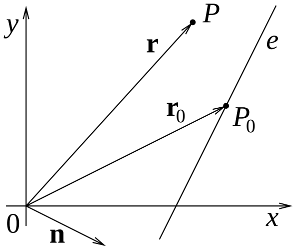
Legyen adott a síkban az e egyenes, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora. Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a sík valamely P pontjára $P \in e$.

Egyenletek: egyenes síkban



Legyen adott a síkban az e egyenes, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora.
Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a sík valamely P pontjára $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

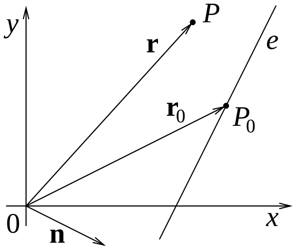
Egyenletek: egyenes síkban



Legyen adott a síkban az e egyenes, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora.
Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a sík valamely P pontjára $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$P \in e \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e$$

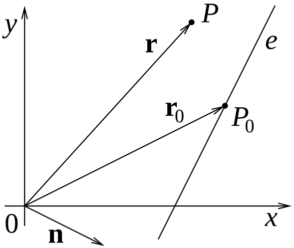
Egyenletek: egyenes síkban



Legyen adott a síkban az e egyenes, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora.
Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a sík valamely P pontjára $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$
\begin{aligned}
P \in e \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n}
\end{aligned}
$$

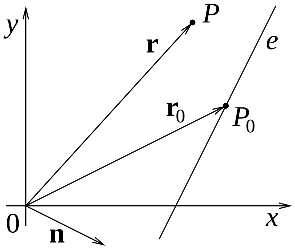
Egyenletek: egyenes síkban



Legyen adott a síkban az e egyenes, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora.
Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a sík valamely P pontjára $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\ &\iff \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Egyenletek: egyenes síkban



Legyen adott a síkban az e egyenes, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora.
Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a sík valamely P pontjára $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$
\begin{aligned}
P \in e \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\
&\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\
&\iff \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0
\end{aligned}
$$

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ egyenlet az e egyenes vektoregyenlete.

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

legyen $\mathbf{n} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$,

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

legyen $\mathbf{n}=(a,b)$, $P_0=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$, ekkor az

$$a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0$$

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

legyen $\mathbf{n} = (a, b)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, ekkor az

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0 \\ ax + by + c &= 0 \qquad (\text{ahol } c = -ax_0 - by_0) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk;

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

legyen $\mathbf{n}=(a,b)$, $P_0=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$, ekkor az

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0) &= 0 \\ ax+by+c &= 0 \qquad (\text{ahol } c=-ax_0-by_0) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk; ez az e egyenes egyenlete.

Észrevételek:

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

legyen $\mathbf{n}=(a,b)$, $P_0=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$, ekkor az

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0) &= 0 \\ ax+by+c &= 0 \qquad (\text{ahol } c=-ax_0-by_0) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk; ez az e egyenes egyenlete.

Észrevételek:
1. Az $ax+by+c=0$ egyenletből közvetlenül leolvasható
az egyenes egy normálvektora:

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

legyen $\mathbf{n}=(a,b)$, $P_0=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$, ekkor az

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0) &= 0 \\ ax+by+c &= 0 \qquad (\text{ahol } c=-ax_0-by_0) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk; ez az e egyenes egyenlete.

Észrevételek:
1. Az $ax+by+c=0$ egyenletből közvetlenül leolvasható az egyenes egy normálvektora: x és y együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.

Egyenletek: egyenes síkban

Az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ vektoregyenlet koordinátákkal felírva:

legyen $\mathbf{n}=(a,b)$, $P_0=(x_0,y_0)$, $P=(x,y)$, ekkor az

$$\begin{aligned} a(x-x_0)+b(y-y_0) &= 0 \\ ax+by+c &= 0 \qquad (\text{ahol } c=-ax_0-by_0) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk; ez az e egyenes egyenlete.

Észrevételek:
1. Az $ax+by+c=0$ egyenletből közvetlenül leolvasható az egyenes egy normálvektora: x és y együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.
2. Az $ax+by+c=0$ képlet az egyenesek egyenletének „általános alakja” a síkban (inhomogén lineáris egyenlet).

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete.

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, síkon a bármely $ax + by + c = 0$ alakú egyenlet, ahol a és b nem mindkettő zérus, valamilyen egyenes egyenlete.

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, síkon a bármely $ax + by + c = 0$ alakú egyenlet, ahol a és b nem mindkettő zérus, valamilyen egyenes egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk azzal, ahogyan az egyenletet felírtuk;

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, síkon a bármely $ax + by + c = 0$ alakú egyenlet, ahol a és b nem mindkettő zérus, valamilyen egyenes egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk azzal, ahogyan az egyenletet felírtuk; a másodikhoz pedig

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, síkon a bármely $ax + by + c = 0$ alakú egyenlet, ahol a és b nem mindkettő zérus, valamilyen egyenes egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk azzal, ahogyan az egyenletet felírtuk; a másodikhoz pedig tekinthetjük az (a, b) normálvektorral

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, síkon a bármely $ax + by + c = 0$ alakú egyenlet, ahol a és b nem mindkettő zérus, valamilyen egyenes egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk azzal, ahogyan az egyenletet felírtuk;

a másodikhoz pedig tekinthetjük az (a, b) normálvektorral és az egyenlet egy tetszőleges (x_0, y_0) megoldásával mint ponttal megadott egyenest.

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, síkon a bármely $ax + by + c = 0$ alakú egyenlet, ahol a és b nem mindkettő zérus, valamilyen egyenes egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk azzal, ahogyan az egyenletet felírtuk; a másodikhoz pedig tekinthetjük az (a, b) normálvektorral és az egyenlet egy tetszőleges (x_0, y_0) megoldásával mint ponttal megadott egyenest.

Tömören úgy fogalmazhatunk, hogy

Egyenletek: egyenes síkban

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A síkon bármely egyenesnek van $ax + by + c = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, síkon a bármely $ax + by + c = 0$ alakú egyenlet, ahol a és b nem mindkettő zérus, valamilyen egyenes egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk azzal, ahogyan az egyenletet felírtuk; a másodikhoz pedig tekinthetjük az (a, b) normálvektorral és az egyenlet egy tetszőleges (x_0, y_0) megoldásával mint ponttal megadott egyenest.

Tömören úgy fogalmazhatunk, hogy a síkon az egyenesek pontosan az inhomogén elsőfokú egyenletekkel leírható alakzatok.

Egyenletek: egyenes térben

Egyenletek: egyenes térben

Legyen adott az e egyenes a térben, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Egyenletek: egyenes térben

Legyen adott az e egyenes a térben, $P_0 \in e$, és legyen
$\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Legyen P a tér tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.

Egyenletek: egyenes térben

Legyen adott az e egyenes a térben, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Legyen P a tér tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

Egyenletek: egyenes térben

Legyen adott az e egyenes a térben, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Legyen P a tér tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$
\begin{aligned}
P \in e \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\
&\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \\
&\iff \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \text{hogy } \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v},\ \text{azaz } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

Egyenletek: egyenes térben

Legyen adott az e egyenes a térben, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Legyen P a tér tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \\ &\iff \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \text{hogy } \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v},\ \text{azaz } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletet az e egyenes paraméteres vektoregyenletének nevezzük.

Egyenletek: egyenes térben

Legyen adott az e egyenes a térben, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Legyen P a tér tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \text{hogy } \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v},\ \text{azaz } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletet az e egyenes paraméteres vektoregyenletének nevezzük.
(Észrevétel:

Egyenletek: egyenes térben

Legyen adott az e egyenes a térben, $P_0 \in e$, és legyen $\mathbf{v}$ az e irányvektora.

Legyen P a tér tetszőleges pontja, keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy $P \in e$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in e \quad & \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel e \\ & \Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{v} \\ & \Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R},\ \text{hogy } \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v},\ \text{azaz } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenletet az e egyenes paraméteres vektoregyenletének nevezzük.
(Észrevétel: az egyenes térbeli paraméteres vektoregyenletének a származtatása semmiben sem különbözik a síkbeli esettől.)

Egyenletek: egyenes térben

Koordinátákkal:

Egyenletek: egyenes térben

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$,

Egyenletek: egyenes térben

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$,
ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ paraméteres vektoregyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk;

Egyenletek: egyenes térben

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$,
ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ paraméteres vektoregyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Egyenletek: egyenes térben

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$,
ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ paraméteres vektoregyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Megjegyzések:

Egyenletek: egyenes térben

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$,
ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ paraméteres vektoregyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Megjegyzések:
1. A paraméteres egyenletrendszerből rögtön leolvasható a szóban forgó egyenes egy pontja és egy irányvektora.

Egyenletek: egyenes térben

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{v} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$,
ekkor az $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ paraméteres vektoregyenletből az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Megjegyzések:
1. A paraméteres egyenletrendszerből rögtön leolvasható a szóban forgó egyenes egy pontja és egy irányvektora.
2. A t paramétert időváltozónak tekintve a térbeli egyenesvonalú egyenletes mozgás egyenletrendszerét kaptuk.

Egyenletek: egyenes térben

Az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve

Egyenletek: egyenes térben

Az
$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$
egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
egyenletrendszerhez jutunk;

Egyenletek: egyenes térben

Az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes szimmetrikus egyenletrendszere.

Egyenletek: egyenes térben

Az

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes szimmetrikus egyenletrendszere.

Megjegyzések:

Egyenletek: egyenes térben

Az
$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$
egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes szimmetrikus egyenletrendszere.

Megjegyzések: 1. a, b, c, x_0, y_0, z_0 itt is rögtön leolvashatók.

Egyenletek: egyenes térben

Az
$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes szimmetrikus egyenletrendszere.

Megjegyzések: 1. a, b, c, x_0, y_0, z_0 itt is rögtön leolvashatók.
2. A kiküszöbölési eljárás nem hajtható végre, ha egy vagy két egyenletben t együtthatója 0,

Egyenletek: egyenes térben

Az
$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes szimmetrikus egyenletrendszere.

Megjegyzések: 1. a, b, c, x_0, y_0, z_0 itt is rögtön leolvashatók.
2. A kiküszöbölési eljárás nem hajtható végre, ha egy vagy két egyenletben t együtthatója 0, azaz ha az irányvektornak egy vagy két koordinátája 0.

Egyenletek: egyenes térben

Az
$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$
egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes szimmetrikus egyenletrendszere.

Megjegyzések: 1. a, b, c, x_0, y_0, z_0 itt is rögtön leolvashatók.
2. A kiküszöbölési eljárás nem hajtható végre, ha egy vagy két egyenletben t együtthatója 0, azaz ha az irányvektornak egy vagy két koordinátája 0. Ha például $a = 0$ (és $b, c \neq 0$), akkor a szimmetrikus egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

Egyenletek: egyenes térben

Az
$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$
egyenletrendszerből a t paramétert kiküszöbölve az
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
egyenletrendszerhez jutunk; ez az e egyenes szimmetrikus egyenletrendszere.

Megjegyzések: 1. a, b, c, x_0, y_0, z_0 itt is rögtön leolvashatók.
2. A kiküszöbölési eljárás nem hajtható végre, ha egy vagy két egyenletben t együtthatója 0, azaz ha az irányvektornak egy vagy két koordinátája 0. Ha például $a = 0$ (és $b, c \neq 0$), akkor a szimmetrikus egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:
$$x = x_0 \,, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Egyenletek: sík a térben

Egyenletek: sík a térben

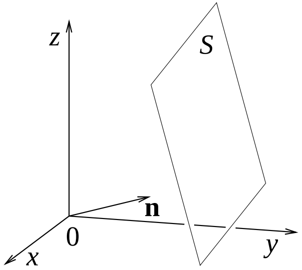
A térben egy síkot megadhatunk egy pont és egy normálvektor rögzítésével.

Egyenletek: sík a térben

A térben egy síkot megadhatunk egy pont és egy normálvektor rögzítésével.

Definíció

Az S síknak az $\mathbf{n}$ vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp S$.

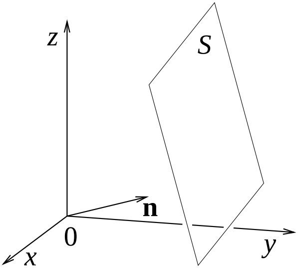


Egyenletek: sík a térben

A térben egy síkot megadhatunk egy pont és egy normálvektor rögzítésével.

Definíció

Az S síknak az $\mathbf{n}$ vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp S$.



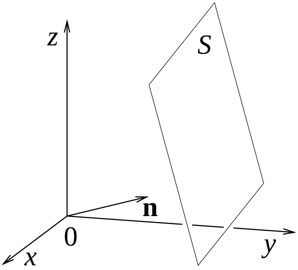
A térben adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy sík található.

Egyenletek: sík a térben

A térben egy síkot megadhatunk egy pont és egy normálvektor rögzítésével.

Definíció

Az S síknak az $\mathbf{n}$ vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp S$.



A térben adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy sík található.

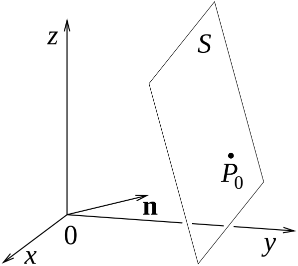
A sík a normálvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

Egyenletek: sík a térben

A térben egy síkot megadhatunk egy pont és egy normálvektor rögzítésével.

Definíció

Az S síknak az $\mathbf{n}$ vektor normálvektora, ha $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{n} \perp S$.

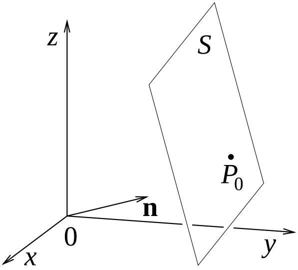


A térben adott ponton át adott normálvektorral egy és csak egy sík található.

A sík a normálvektorát csak nemzérus skalárszorzó erejéig határozza meg.

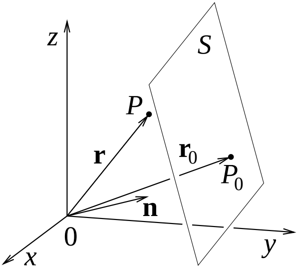
Legyen adott az S sík, $P_0 \in S$, és legyen $\mathbf{n}$ az S normálvektora.

Egyenletek: sík a térben



Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.

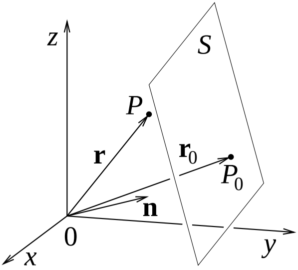
Egyenletek: sík a térben



Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.

Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

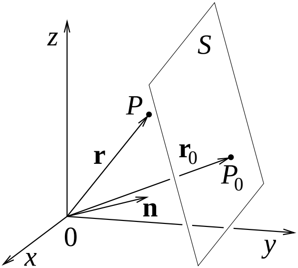
Egyenletek: sík a térben



Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel S \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Egyenletek: sík a térben

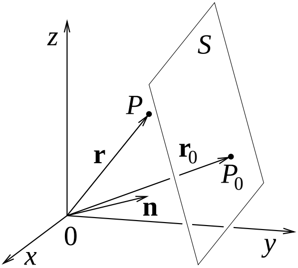


Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel S \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ egyenlet az S sík vektoregyenlete.

Egyenletek: sík a térben



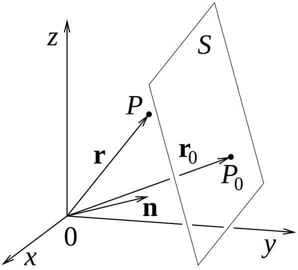
Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel S \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\ &\iff \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ egyenlet az S sík vektoregyenlete.

Koordinátákkal:

Egyenletek: sík a térben



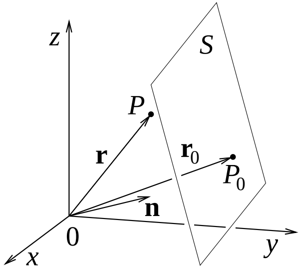
Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel S \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ egyenlet az S sík vektoregyenlete.

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$,

Egyenletek: sík a térben



Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel S \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\ &\iff \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

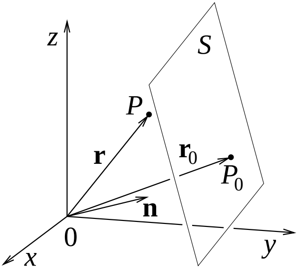
Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ egyenlet az S sík vektoregyenlete.

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$, ekkor az

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ ax + by + cz + d &= 0 \\ (\text{ahol } d &= -ax_0 - by_0 - cz_0) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk;

Egyenletek: sík a térben



Keressünk egyenletté alakítható feltételt arra, hogy a tér valamely P pontjára $P \in S$.
Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ekkor:

$$\begin{aligned} P \in S \quad &\iff \quad \overrightarrow{P_0P} \parallel S \\ &\iff \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \perp \mathbf{n} \\ &\iff \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ egyenlet az S sík vektoregyenlete.

Koordinátákkal:
legyen $\mathbf{n} = (a, b, c)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$, ekkor az

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ ax + by + cz + d &= 0 \\ (\text{ahol } d &= -ax_0 - by_0 - cz_0) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk; ez az S sík egyenlete.

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora:

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora: x, y és z együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora: x, y és z együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.

2. Az $ax + by + cz + d = 0$ képlet a síkok egyenletének „általános alakja” (inhomogén lineáris egyenlet).

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora: x, y és z együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.

2. Az $ax + by + cz + d = 0$ képlet a síkok egyenletének „általános alakja” (inhomogén lineáris egyenlet).

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:
1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora: x, y és z együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.
2. Az $ax + by + cz + d = 0$ képlet a síkok egyenletének „általános alakja" (inhomogén lineáris egyenlet).
Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A térben bármely síknak van $ax + by + cz + d = 0$ alakú egyenlete.

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora: x, y és z együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.
2. Az $ax + by + cz + d = 0$ képlet a síkok egyenletének „általános alakja” (inhomogén lineáris egyenlet).

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A térben bármely síknak van $ax + by + cz + d = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, bármely $ax + by + cz + d = 0$ alakú egyenlet, ahol a, b és c nem mind zérus, valamilyen sík egyenlete.

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora: x, y és z együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.
2. Az $ax + by + cz + d = 0$ képlet a síkok egyenletének „általános alakja” (inhomogén lineáris egyenlet).

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A térben bármely síknak van $ax + by + cz + d = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, bármely $ax + by + cz + d = 0$ alakú egyenlet, ahol a, b és c nem mind zérus, valamilyen sík egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk az egyenlet felírásával;

Egyenletek: sík a térben

Észrevételek:

1. Az $ax + by + cz + d = 0$ egyenletből közvetlenül leolvasható a sík egy normálvektora: x, y és z együtthatói éppen a normálvektor koordinátái.

2. Az $ax + by + cz + d = 0$ képlet a síkok egyenletének „általános alakja” (inhomogén lineáris egyenlet).

Ezt az észrevételt teszi pontossá az alábbi tétel.

Tétel

A térben bármely síknak van $ax + by + cz + d = 0$ alakú egyenlete. Megfordítva, bármely $ax + by + cz + d = 0$ alakú egyenlet, ahol a, b és c nem mind zérus, valamilyen sík egyenlete.

Valóban, az első állítást beláttuk az egyenlet felírásával; a másodikhoz pedig az (a, b, c) normálvektorral és az egyenlet egy tetszőleges (x_0, y_0, z_0) megoldásával mint ponttal megadott síkot kell tekinteni.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük,

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Bármely síknak pontosan két normálegyenlete van,

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Bármely síknak pontosan két normálegyenlete van, ezek egymás (-1)-szeresei.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Bármely síknak pontosan két normálegyenlete van, ezek egymás (-1)-szeresei. Tetszőleges $ax + by + cz + d = 0$ síkegyenletből normálegyenlethez jutunk

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Bármely síknak pontosan két normálegyenlete van, ezek egymás (-1)-szeresei. Tetszőleges $ax + by + cz + d = 0$ síkegyenletből normálegyenlethez jutunk, ha $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$-tel, azaz a normálvektor hosszával osztjuk.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Bármely síknak pontosan két normálegyenlete van, ezek egymás (-1)-szeresei. Tetszőleges $ax + by + cz + d = 0$ síkegyenletből normálegyenlethez jutunk, ha $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$-tel, azaz a normálvektor hosszával osztjuk.

A normálegyenlet felhasználása:

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Bármely síknak pontosan két normálegyenlete van, ezek egymás (-1)-szeresei. Tetszőleges $ax + by + cz + d = 0$ síkegyenletből normálegyenlethez jutunk, ha $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$-tel, azaz a normálvektor hosszával osztjuk.

A normálegyenlet felhasználása:

Legyen $ax + by + cz + d = 0$ az S sík normálegyenlete. A tér tetszőleges $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pontjának az S síktól mért előjeles távolságát kapjuk, ha P_1 koordinátáit behelyettesítjük a normálegyenlet bal oldalába.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Definíció

A sík $ax + by + cz + d = 0$ egyenletét normálegyenletnek nevezzük, ha $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, azaz ha a normálvektor egységvektor.

Bármely síknak pontosan két normálegyenlete van, ezek egymás (-1)-szeresei. Tetszőleges $ax + by + cz + d = 0$ síkegyenletből normálegyenlethez jutunk, ha $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$-tel, azaz a normálvektor hosszával osztjuk.

A normálegyenlet felhasználása:

Legyen $ax + by + cz + d = 0$ az S sík normálegyenlete. A tér tetszőleges $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pontjának az S síktól mért előjeles távolságát kapjuk, ha P_1 koordinátáit behelyettesítjük a normálegyenlet bal oldalába. Képlettel: $d(P_1, S) = \left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|$

Egyenletek: sík normálegyenlete

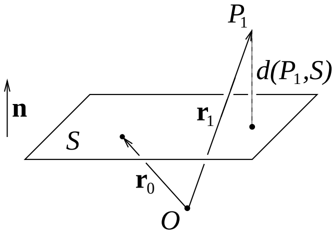
Tétel

$$d(P_1, S) = \left| ax_1 + by_1 + cz_1 + d \right|$$

Egyenletek: sík normálegyenlete

Tétel

$$d(P_1, S) = |ax_1 + by_1 + cz_1 + d|$$

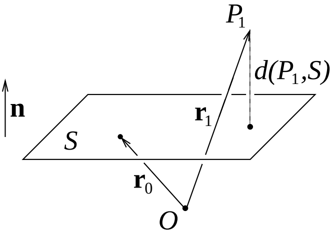


Valóban, legyen $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a P_1 pont helyvektora, és legyen a normálegyenlet vektoros alakja $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Tétel

$$d(P_1, S) = \left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|$$

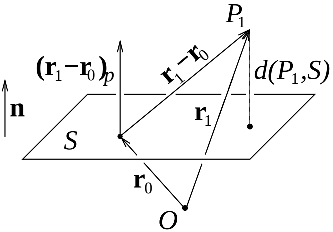


Valóban, legyen $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a P_1 pont helyvektora, és legyen a normálegyenlet vektoros alakja $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$. A behelyettesítés eredménye az $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{n}$ skaláris szorzat.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Tétel

$$d(P_1, S) = \left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|$$



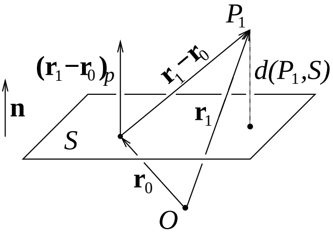
Valóban, legyen $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a P_1 pont helyvektora, és legyen a normálegyenlet vektoros alakja $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$. A behelyettesítés eredménye az $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{n}$ skaláris szorzat.

Itt $\mathbf{n}$ egységvektor, ezért ez a skaláris szorzat az $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ vektor $\mathbf{n}$-nel párhuzamos összetevőjének az előjeles hossza.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Tétel

$$d(P_1, S) = \left| ax_1 + by_1 + cz_1 + d \right|$$



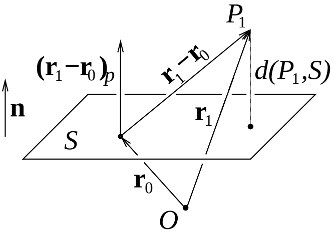
Valóban, legyen $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a P_1 pont helyvektora, és legyen a normálegyenlet vektoros alakja $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$. A behelyettesítés eredménye az $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{n}$ skaláris szorzat.

Itt $\mathbf{n}$ egységvektor, ezért ez a skaláris szorzat az $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ vektor $\mathbf{n}$-nel párhuzamos összetevőjének az előjeles hossza. Ez pedig éppen P_1 előjeles távolsága S-től.

Egyenletek: sík normálegyenlete

Tétel

$$d(P_1, S) = \left| ax_1 + by_1 + cz_1 + d \right|$$



Valóban, legyen $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ a P_1 pont helyvektora, és legyen a normálegyenlet vektoros alakja $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$. A behelyettesítés eredménye az $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\mathbf{n}$ skaláris szorzat.

Itt $\mathbf{n}$ egységvektor, ezért ez a skaláris szorzat az $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ vektor $\mathbf{n}$-nel párhuzamos összetevőjének az előjeles hossza. Ez pedig éppen P_1 előjeles távolsága S-től. (Az előjel abban a féltérben pozitív, amelybe az $\mathbf{n}$ normálvektor mutat, a másik féltérben negatív.)

Egyenletek: kör és gömb

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz),

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P, K) = a$.

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.

Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P, K) = a$.

Legyen $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ezzel a kör (gömb) vektoregyenlete:

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P,K) = a$.
Legyen $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ezzel a kör (gömb) vektoregyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 = a^2.$$

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P, K) = a$.
Legyen $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ezzel a kör (gömb) vektoregyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 = a^2.$$

Koordinátákkal:

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P, K) = a$.
Legyen $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ezzel a kör (gömb) vektoregyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 = a^2.$$

Koordinátákkal:
legyen a síkban $K = (p, q)$ és $P = (x, y)$,

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P,K) = a$.
Legyen $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ezzel a kör (gömb) vektoregyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 = a^2.$$

Koordinátákkal:
legyen a síkban $K = (p,q)$ és $P = (x,y)$, a térben $K = (p,q,r)$ és $P = (x,y,z)$,

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P, K) = a$.
Legyen $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ezzel a kör (gömb) vektoregyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 = a^2.$$

Koordinátákkal:
legyen a síkban $K = (p, q)$ és $P = (x, y)$, a térben $K = (p, q, r)$ és $P = (x, y, z)$, ezekkel felírva

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2$$

a kör egyenlete a síkban,

Egyenletek: kör és gömb

Kört a síkban, illetve gömböt a térben a K középpont és az a sugár rögzítésével adhatunk meg.
Mindkét esetben a sík (tér) valamely P pontja akkor és csak akkor tartozik a körhöz (gömbhöz), ha $d(P,K) = a$.
Legyen $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, ezzel a kör (gömb) vektoregyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k})^2 = a^2.$$

Koordinátákkal:
legyen a síkban $K = (p,q)$ és $P = (x,y)$, a térben $K = (p,q,r)$ és $P = (x,y,z)$, ezekkel felírva

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = a^2$$

a kör egyenlete a síkban, illetve

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = a^2$$

a gömb egyenlete a térben.

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$

Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek.

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$

Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$
Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$
Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$

Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa:

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$
Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$

Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$x^2+y^2-6x+8y+21 = 0$$

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$

Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+8y+21 &= 0 \\ (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+21 &= 0 \end{aligned}$$

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$
Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+8y+21 &= 0 \\ (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+21 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-(-4))^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$
Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+8y+21 &= 0 \\ (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+21 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-(-4))^2 &= 2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K(3,-4),\ a=2 \end{aligned}$$

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$
Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+8y+21 &= 0 \\ (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+21 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-(-4))^2 &= 2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K(3,-4),\ a=2 \end{aligned}$$

Megjegyzés:

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$

Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+8y+21 &= 0 \\ (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+21 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-(-4))^2 &= 2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K(3,-4),\ a=2 \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ha ilyen átrendezés után a jobb oldalon nem pozitív szám adódik

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$

Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+8y+21 &= 0 \\ (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+21 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-(-4))^2 &= 2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K(3,-4),\ a=2 \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ha ilyen átrendezés után a jobb oldalon nem pozitív szám adódik, akkor az egyenlet nem kört ír le.

Egyenletek: kör és gömb

Kör: $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$
Gömb: $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=a^2$

Ezek másodfokú egyenletek. Jellegzetességeik:

- a másodfokú tagok együtthatója egyenlő,
- a vegyes másodfokú tagok (azaz xy, xz, yz) együtthatója zérus.

Az ilyen típusú másodfokú egyenletből a kör, illetve gömb geometriai adatait a teljes négyzetté kiegészítés módszerével határozhatjuk meg.

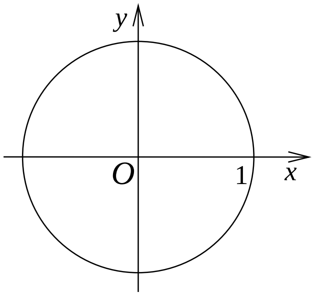
Példa: megkeressük a síkon a $3x^2+3y^2-18x+24y+63=0$ egyenletű kör középpontját és sugarát.

$$\begin{aligned} x^2+y^2-6x+8y+21 &= 0 \\ (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+21 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-(-4))^2 &= 2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad K(3,-4),\ a=2 \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ha ilyen átrendezés után a jobb oldalon nem pozitív szám adódik, akkor az egyenlet nem kört ír le. (Üres halmazt, ha negatív, egyetlen pontot, ha 0.)

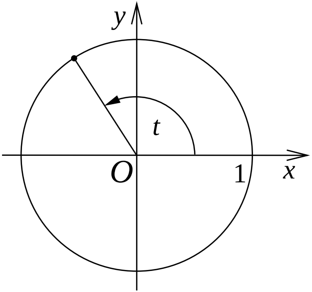
Egyenletek: kör paraméteres előállítása

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



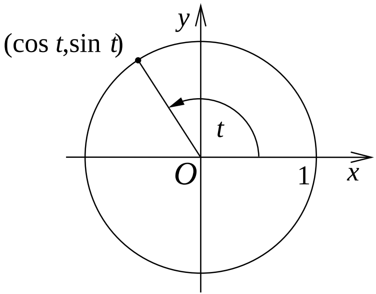
Tekintsük először az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, origó középpontú egységkört.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



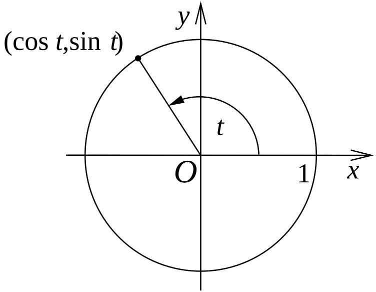
Tekintsük először az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, origó középpontú egységkört. Ennek pontjait az x-tengely pozitív félegyenesétől mért forgásszöggel jellemezhetjük.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



Tekintsük először az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, origó középpontú egységkört. Ennek pontjait az x-tengely pozitív félegyenesétől mért forgásszöggel jellemezhetjük. A kör t szögelforduláshoz tartozó pontjának koordinátái $(\cos t, \sin t)$.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása

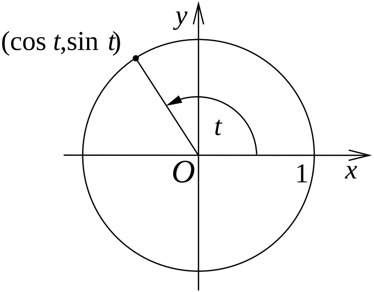


Tekintsük először az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, origó középpontú egységkört. Ennek pontjait az x-tengely pozitív félegyenesétől mért forgásszöggel jellemezhetjük. A kör t szögelforduláshoz tartozó pontjának koordinátái $(\cos t, \sin t)$. Ezért az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

képletek az egységkör paraméteres előállítását adják.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



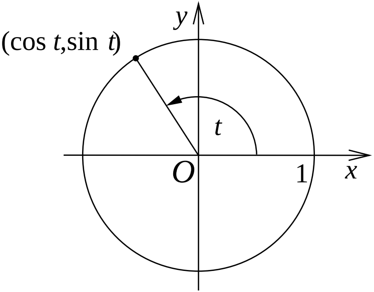
Tekintsük először az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, origó középpontú egységkört. Ennek pontjait az x-tengely pozitív félegyenesétől mért forgásszöggel jellemezhetjük. A kör t szögelforduláshoz tartozó pontjának koordinátái $(\cos t, \sin t)$. Ezért az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

képletek az egységkör paraméteres előállítását adják.

Ha 1 helyett a sugarú kört szerepeltetünk, akkor mindkét koordinátát a-val kell szorozni.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



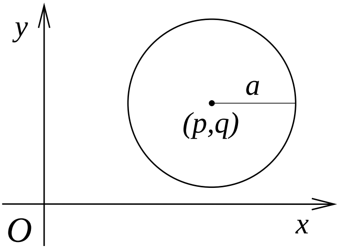
Tekintsük először az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű, origó középpontú egységkört. Ennek pontjait az x-tengely pozitív félegyenesétől mért forgásszöggel jellemezhetjük. A kör t szögelforduláshoz tartozó pontjának koordinátái $(\cos t, \sin t)$. Ezért az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

képletek az egységkör paraméteres előállítását adják.

Ha 1 helyett a sugarú kört szerepeltetünk, akkor mindkét koordinátát a-val kell szorozni. Ha az origó helyett (p, q) a középpont, akkor az x koordinátához p-t, y-hoz q-t kell hozzáadnunk.

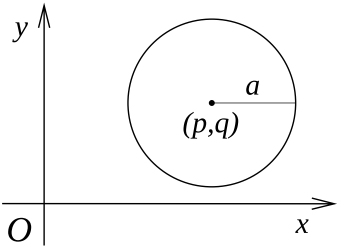
Egyenletek: kör paraméteres előállítása



Az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ egyenletű kör paraméterezését tehát az alábbi képletek adják:

$$\begin{aligned} x &= p + a\cos t \\ y &= q + a\sin t \end{aligned}$$

Egyenletek: kör paraméteres előállítása

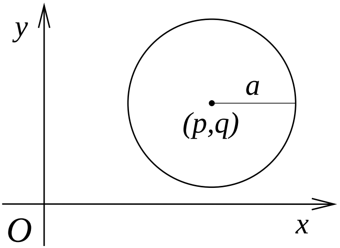


Az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ egyenletű kör paraméterezését tehát az alábbi képletek adják:

$$\begin{aligned} x &= p + a\cos t \\ y &= q + a\sin t \end{aligned}$$

Megjegyzések:

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



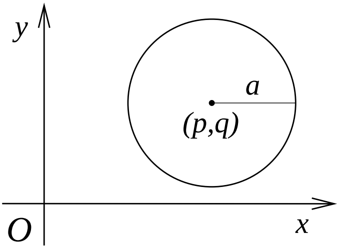
Az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ egyenletű kör paraméterezését tehát az alábbi képletek adják:

$$\begin{aligned} x &= p + a\cos t \\ y &= q + a\sin t \end{aligned}$$

Megjegyzések:

1. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így megadott x és y valóban kielégíti az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ köregyenletet.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



Az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ egyenletű kör paraméterezését tehát az alábbi képletek adják:

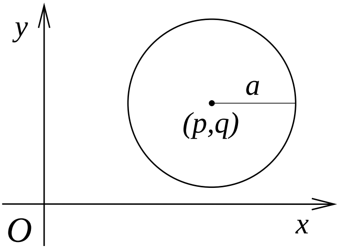
$$\begin{aligned} x &= p + a\cos t \\ y &= q + a\sin t \end{aligned}$$

Megjegyzések:

1. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így megadott x és y valóban kielégíti az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ köregyenletet.

2. Ha t befutja a számegyenest, akkor a t-nek megfeleltetett pont végtelen sokszor körüljárja a kört.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



Az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ egyenletű kör paraméterezését tehát az alábbi képletek adják:

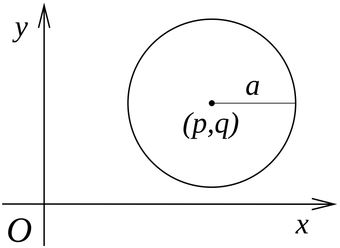
$$\begin{aligned} x &= p + a\cos t \\ y &= q + a\sin t \end{aligned}$$

Megjegyzések:

1. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így megadott x és y valóban kielégíti az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ köregyenletet.

2. Ha t befutja a számegyenest, akkor a t-nek megfeleltetett pont végtelen sokszor körüljárja a kört. A kör egyszeres bejárását kapjuk, ha a függvényeket megszorítjuk egy 2π hosszúságú intervallumra, például $[0,2\pi]$-re.

Egyenletek: kör paraméteres előállítása



Az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ egyenletű kör paraméterezését tehát az alábbi képletek adják:

$$\begin{aligned} x &= p + a\cos t \\ y &= q + a\sin t \end{aligned}$$

Megjegyzések:

1. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az így megadott x és y valóban kielégíti az $(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$ köregyenletet.

2. Ha t befutja a számegyenest, akkor a t-nek megfeleltetett pont végtelen sokszor körüljárja a kört. A kör egyszeres bejárását kapjuk, ha a függvényeket megszorítjuk egy 2π hosszúságú intervallumra, például $[0, 2\pi]$-re.

3. A t paramétert időváltozónak tekintve a kör így nyert paraméteres előállítása az egyenletes körmozgás képlete.