Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton
nmarci@math.elte.hu

www.math.elte.hu/˜nmarci

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Vegyes szorzat

Vegyes szorzat

Definíció

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatán az

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

számot értjük.

Vegyes szorzat

Definíció

Az **a**, **b** és **c** vektorok vegyes szorzatán az

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

számot értjük.

Megjegyzések:

Vegyes szorzat

Definíció

Az **a**, **b** és **c** vektorok vegyes szorzatán az

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

számot értjük.

Megjegyzések:

- A vegyes szorzat háromváltozós művelet. Csak három, térbeli vektorra értelmezzük.

Vegyes szorzat

Definíció

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatán az

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

számot értjük.

Megjegyzések:

- A vegyes szorzat háromváltozós művelet. Csak három, térbeli vektorra értelmezzük.
- Az $\mathbf{abc}$ jelölés nem félreérthető, ha rögzítjük, hogy hol a zárójel és hol milyen műveletek állnak.

Vegyes szorzat

Definíció

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatán az

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

számot értjük.

Megjegyzések:

- A vegyes szorzat háromváltozós művelet. Csak három, térbeli vektorra értelmezzük.
- Az $\mathbf{abc}$ jelölés nem félreérthető, ha rögzítjük, hogy hol a zárójel és hol milyen műveletek állnak.
- (Az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ kifejezésnek nincs értelme!)

Vegyes szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Vegyes szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Vegyes szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Ekkor

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Vegyes szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Ekkor

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} \quad = \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1, c_2, c_3)$$

Vegyes szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1, c_2, c_3) = \\
&= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Vegyes szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Ekkor

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{a}')\mathbf{bc} = \mathbf{abc} + \mathbf{a}'\mathbf{bc}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{a}')\mathbf{bc} &= \mathbf{abc} + \mathbf{a}'\mathbf{bc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{abc} + \mathbf{ab}'\mathbf{c} \end{aligned}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{bc} &= \mathbf{abc}+\mathbf{a}'\mathbf{bc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{abc}+\mathbf{ab}'\mathbf{c} \\ \mathbf{ab}(\mathbf{c}+\mathbf{c}') &= \mathbf{abc}+\mathbf{abc}' \end{aligned}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{bc} &= \mathbf{abc}+\mathbf{a}'\mathbf{bc} \\
\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{abc}+\mathbf{ab}'\mathbf{c} \\
\mathbf{ab}(\mathbf{c}+\mathbf{c}') &= \mathbf{abc}+\mathbf{abc}' \\
\lambda(\mathbf{abc}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c})
\end{aligned}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{bc} &= \mathbf{abc}+\mathbf{a}'\mathbf{bc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{abc}+\mathbf{ab}'\mathbf{c} \\ \mathbf{ab}(\mathbf{c}+\mathbf{c}') &= \mathbf{abc}+\mathbf{abc}' \\ \lambda(\mathbf{abc}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c}) \end{aligned}$$

Felcserélési tulajdonságok:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{bc} &= \mathbf{abc}+\mathbf{a}'\mathbf{bc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{abc}+\mathbf{ab}'\mathbf{c} \\ \mathbf{ab}(\mathbf{c}+\mathbf{c}') &= \mathbf{abc}+\mathbf{abc}' \\ \lambda(\mathbf{abc}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c}) \end{aligned}$$

Felcserélési tulajdonságok:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb}$$

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{bc} &= \mathbf{abc}+\mathbf{a}'\mathbf{bc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{abc}+\mathbf{ab}'\mathbf{c} \\ \mathbf{ab}(\mathbf{c}+\mathbf{c}') &= \mathbf{abc}+\mathbf{abc}' \\ \lambda(\mathbf{abc}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c}) \end{aligned}$$

Felcserélési tulajdonságok:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb}$$

Speciális eset („felcserélési tétel”):

Vegyes szorzat

Műveleti tulajdonságok
(a determináns tulajdonságaiból
következnek):

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{bc} &= \mathbf{abc}+\mathbf{a}'\mathbf{bc} \\ \mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{b}')\mathbf{c} &= \mathbf{abc}+\mathbf{ab}'\mathbf{c} \\ \mathbf{ab}(\mathbf{c}+\mathbf{c}') &= \mathbf{abc}+\mathbf{abc}' \\ \lambda(\mathbf{abc}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ab}(\lambda\mathbf{c}) \end{aligned}$$

Felcserélési tulajdonságok:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb}$$

Speciális eset („felcserélési tétel”):

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem egysíkú:

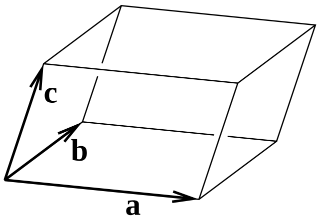
Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ **a**, **b**, **c** lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig **a**, **b**, **c** nem egysíkú:

$\mathbf{abc}$ = az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata



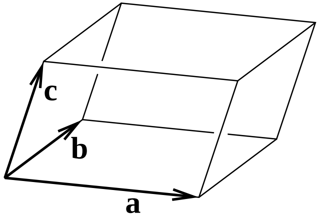
Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ **a**, **b**, **c** lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig **a**, **b**, **c** nem egysíkú:

$\mathbf{abc}$ = az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata



Előjel nélkül:
V = alapterület $\cdot$ magasság

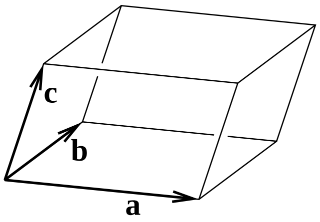
Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ **a**, **b**, **c** lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig **a**, **b**, **c** nem egysíkú:

$\mathbf{abc}$ = az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata



Előjel nélkül:

$$V = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} =$$
$$= \left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| \cdot$$

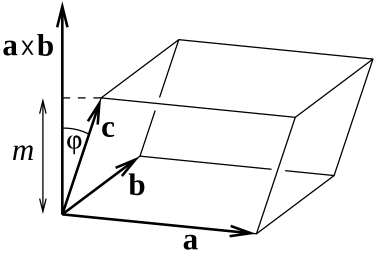
Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem egysíkú:

$\mathbf{abc}$ = az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata



Előjel nélkül:

$$V = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = $$
$$= \left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| \cdot \left(\left|\mathbf{c}\right| \cdot \left|\cos\varphi\right|\right)$$

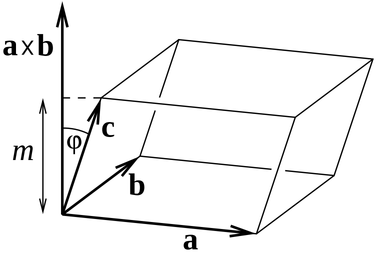
Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ **a**, **b**, **c** lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig **a**, **b**, **c** nem egysíkú:

$\mathbf{abc} =$ az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata



Előjel nélkül:

$$\begin{aligned} V &= \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \left(|\mathbf{c}| \cdot |\cos\varphi|\right) = \\ &= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \end{aligned}$$

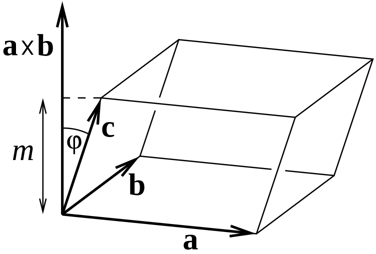
Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nem egysíkú:

$\mathbf{abc}$ = az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata



Előjel nélkül:

$$\begin{aligned} V &= \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = \\ &= \left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| \cdot \left(\left|\mathbf{c}\right| \cdot \left|\cos\varphi\right|\right) = \\ &= \left|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\right| = \left|\mathbf{abc}\right| \end{aligned}$$

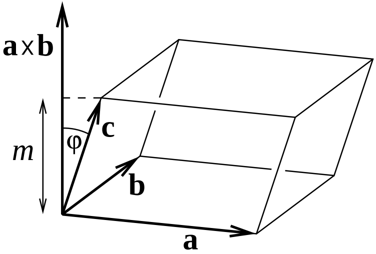
Vegyes szorzat

A vegyes szorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{abc} = 0 \iff$ **a**, **b**, **c** lineárisan összefüggő (egysíkú) vektorok

Ha pedig **a**, **b**, **c** nem egysíkú:

$\mathbf{abc}$ = az **a**, **b**, **c** vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata



Előjel nélkül:

$$V = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = \\ = \left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right| \cdot \left(\left|\mathbf{c}\right| \cdot \left|\cos\varphi\right|\right) = \\ = \left|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\right| = \left|\mathbf{abc}\right|$$

Az előjel: > 0, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer; < 0, ha balrendszer.

Vektorazonosságok

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A zárójelek nem hagyhatók el. (A jobb oldalon nem vegyes szorzatok állnak!)
- A tételből is látszik, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív művelet:

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A zárójelek nem hagyhatók el. (A jobb oldalon nem vegyes szorzatok állnak!)
- A tételből is látszik, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív művelet: ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$, akkor a két jobb oldal általában nem egyenlő,

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A zárójelek nem hagyhatók el. (A jobb oldalon nem vegyes szorzatok állnak!)
- A tételből is látszik, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív művelet: ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$, akkor a két jobb oldal általában nem egyenlő, így $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A zárójelek nem hagyhatók el. (A jobb oldalon nem vegyes szorzatok állnak!)
- A tételből is látszik, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív művelet: ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$, akkor a két jobb oldal általában nem egyenlő, így $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
- Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vektor merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re,

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A zárójelek nem hagyhatók el. (A jobb oldalon nem vegyes szorzatok állnak!)
- A tételből is látszik, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív művelet: ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$, akkor a két jobb oldal általában nem egyenlő, így $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
- Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vektor merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re, ezért benne fekszik $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában.

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A zárójelek nem hagyhatók el. (A jobb oldalon nem vegyes szorzatok állnak!)
- A tételből is látszik, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív művelet: ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$, akkor a két jobb oldal általában nem egyenlő, így $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
- Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vektor merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re, ezért benne fekszik $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában. Emiatt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ biztosan előáll $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ kombinációjaként.

Vektorazonosságok

1. A kifejtési tétel

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A zárójelek nem hagyhatók el. (A jobb oldalon nem vegyes szorzatok állnak!)
- A tételből is látszik, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív művelet: ha $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$, akkor a két jobb oldal általában nem egyenlő, így $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
- Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vektor merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re, ezért benne fekszik $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában. Emiatt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ biztosan előáll $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ kombinációjaként.
  A tétel az ehhez szükséges együtthatókat adja meg.

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} =$

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} =$ ((i)-et felhasználva) $=$

$= -\big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} =$ ((i)-et felhasználva) $=$

$= -\big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$

Feltehető, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, ui. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén mindkét oldal $\mathbf{0}$.

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} =$ ((i)-et felhasználva) $=$

$= -\big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$

Feltehető, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, ui. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén mindkét oldal $\mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor is mindkét oldal $\mathbf{0}$:

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \text{ ((i)-et felhasználva) } =$$
$$= -\big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$$

Feltehető, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, ui. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén mindkét oldal $\mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor is mindkét oldal $\mathbf{0}$:
ugyanis a bal oldalon $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$,

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} =$ ((i)-et felhasználva) $=$
$= -\big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

Feltehető, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, ui. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén mindkét oldal $\mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor is mindkét oldal $\mathbf{0}$:
ugyanis a bal oldalon $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, a jobb oldalon pedig $\mathbf{b}$ helyett $\lambda\mathbf{a}$ írható,

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} =$ ((i)-et felhasználva) $=$
$= -\big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$.

Feltehető, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, ui. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén mindkét oldal $\mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor is mindkét oldal $\mathbf{0}$:
ugyanis a bal oldalon $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, a jobb oldalon pedig $\mathbf{b}$ helyett $\lambda\mathbf{a}$ írható, amivel
$(\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a} = (\mathbf{ac})(\lambda\mathbf{a}) - (\lambda\mathbf{ac})\mathbf{a}$

Vektorazonosságok

Tétel

(i) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

(ii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

Bizonyítás:

Elég (i)-et bebizonyítani, ugyanis (i)-ből könnyen következik (ii):
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a} =$ ((i)-et felhasználva) $=$
$= -\big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$

Feltehető, hogy $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, ui. $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ esetén mindkét oldal $\mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, akkor is mindkét oldal $\mathbf{0}$:
ugyanis a bal oldalon $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, a jobb oldalon pedig $\mathbf{b}$ helyett $\lambda\mathbf{a}$ írható, amivel
$(\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a} = (\mathbf{ac})(\lambda\mathbf{a}) - (\lambda\mathbf{ac})\mathbf{a} = \lambda\big((\mathbf{ac})\mathbf{a} - (\mathbf{ac})\mathbf{a}\big) = \mathbf{0}.$

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Legyen végül $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Legyen végül $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

Tartsuk **a**-t és **b**-t rögzítve és vizsgáljuk a bal oldalt is és a jobb oldalt is mint a **c** vektorváltozó függvényét.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Legyen végül $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

Tartsuk **a**-t és **b**-t rögzítve és vizsgáljuk a bal oldalt is és a jobb oldalt is mint a **c** vektorváltozó függvényét.

A szorzások műveleti tulajdonságai miatt ezek lineáris leképezések.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Legyen végül $\mathbf{a} \not\parallel \mathbf{b}$.

Tartsuk **a**-t és **b**-t rögzítve és vizsgáljuk a bal oldalt is és a jobb oldalt is mint a **c** vektorváltozó függvényét.

A szorzások műveleti tulajdonságai miatt ezek lineáris leképezések.

Egy lineáris leképezést egyértelműen meghatároz, hogy valamely rögzített bázishoz tartozó vektorokon milyen értékeket vesz fel.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Legyen végül $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

Tartsuk **a**-t és **b**-t rögzítve és vizsgáljuk a bal oldalt is és a jobb oldalt is mint a **c** vektorváltozó függvényét.

A szorzások műveleti tulajdonságai miatt ezek lineáris leképezések.

Egy lineáris leképezést egyértelműen meghatároz, hogy valamely rögzített bázishoz tartozó vektorokon milyen értékeket vesz fel.

Az $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ kikötés miatt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok bázist alkotnak a tér vektorai számára.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\mathbf{c})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

Vektorazonosságok

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\mathbf{c})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):
Még azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor,

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):
Még azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, ezzel

a bal oldal $(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e}$

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):
Még azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, ezzel

a bal oldal $(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{b}_m$,

a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges összetevője,

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\mathbf{c})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):
Még azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, ezzel

a bal oldal $(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{b}_m$,

a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges összetevője,

a jobb oldal $(\mathbf{e}\mathbf{e})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\mathbf{e})\mathbf{e}$

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):
Még azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, ezzel

a bal oldal $(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{b}_m$,
a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges összetevője,

a jobb oldal $(\mathbf{ee})\mathbf{b} - (\mathbf{be})\mathbf{e} = \mathbf{b} - (\mathbf{eb})\mathbf{e}$

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):
Még azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, ezzel

a bal oldal $(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{b}_m$,
a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges összetevője,

a jobb oldal $(\mathbf{ee})\mathbf{b} - (\mathbf{be})\mathbf{e} = \mathbf{b} - (\mathbf{eb})\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_p$,
ahol $\mathbf{b}_p$ a párhuzamos összetevő.

Vektorazonosságok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$$

Ezért a kifejtési tételt elég a $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ és a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esetekre belátni.

Ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor mindkét oldal $\mathbf{0}$:

a bal oldalon $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$,

a jobb oldal pedig $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ és $\mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ miatt $\mathbf{0}$.

Legyen most $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ (a $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ eset hasonlóan intézhető el):
Még azt is feltehetjük, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, ezzel

a bal oldal $(\mathbf{e} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \mathbf{b}_m$,
a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges összetevője,

a jobb oldal $(\mathbf{ee})\mathbf{b} - (\mathbf{be})\mathbf{e} = \mathbf{b} - (\mathbf{eb})\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_p$,
ahol $\mathbf{b}_p$ a párhuzamos összetevő.

Így $\mathbf{b} = \mathbf{b}_p + \mathbf{b}_m$ miatt a bizonyítás kész.

Vektorazonosságok

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Megjegyzés:

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Megjegyzés:
A vektoriális szorzásnak ezt a tulajdonságát szokás az asszociativitás „helyettesítőjének” tekinteni.

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

Megjegyzés:
A vektoriális szorzásnak ezt a tulajdonságát szokás az asszociativitás „helyettesítőjének” tekinteni.

A Jacobi-azonosság könnyen levezethető a kifejtési tételből:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=$$

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Megjegyzés:
A vektoriális szorzásnak ezt a tulajdonságát szokás az asszociativitás „helyettesítőjének” tekinteni.

A Jacobi-azonosság könnyen levezethető a kifejtési tételből:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} =$$
$$= \big((\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}\big)$$

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Megjegyzés:
A vektoriális szorzásnak ezt a tulajdonságát szokás az asszociativitás „helyettesítőjének” tekinteni.

A Jacobi-azonosság könnyen levezethető a kifejtési tételből:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} =$$
$$= \big((\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}\big) + \big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big)$$

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Megjegyzés:
A vektoriális szorzásnak ezt a tulajdonságát szokás az asszociativitás „helyettesítőjének” tekinteni.

A Jacobi-azonosság könnyen levezethető a kifejtési tételből:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \\ &= \big((\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}\big) + \big((\mathbf{ba})\mathbf{c} - (\mathbf{ca})\mathbf{b}\big) + \big((\mathbf{cb})\mathbf{a} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}\big)\end{aligned}$$

Vektorazonosságok

2. A Jacobi-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

Megjegyzés:
A vektoriális szorzásnak ezt a tulajdonságát szokás az asszociativitás „helyettesítőjének” tekinteni.

A Jacobi-azonosság könnyen levezethető a kifejtési tételből:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\\&=\big((\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{bc})\mathbf{a}\big)+\big((\mathbf{ba})\mathbf{c}-(\mathbf{ca})\mathbf{b}\big)+\big((\mathbf{cb})\mathbf{a}-(\mathbf{ab})\mathbf{c}\big)=\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

Vektorazonosságok

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

A Lagrange-azonosság a felcserélési tétel és a kifejtési tétel következményeként adódik:

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

A Lagrange-azonosság a felcserélési tétel és a kifejtési tétel következményeként adódik:

Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ skaláris szorzat felfogható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ vektorok $\mathbf{abv}$ vegyes szorzataként,

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

A Lagrange-azonosság a felcserélési tétel és a kifejtési tétel következményeként adódik:

Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ skaláris szorzat felfogható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ vektorok $\mathbf{abv}$ vegyes szorzataként, amelyet $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{v})$ alakban is írhatunk:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a}\big(\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\big)$$

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

A Lagrange-azonosság a felcserélési tétel és a kifejtési tétel következményeként adódik:

Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ skaláris szorzat felfogható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ vektorok $\mathbf{abv}$ vegyes szorzataként, amelyet $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{v})$ alakban is írhatunk:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a}\big(\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\big) =$$

$$= \mathbf{a}\big((\mathbf{bd})\mathbf{c} - (\mathbf{bc})\mathbf{d}\big)$$

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

A Lagrange-azonosság a felcserélési tétel és a kifejtési tétel következményeként adódik:

Az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ skaláris szorzat felfogható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ vektorok $\mathbf{abv}$ vegyes szorzataként, amelyet $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{v})$ alakban is írhatunk:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{a}\big(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big) =$$

$$= \mathbf{a}\big((\mathbf{bd})\mathbf{c}-(\mathbf{bc})\mathbf{d}\big) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) -$$

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

A Lagrange-azonosság a felcserélési tétel és a kifejtési tétel következményeként adódik:

Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ skaláris szorzat felfogható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ vektorok $\mathbf{abv}$ vegyes szorzataként, amelyet $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{v})$ alakban is írhatunk:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a}\big(\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\big) =$$

$$= \mathbf{a}\big((\mathbf{bd})\mathbf{c} - (\mathbf{bc})\mathbf{d}\big) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{ad})$$

Vektorazonosságok

3. A Lagrange-azonosság

Tétel

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

A Lagrange-azonosság a felcserélési tétel és a kifejtési tétel következményeként adódik:

Az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ skaláris szorzat felfogható az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{v}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ vektorok $\mathbf{abv}$ vegyes szorzataként, amelyet $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{v})$ alakban is írhatunk:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{a}\big(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\big) =$$

$$= \mathbf{a}\big((\mathbf{bd})\mathbf{c}-(\mathbf{bc})\mathbf{d}\big) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{bc})(\mathbf{ad}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd} \end{vmatrix}$$

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$

A közös $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ tényezővel osztva

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$
A közös $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ tényezővel osztva a jól ismert
$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$
azonossághoz jutunk (ahol $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$).

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$
A közös $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ tényezővel osztva a jól ismert
$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$
azonossághoz jutunk (ahol $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$).
- A $\sin^2 \varphi \geq 0$, azaz $\cos^2 \varphi \leq 1$,

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$
A közös $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ tényezővel osztva a jól ismert
$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$
azonossághoz jutunk (ahol $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$).
- A $\sin^2 \varphi \geq 0$, azaz $\cos^2 \varphi \leq 1$, azaz $(\mathbf{ab})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ egyenlőtlenség

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$
A közös $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ tényezővel osztva a jól ismert
$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$
azonossághoz jutunk (ahol $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$).
- A $\sin^2\varphi \geq 0$, azaz $\cos^2\varphi \leq 1$, azaz $(\mathbf{ab})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ egyenlőtlenség az **a** és **b** vektorok koordinátáit használva átírható

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$
A közös $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ tényezővel osztva a jól ismert
$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$
azonossághoz jutunk (ahol $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$).
- A $\sin^2 \varphi \geq 0$, azaz $\cos^2 \varphi \leq 1$, azaz $(\mathbf{ab})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2$ egyenlőtlenség az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok koordinátáit használva átírható az
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
alakba.

Vektorazonosságok

Megjegyzések:

- Tekintsük Lagrange-azonosságnak azt a speciális estét, amikor $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{d}$:
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$
A közös $\left|\mathbf{a}\right|^2 \cdot \left|\mathbf{b}\right|^2$ tényezővel osztva a jól ismert
$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$
azonossághoz jutunk (ahol $\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle$).
- A $\sin^2 \varphi \geq 0$, azaz $\cos^2 \varphi \leq 1$, azaz $(\mathbf{ab})^2 \leq \left|\mathbf{a}\right|^2 \cdot \left|\mathbf{b}\right|^2$ egyenlőtlenség az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok koordinátáit használva átírható az
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
alakba. Ez pedig az analízisből ismert Cauchy-féle egyenlőtlenség speciális ($n = 3$) esete.

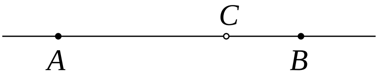
A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Sokszögek és poliéderek
  - Konvexitás
  - Sokszögek, konvex sokszögek, konvex poliéderek
  - Szabályos poliéderek

Osztóviszony

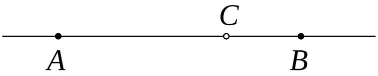
Osztóviszony

Tekintsünk egy e egyenest és rögzítsük rajta az A és B különböző pontokat. Válasszunk egy tetszőleges $C \in e$ pontot, amelyre $C \neq B$.



Osztóviszony

Tekintsünk egy e egyenest és rögzítsük rajta az A és B különböző pontokat. Válasszunk egy tetszőleges $C \in e$ pontot, amelyre $C \neq B$.

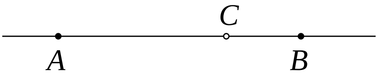


Definíció

A C pontnak A-ra és B-re vonatkozó osztóviszonyán

Osztóviszony

Tekintsünk egy e egyenest és rögzítsük rajta az A és B különböző pontokat. Válasszunk egy tetszőleges $C \in e$ pontot, amelyre $C \neq B$.

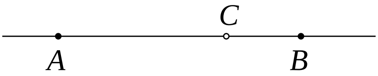


Definíció

A C pontnak A-ra és B-re vonatkozó **osztóviszonyán** (vagy az ABC ponthármas osztóviszonyán)

Osztóviszony

Tekintsünk egy e egyenest és rögzítsük rajta az A és B különböző pontokat. Válasszunk egy tetszőleges $C \in e$ pontot, amelyre $C \neq B$.



Definíció

A C pontnak A-ra és B-re vonatkozó osztóviszonyán (vagy az ABC ponthármas osztóviszonyán) az

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

számot értjük, ahol a számláló is és a nevező is irányított szakaszok előjeles hosszát jelenti.

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

- Ahhoz, hogy előjeles távolságokról beszélhessünk, az e egyenesen is rögzíteni kell egy irányítást.

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

- Ahhoz, hogy előjeles távolságokról beszélhessünk, az e egyenesen is rögzíteni kell egy irányítást. Vegyük azonban észre, hogy az osztóviszony értéke az irányítás megválasztásától független, hiszen ellentétes irányítás esetén a számláló is és a nevező is ellentétes előjelű.

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

- Ahhoz, hogy előjeles távolságokról beszélhessünk, az e egyenesen is rögzíteni kell egy irányítást. Vegyük azonban észre, hogy az osztóviszony értéke az irányítás megválasztásától független, hiszen ellentétes irányítás esetén a számláló is és a nevező is ellentétes előjelű. Ezért ahhoz, hogy osztóviszonyról beszélhessünk, nincsen szükség az e egyenes irányítására.

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

- Ahhoz, hogy előjeles távolságokról beszélhessünk, az e egyenesen is rögzíteni kell egy irányítást. Vegyük azonban észre, hogy az osztóviszony értéke az irányítás megválasztásától független, hiszen ellentétes irányítás esetén a számláló is és a nevező is ellentétes előjelű. Ezért ahhoz, hogy osztóviszonyról beszélhessünk, nincsen szükség az e egyenes irányítására.
- Az (ABC) jelölésben a három pont sorrendje lényeges, hiszen más-más szerepet játszanak a definícióban. Ez a sorrend független attól, hogy az e egyenesen hogyan követi egymást a három pont.

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

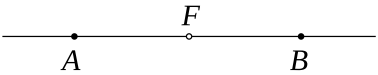
- Ha a C pont az A és B között van, akkor az (ABC) osztóviszony azt mondja meg, hogy C milyen arányban osztja az AB szakaszt. Például:

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

- Ha a C pont az A és B között van, akkor az (ABC) osztóviszony azt mondja meg, hogy C milyen arányban osztja az AB szakaszt. Például:



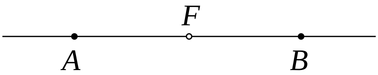
az AB szakasz F felezőpontjára $(ABF) = 1 : 1 = 1$,

Osztóviszony

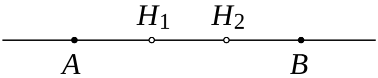
$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

- Ha a C pont az A és B között van, akkor az (ABC) osztóviszony azt mondja meg, hogy C milyen arányban osztja az AB szakaszt. Például:



az AB szakasz F felezőpontjára $(ABF) = 1 : 1 = 1$,

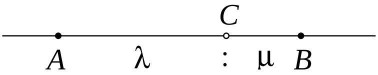


az AB szakasz A-hoz közelebbi H_1 harmadolópontjára $(ABH_1) = 1 : 2 = 1/2$,
a B-hez közelebbi H_2-re $(ABH_2) = 2 : 1 = 2$.

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

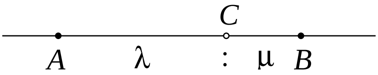


- Általában, ha C az AB szakaszt az ábra szerint $\lambda : \mu$ arányban osztja,

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:



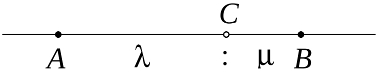
- Általában, ha C az AB szakaszt az ábra szerint $\lambda : \mu$ arányban osztja, akkor

$$(ABC) = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

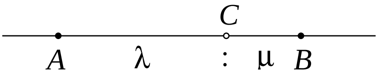


- Általában, ha C az AB szakaszt az ábra szerint $\lambda : \mu$ arányban osztja, akkor
$$(ABC) = \frac{\lambda}{\mu}.$$
- Látható, hogy $(ABC) > 0$ akkor és csak akkor áll, ha a C pont A és B között van.

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:

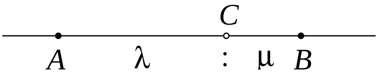


- Általában, ha C az AB szakaszt az ábra szerint $\lambda : \mu$ arányban osztja, akkor
$$(ABC) = \frac{\lambda}{\mu}.$$
- Látható, hogy $(ABC) > 0$ akkor és csak akkor áll, ha a C pont A és B között van. Ha C akár az A-n túli, akár a B-n túli félegyenesre esik,

Osztóviszony

$$(ABC) = \frac{AC}{CB}$$

Megjegyzések:



- Általában, ha C az AB szakaszt az ábra szerint $\lambda : \mu$ arányban osztja, akkor
$$(ABC) = \frac{\lambda}{\mu}.$$
- Látható, hogy $(ABC) > 0$ akkor és csak akkor áll, ha a C pont A és B között van. Ha C akár az A-n túli, akár a B-n túli félegyenesre esik, a számlálóban és a nevezőben ellentétes irányú szakasz áll, ezért a hányados negatív.

Osztóviszony

- Vezessük be az x koordinátát az e egyenesen,

Osztóviszony

- Vezessük be az x koordinátát az e egyenesen, legyen $A = a$ és $B = b$ és állítsuk elő a $C = x$ pontra az $y = (ABC)$ osztóviszonyt mint x függvényét. Ekkor

Osztóviszony

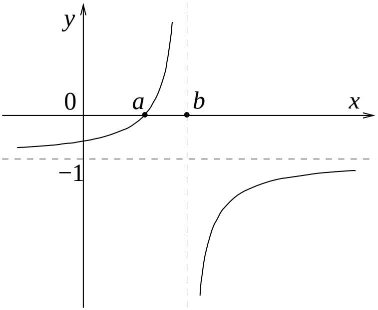
- Vezessük be az x koordinátát az e egyenesen, legyen $A = a$ és $B = b$ és állítsuk elő a $C = x$ pontra az $y = (ABC)$ osztóviszonyt mint x függvényét. Ekkor
$$y = (ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{x-a}{b-x}.$$

Osztóviszony

- Vezessük be az x koordinátát az e egyenesen, legyen $A = a$ és $B = b$ és állítsuk elő a $C = x$ pontra az $y = (ABC)$ osztóviszonyt mint x függvényét. Ekkor

$$y = (ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{x-a}{b-x}.$$

Grafikusan:

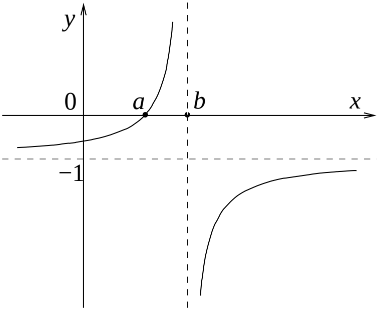


Osztóviszony

- Vezessük be az x koordinátát az e egyenesen, legyen $A = a$ és $B = b$ és állítsuk elő a $C = x$ pontra az $y = (ABC)$ osztóviszonyt mint x függvényét. Ekkor

$$y = (ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{x-a}{b-x}.$$

Grafikusan:

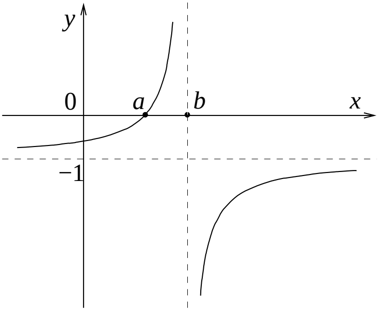


- Látható, hogy az $y = -1$ szám kivételével az osztóviszony minden valós értéket felvesz, mégpedig pontosan egyszer.

Osztóviszony

- Vezessük be az x koordinátát az e egyenesen, legyen $A = a$ és $B = b$ és állítsuk elő a $C = x$ pontra az $y = (ABC)$ osztóviszonyt mint x függvényét. Ekkor
$$y = (ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{x-a}{b-x}.$$

Grafikusan:



- Látható, hogy az $y = -1$ szám kivételével az osztóviszony minden valós értéket felvesz, mégpedig pontosan egyszer. (Tehát a C pont helyzetét az osztóviszony értéke egyértelműen meghatározza.)

Súlypont

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját,

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek.

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek. Itt az ún. „diszkrét” tömegeloszlások vizsgálatára szorítkozunk,

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek. Itt az ún. „diszkrét” tömegeloszlások vizsgálatára szorítkozunk, mert ehhez a vektorok geometriája elegendő segédeszköz.

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek. Itt az ún. „diszkrét” tömegeloszlások vizsgálatára szorítkozunk, mert ehhez a vektorok geometriája elegendő segédeszköz.
- Véges sok pontból álló pontrendszereket vizsgálunk,

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek. Itt az ún. „diszkrét” tömegeloszlások vizsgálatára szorítkozunk, mert ehhez a vektorok geometriája elegendő segédeszköz.
- Véges sok pontból álló pontrendszereket vizsgálunk, és megengedjük, hogy ezek más és más súllyal legyenek figyelembe véve a súlypont meghatározásánál.

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek. Itt az ún. „diszkrét” tömegeloszlások vizsgálatára szorítkozunk, mert ehhez a vektorok geometriája elegendő segédeszköz.
- Véges sok pontból álló pontrendszereket vizsgálunk, és megengedjük, hogy ezek más és más súllyal legyenek figyelembe véve a súlypont meghatározásánál. Matematikai formába öntjük azt az elképzelést,

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek. Itt az ún. „diszkrét” tömegeloszlások vizsgálatára szorítkozunk, mert ehhez a vektorok geometriája elegendő segédeszköz.
- Véges sok pontból álló pontrendszereket vizsgálunk, és megengedjük, hogy ezek más és más súllyal legyenek figyelembe véve a súlypont meghatározásánál. Matematikai formába öntjük azt az elképzelést, hogy a súlypont „kiegyensúlyozza” a pontrendszert,

Súlypont

Előzetes megjegyzések:

- Nem fogjuk definiálni általában síkidomok, illetve testek súlypontját, mert ezek szabatos matematikai értelmezéséhez az integrálszámítás eszközei lennének szükségesek. Itt az ún. „diszkrét” tömegeloszlások vizsgálatára szorítkozunk, mert ehhez a vektorok geometriája elegendő segédeszköz.
- Véges sok pontból álló pontrendszereket vizsgálunk, és megengedjük, hogy ezek más és más súllyal legyenek figyelembe véve a súlypont meghatározásánál. Matematikai formába öntjük azt az elképzelést, hogy a súlypont „kiegyensúlyozza” a pontrendszert, azaz kiegyenlíti a pontrendszer együttes mechanikai hatását.

Súlypont

Definíció

A tér $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontjait súlyozott pontrendszernek mondjuk, ha mindegyik ponthoz hozzárendeltünk egy-egy α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ valós számot.

Súlypont

Definíció

A tér $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontjait súlyozott pontrendszernek mondjuk, ha mindegyik ponthoz hozzárendeltünk egy-egy α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ valós számot. Az α_i számot az A_i pont súlyának nevezzük.

Súlypont

Definíció

A tér $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontjait súlyozott pontrendszernek mondjuk, ha mindegyik ponthoz hozzárendeltünk egy-egy α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) valós számot. Az α_i számot az A_i pont súlyának nevezzük.

Megjegyzések:

Súlypont

Definíció

A tér A_1, A_2, …, A_n pontjait súlyozott pontrendszernek mondjuk, ha mindegyik ponthoz hozzárendeltünk egy-egy α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) valós számot. Az α_i számot az A_i pont súlyának nevezzük.

Megjegyzések:

- Nem követeljük meg, hogy a súlyok pozitívak legyenek; a pontrendszerben szerepelhetnek zérus, sőt, akár negatív súllyal ellátott pontok is.

Súlypont

Definíció

A tér $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontjait súlyozott pontrendszernek mondjuk, ha mindegyik ponthoz hozzárendeltünk egy-egy α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ valós számot. Az α_i számot az A_i pont súlyának nevezzük.

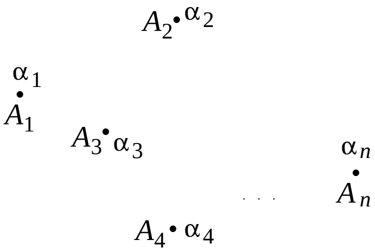
Megjegyzések:

- Nem követeljük meg, hogy a súlyok pozitívak legyenek; a pontrendszerben szerepelhetnek zérus, sőt, akár negatív súllyal ellátott pontok is.
- Nem kell külön definiálnunk a síkbeli, illetve egyenesen fekvő súlyozott pontrendszer fogalmát, mert ezek felfoghatók a fenti definíció speciális eseteként.

Súlypont

Definíció

Az S pontot az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ súlyokkal ellátott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ súlyozott pontrendszer **súlypont**jának mondjuk,

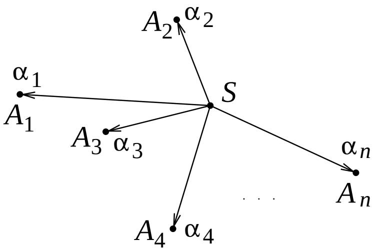


Súlypont

Definíció

Az S pontot az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ súlyokkal ellátott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ súlyozott pontrendszer súlypontjának mondjuk, ha

$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0}.$$



Súlypont

Definíció

Az S pontot az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ súlyokkal ellátott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ súlyozott pontrendszer súlypontjának mondjuk, ha

$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0}.$$

Megjegyzések:

Súlypont

Definíció

Az S pontot az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ súlyokkal ellátott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ súlyozott pontrendszer **súlypont**jának mondjuk, ha

$$\alpha_1 \overrightarrow{SA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0}.$$

Megjegyzések:

- Ha valamelyik $\alpha_i = 0$, akkor az A_i pont elhagyása nem befolyásolja a súlypontot.

Súlypont

Definíció

Az S pontot az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ súlyokkal ellátott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ súlyozott pontrendszer súlypontjának mondjuk, ha

$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0}.$$

Megjegyzések:

- Ha valamelyik $\alpha_i = 0$, akkor az A_i pont elhagyása nem befolyásolja a súlypontot.
- Megszorozhatjuk mindegyik súlyt ugyanazzal a nem 0 számmal; ha S súlypontja volt az eredeti rendszernek, akkor súlypontja az újnak is, és viszont.

Súlypont

Definíció

Az S pontot az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ súlyokkal ellátott $A_1, A_2, \dots, A_n$ súlyozott pontrendszer **súlypont**jának mondjuk, ha

$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \alpha_2\overrightarrow{SA_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \mathbf{0}.$$

Megjegyzések:

- Ha valamelyik $\alpha_i = 0$, akkor az A_i pont elhagyása nem befolyásolja a súlypontot.
- Megszorozhatjuk mindegyik súlyt ugyanazzal a nem 0 számmal; ha S súlypontja volt az eredeti rendszernek, akkor súlypontja az újnak is, és viszont.
- Ha mindegyik α_i ugyanaz a nem 0 szám, akkor a pontok közönséges értelemben vett súlypontjáról beszélünk.

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ a pontok helyvektorai tetszőlegesen rögzített origó mellett,

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:
Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ a pontok helyvektorai tetszőlegesen rögzített origó mellett, és legyen S az a pont, amelynek a helyvektora

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ a pontok helyvektorai tetszőlegesen rögzített origó mellett, és legyen S az a pont, amelynek a helyvektora

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Ekkor S valóban súlypont, ugyanis

$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} =$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:
Legyenek $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ a pontok helyvektorai tetszőlegesen rögzített origó mellett, és legyen S az a pont, amelynek a helyvektora

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Ekkor S valóban súlypont, ugyanis

$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \alpha_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + \ldots + \alpha_n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a})$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:
Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ a pontok helyvektorai tetszőlegesen rögzített origó mellett, és legyen S az a pont, amelynek a helyvektora

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Ekkor S valóban súlypont, ugyanis

$$\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n} = \alpha_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + \ldots + \alpha_n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}) =$$
$$= (\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n) - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\mathbf{a}$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

Legyenek $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ a pontok helyvektorai tetszőlegesen rögzített origó mellett, és legyen S az a pont, amelynek a helyvektora

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{a}_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

Ekkor S valóban súlypont, ugyanis

$$\alpha_1 \overrightarrow{SA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{SA_n} = \alpha_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}) + \ldots + \alpha_n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}) =$$
$$= (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{a}_n) - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

A súlypont egyértelműsége:

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:
A súlypont egyértelműsége: ha S is és S' is súlypont, akkor

$$\overrightarrow{SS'} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{SS'} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{SS'}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

A súlypont egyértelműsége: ha S is és S' is súlypont, akkor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SS'} &= \frac{\alpha_1\overrightarrow{SS'}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{SS'}}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} = \\ &= \frac{\alpha_1\left(\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{A_1S'}\right)+\ldots+\alpha_n\left(\overrightarrow{SA_n}+\overrightarrow{A_nS'}\right)}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\end{aligned}$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

A súlypont egyértelműsége: ha S is és S' is súlypont, akkor

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SS'} &= \frac{\alpha_1\overrightarrow{SS'} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SS'}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = \\
&= \frac{\alpha_1\left(\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{A_1S'}\right) + \ldots + \alpha_n\left(\overrightarrow{SA_n} + \overrightarrow{A_nS'}\right)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = \\
&= \frac{\left((\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n}) - (\alpha_1\overrightarrow{S'A_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{S'A_n})\right)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}
\end{aligned}$$

Súlypont

Tétel

Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja.

Bizonyítás:

A súlypont egyértelműsége: ha S is és S' is súlypont, akkor

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SS'} &= \frac{\alpha_1\overrightarrow{SS'} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SS'}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = \\
&= \frac{\alpha_1\left(\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{A_1S'}\right) + \ldots + \alpha_n\left(\overrightarrow{SA_n} + \overrightarrow{A_nS'}\right)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = \\
&= \frac{\left((\alpha_1\overrightarrow{SA_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{SA_n}) - (\alpha_1\overrightarrow{S'A_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{S'A_n})\right)}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \\
&= \frac{\mathbf{0} - \mathbf{0}}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Súlypont és osztóviszony

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:
Egyrészt $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:
Egyrészt $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = -\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:
Egyrészt $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = -\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,
másrészt $\overrightarrow{CB} = -\mathbf{c} + \mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + (1 - \beta)\mathbf{b}$

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:
Egyrészt $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = -\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,
másrészt $\overrightarrow{CB} = -\mathbf{c} + \mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + (1 - \beta)\mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:
Egyrészt $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = -\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,
másrészt $\overrightarrow{CB} = -\mathbf{c} + \mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + (1 - \beta)\mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.
Emiatt $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$, így valóban $C \in e$.

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:
Egyrészt $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = -\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,
másrészt $\overrightarrow{CB} = -\mathbf{c} + \mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + (1 - \beta)\mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.
Emiatt $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$, így valóban $C \in e$.
Továbbá $\overrightarrow{AC} = (\beta/\alpha)\overrightarrow{CB}$, ahonnan $(ABC) = \beta/\alpha$.

Súlypont és osztóviszony

Legyen A és B az e egyenes két különböző pontja, **a** és **b** a helyvektoraik.
Állítsuk elő a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kombinációt, ahol $\alpha + \beta = 1$ és $\alpha \neq 0$.
Legyen C az a pont, amelynek **c** a helyvektora.

Tétel

Ekkor $C \in e$ és $(ABC) = \beta/\alpha$.

Bizonyítás:
Egyrészt $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (\alpha - 1)\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = -\beta\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,
másrészt $\overrightarrow{CB} = -\mathbf{c} + \mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + (1 - \beta)\mathbf{b} = -\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.
Emiatt $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$, így valóban $C \in e$.
Továbbá $\overrightarrow{AC} = (\beta/\alpha)\overrightarrow{CB}$, ahonnan $(ABC) = \beta/\alpha$.

Következmény

Ha az A pont súlya α ($\neq 0$), a B pont súlya β, akkor e két pont S súlypontjára $(ABS) = \beta/\alpha$ teljesül.

Súlypont

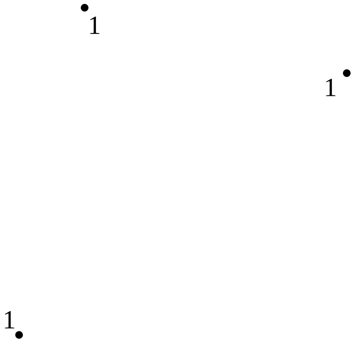
A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Példa:

Tekintsünk három pontot
egyenlő (egységnyi) súlyokkal.

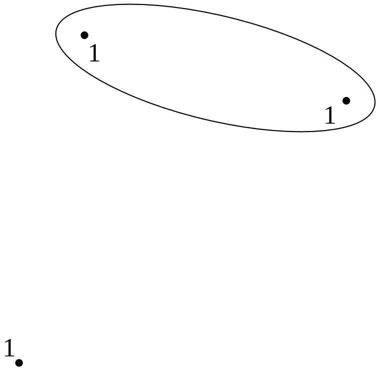


Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Példa:

Tekintsünk három pontot egyenlő (egységnyi) súlyokkal. Válasszunk külön kettőt

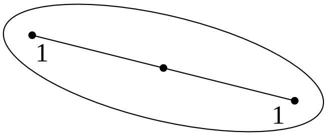


Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Példa:

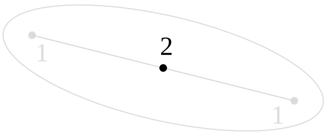
Tekintsünk három pontot egyenlő (egységnyi) súlyokkal. Válasszunk külön kettőt és készítsük el e kettő súlypontját.



Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Példa:

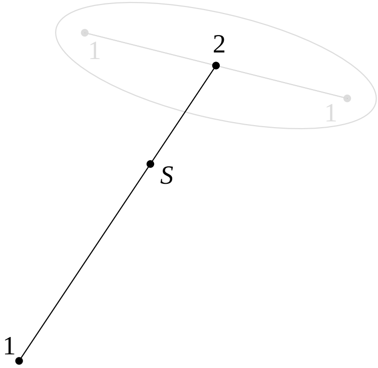


Tekintsünk három pontot egyenlő (egységnyi) súlyokkal. Válasszunk külön kettőt és készítsük el e kettő súlypontját. Ezt a pontot most 2 egységnyi súllyal kell ellátnunk, hogy helyettesítse a kiválasztott két pontot.

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Példa:

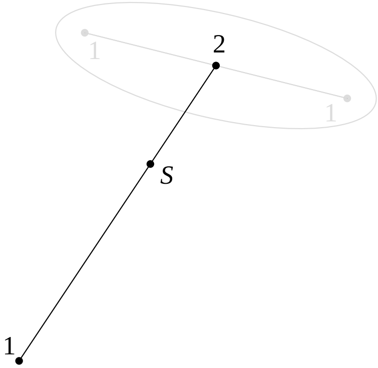


Tekintsünk három pontot egyenlő (egységnyi) súlyokkal. Válasszunk külön kettőt és készítsük el e kettő súlypontját. Ezt a pontot most 2 egységnyi súllyal kell ellátnunk, hogy helyettesítse a kiválasztott két pontot. Készítsük el a harmadik pontból és ebből a kétszeres súlyú pontból álló pontrendszer súlypontját.

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Példa:



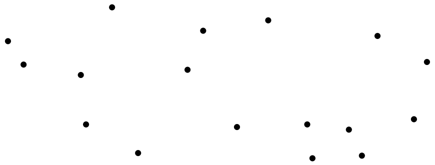
Tekintsünk három pontot egyenlő (egységnyi) súlyokkal. Válasszunk külön kettőt és készítsük el e kettő súlypontját. Ezt a pontot most 2 egységnyi súllyal kell ellátnunk, hogy helyettesítse a kiválasztott két pontot. Készítsük el a harmadik pontból és ebből a kétszeres súlyú pontból álló pontrendszer súlypontját. Így az eredeti pontrendszer súlypontjához jutunk.

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

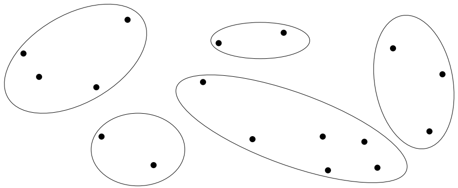


Tétel

Ha egy nem 0 összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

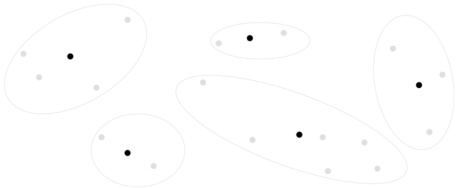


Tétel

Ha egy nem 0 összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer pontjait diszjunkt csoportokba soroljuk úgy, hogy egy-egy csoportban a súlyok összege nem 0,

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

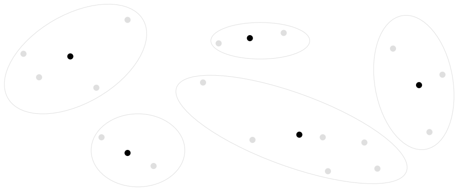


Tétel

Ha egy nem 0 összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer pontjait diszjunkt csoportokba soroljuk úgy, hogy egy-egy csoportban a súlyok összege nem 0, majd mindegyik csoportot helyettesítjük a csoport súlypontjával

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

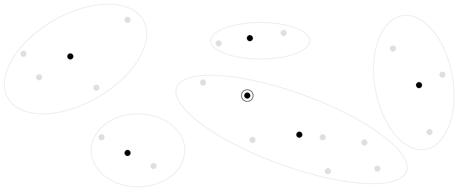


Tétel

Ha egy nem 0 összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer pontjait diszjunkt csoportokba soroljuk úgy, hogy egy-egy csoportban a súlyok összege nem 0, majd mindegyik csoportot helyettesítjük a csoport súlypontjával és ellátjuk a csoportban szereplő súlyok összegével mint súllyal,

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

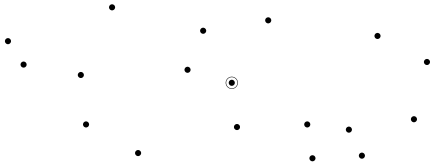


Tétel

Ha egy nem 0 összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer pontjait diszjunkt csoportokba soroljuk úgy, hogy egy-egy csoportban a súlyok összege nem 0, majd mindegyik csoportot helyettesítjük a csoport súlypontjával és ellátjuk a csoportban szereplő súlyok összegével mint súllyal, akkor az így nyert súlyozott pontrendszer súlypontja

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

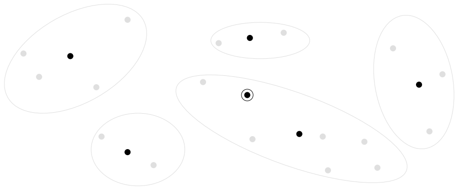


Tétel

Ha egy nem 0 összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer pontjait diszjunkt csoportokba soroljuk úgy, hogy egy-egy csoportban a súlyok összege nem 0, majd mindegyik csoportot helyettesítjük a csoport súlypontjával és ellátjuk a csoportban szereplő súlyok összegével mint súllyal, akkor az így nyert súlyozott pontrendszer súlypontja azonos az eredeti pontrendszer súlypontjával.

Súlypont

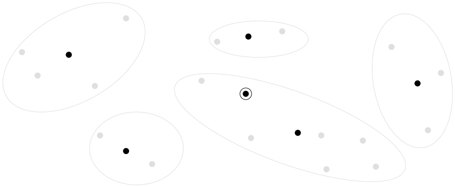
A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:



Miért igaz a tétel?

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

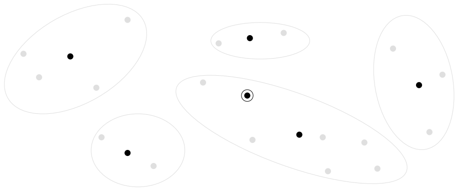


Miért igaz a tétel?

Elegendő egyetlen csoportnak a súlypontjával történő helyettesítésére belátni

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

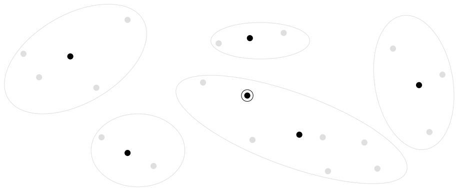


Miért igaz a tétel?

Elegendő egyetlen csoportnak a súlypontjával történő helyettesítésére belátni (ugyanis ezt a lépést többször egymás után alkalmazhatjuk).

Súlypont

A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága:

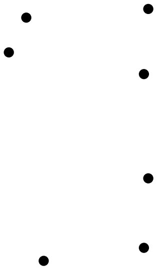


Miért igaz a tétel?

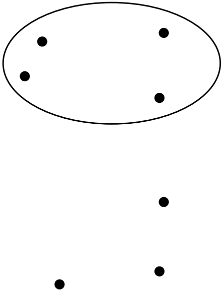
Elegendő egyetlen csoportnak a súlypontjával történő helyettesítésére belátni (ugyanis ezt a lépést többször egymás után alkalmazhatjuk).

Adottak az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ súlyokkal. Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ a pontok helyvektorai.

Súlypont

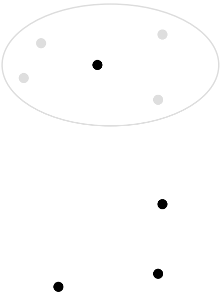


Súlypont



Tegyük föl, hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \neq 0$ és képezzünk csoportot az első k pontból.

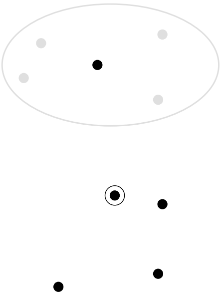
Súlypont



Tegyük föl, hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \neq 0$ és képezzünk csoportot az első k pontból.
Ezek S' súlypontjának helyvektora:

$$\mathbf{s}' = \Bigl(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i\Bigr) \Big/ \Bigl(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\Bigr).$$

Súlypont



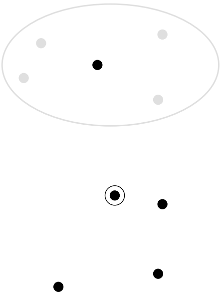
Tegyük föl, hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \neq 0$ és képezzünk csoportot az első k pontból.
Ezek S' súlypontjának helyvektora:

$$\mathbf{s}' = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right).$$

Az S' pont és a maradék A_j pontok alkotta rendszer súlypontjának helyvektora:

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)\mathbf{s}' + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \mathbf{a}_j\right) \Big/ \left(\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) + \left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j\right)\right).$$

Súlypont



Tegyük föl, hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \neq 0$ és képezzünk csoportot az első k pontból.
Ezek S' súlypontjának helyvektora:

$$\mathbf{s}' = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{a}_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right).$$

Az S' pont és a maradék A_j pontok alkotta rendszer súlypontjának helyvektora:

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)\mathbf{s}' + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \mathbf{a}_j\right) \Bigg/ \left(\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) + \left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j\right)\right).$$

Ez valóban megegyezik az eredeti S súlypont

$$\mathbf{s} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$$

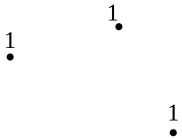
helyvektorával.

Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:

Súlypont

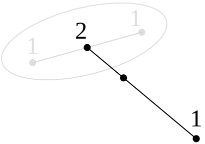
Példák a súlyok csoportosítására:



Három nem kollineáris pont súlypontja

Súlypont

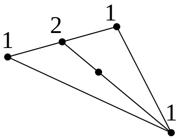
Példák a súlyok csoportosítására:



Három nem kollineáris pont súlypontja

Súlypont

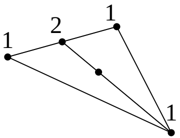
Példák a súlyok csoportosítására:



Három nem kollineáris pont súlypontja harmadolja a háromszög súlyvonalait.

Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:

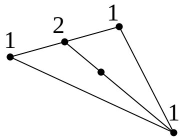


Három nem kollineáris pont súlypontja harmadolja a háromszög súlyvonalait.

Hasonlóan:

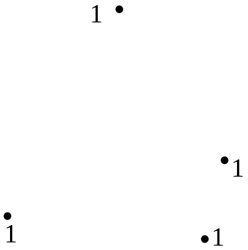
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:



Három nem kollineáris pont súlypontja harmadolja a háromszög súlyvonalait.

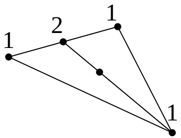
Hasonlóan:



Négy nem egysíkú pont súlypontja

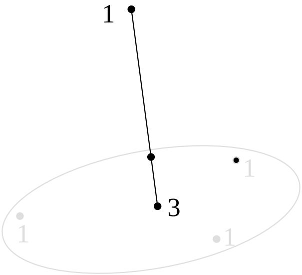
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:



Három nem kollineáris pont súlypontja harmadolja a háromszög súlyvonalait.

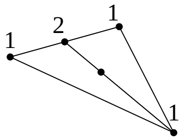
Hasonlóan:



Négy nem egysíkú pont súlypontja

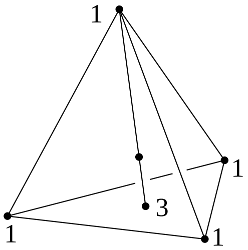
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:



Három nem kollineáris pont súlypontja harmadolja a háromszög súlyvonalait.

Hasonlóan:



Négy nem egysíkú pont súlypontja negyedeli a tetraéder súlyvonalait.

Súlypont

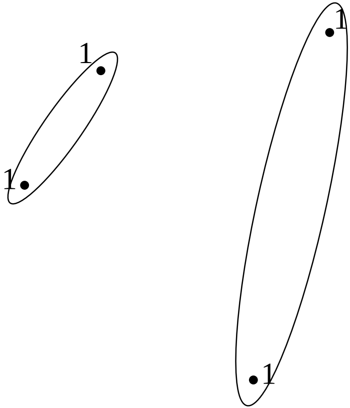
Példák a súlyok csoportosítására:

Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2 + 2$ pontra:

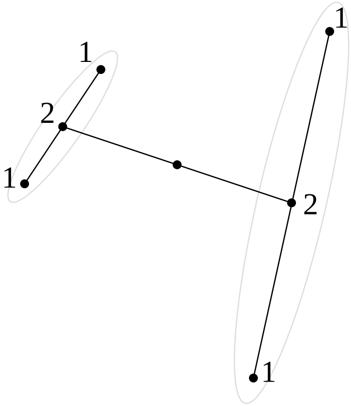
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2+2$ pontra:



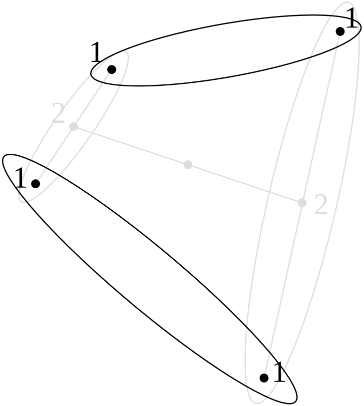
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2 + 2$ pontra:



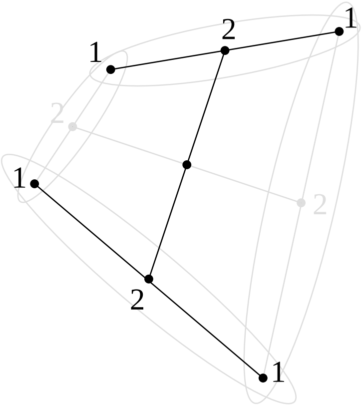
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2 + 2$ pontra:



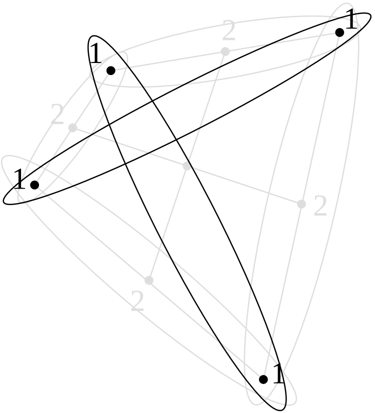
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2+2$ pontra:



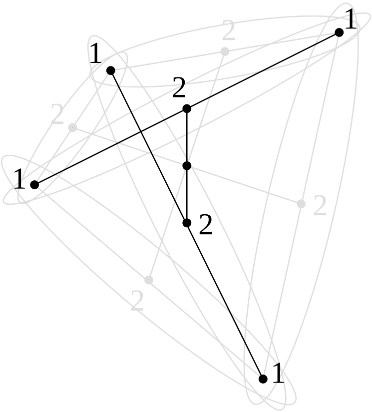
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2 + 2$ pontra:



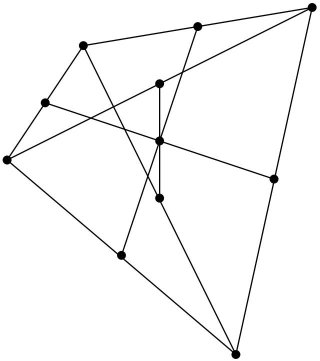
Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2+2$ pontra:



Súlypont

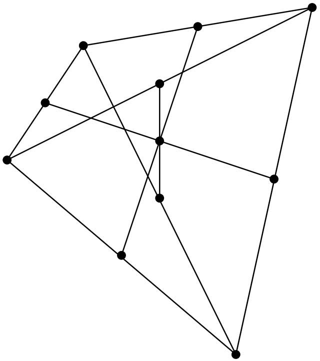
Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2+2$ pontra:



Következmények síkban:

Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2 + 2$ pontra:



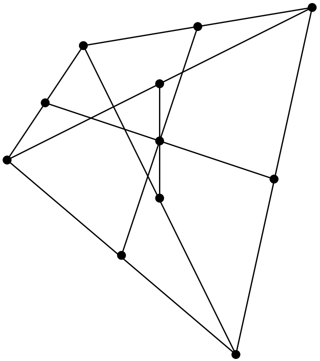
Következmények síkban:

A négyszög szemközti oldalfelező pontjait, illetve az átlók felezőpontjait összekötő szakaszoknak közös a felezőpontja (a csúcsok súlypontja).

Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:

Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2+2$ pontra:



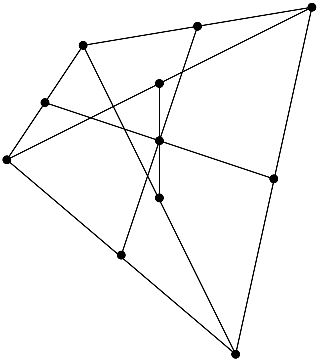
Következmények síkban:

> A négyszög szemközti oldalfelező pontjait, illetve az átlók felezőpontjait összekötő szakaszoknak közös a felezőpontja (a csúcsok súlypontja).

térben:

Súlypont

Példák a súlyok csoportosítására:
Négy pontot háromféleképpen bonthatunk $2 + 2$ pontra:



Következmények síkban:

A négyszög szemközti oldalfelező pontjait, illetve az átlók felezőpontjait összekötő szakaszoknak közös a felezőpontja (a csúcsok súlypontja).

térben:

A tetraéder szemközti élfelező pontjait összekötő szakaszoknak közös a felezőpontja (a súlypont).