Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton
`nmarci@math.elte.hu`

`www.math.elte.hu/~nmarci`

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Skaláris szorzat

Skaláris szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Skaláris szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzatán az

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

számot értjük.

Skaláris szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok
skaláris szorzatán az

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

számot értjük.

Megjegyzések:

Skaláris szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzatán az

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

számot értjük.

Megjegyzések:

- Szokásos jelölések: $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Skaláris szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzatán az

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

számot értjük.

Megjegyzések:

- Szokásos jelölések: $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.
- A skaláris szorzat síkbeli vektorok körében is értelmezve van (speciális esetként is felfogható): $\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Skaláris szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzatán az

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

számot értjük.

Megjegyzések:

- Szokásos jelölések: $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.
- A skaláris szorzat síkbeli vektorok körében is értelmezve van (speciális esetként is felfogható): $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- A koordinátázott egyenesen a vektorok skaláris szorzata ugyanaz, mint a számok (közönséges értelemben vett) szorzata.

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\ \lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\
\lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\
\lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b} \\
\mathbf{aa} &= |\mathbf{a}|^2
\end{aligned}$$

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\ \lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b} \\ \mathbf{aa} &= |\mathbf{a}|^2 \end{aligned}$$

(Megjegyzés: $\mathbf{aa}$ helyett használjuk az $\mathbf{a}^2$ írásmódot is. Tehát $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.)

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\
\lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b} \\
\mathbf{aa} &= |\mathbf{a}|^2
\end{aligned}$$

(Megjegyzés: **aa** helyett használjuk az $\mathbf{a}^2$ írásmódot is.
Tehát $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.)

Mindegyik tulajdonság közvetlenül következik a koordinátás felírásból.

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\
\lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b} \\
\mathbf{aa} &= |\mathbf{a}|^2
\end{aligned}$$

(Megjegyzés: **aa** helyett használjuk az $\mathbf{a}^2$ írásmódot is.
Tehát $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.)

Mindegyik tulajdonság közvetlenül következik a koordinátás felírásból.
Például:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} =$$

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\ \lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b} \\ \mathbf{aa} &= |\mathbf{a}|^2 \end{aligned}$$

(Megjegyzés: $\mathbf{aa}$ helyett használjuk az $\mathbf{a}^2$ írásmódot is.
Tehát $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.)

Mindegyik tulajdonság közvetlenül következik a koordinátás felírásból.
Például:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} = (a_1+a_1')b_1 + (a_2+a_2')b_2 + (a_3+a_3')b_3$$

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\
\lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b} \\
\mathbf{aa} &= |\mathbf{a}|^2
\end{aligned}$$

(Megjegyzés: **aa** helyett használjuk az $\mathbf{a}^2$ írásmódot is.
Tehát $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.)

Mindegyik tulajdonság közvetlenül következik a koordinátás felírásból.
Például:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= (a_1+a_1')b_1+(a_2+a_2')b_2+(a_3+a_3')b_3 \\
&= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1'b_1+a_2'b_2+a_3'b_3)
\end{aligned}$$

Skaláris szorzat

Műveleti tulajdonságok:

$$\begin{aligned}
\mathbf{ab} &= \mathbf{ba} \\
\lambda(\mathbf{ab}) &= (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \\
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b} \\
\mathbf{aa} &= |\mathbf{a}|^2
\end{aligned}$$

(Megjegyzés: **aa** helyett használjuk az $\mathbf{a}^2$ írásmódot is.
Tehát $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.)

Mindegyik tulajdonság közvetlenül következik a koordinátás felírásból.
Például:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\mathbf{b} &= (a_1+a_1')b_1+(a_2+a_2')b_2+(a_3+a_3')b_3 \\
&= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1'b_1+a_2'b_2+a_3'b_3) \\
&= \mathbf{ab}+\mathbf{a}'\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az **a** és **b** vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az **a** és **b** vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az **a** és **b** vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az **a** és **b** vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral,

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az **a** és **b** vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor
$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:
Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.
1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.
  Ezért ekkor valóban

$$\mathbf{ab} \quad =$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.
  Ezért ekkor valóban
  $$\mathbf{ab} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a})$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor
$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:
Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.
1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.
  Ezért ekkor valóban
  $$\mathbf{ab} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.
  Ezért ekkor valóban

$$\mathbf{ab} \quad = \quad \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) \ = \ \lambda\mathbf{a}^2 \ = \ |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|^2 \cdot 1$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor
$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.
  Ezért ekkor valóban
  $$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2 = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|^2 \cdot 1 = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot (|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|) \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha $\lambda > 0$, akkor $\varphi = 0$ és $\cos\varphi = 1$.
  Ezért ekkor valóban

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2 = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|^2 \cdot 1 = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot (|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|) \cdot \cos\varphi = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi. \end{aligned}$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$ és $\cos\varphi = -1$.

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$ és $\cos\varphi = -1$.
  Ekkor is

$$\mathbf{ab} =$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az **a** és **b** vektorok φ szöget zárnak be, akkor
$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:
Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.
1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$ és $\cos\varphi = -1$.
  Ekkor is
  $$\mathbf{ab} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a})$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$ és $\cos\varphi = -1$.
  Ekkor is

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:
Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.
1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$ és $\cos\varphi = -1$.
  Ekkor is
  $$\mathbf{ab} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2 = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|^2 \cdot (-1)$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:
Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.
1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$ és $\cos\varphi = -1$.
  Ekkor is
  $$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2 = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|^2 \cdot (-1) = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot (|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|) \cdot \cos\varphi\end{aligned}$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Bizonyítás:

Különválasztjuk az $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ eseteket.

1. eset: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral, és így $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

- Ha pedig $\lambda < 0$, akkor $\varphi = \pi$ és $\cos\varphi = -1$.
  Ekkor is

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2 = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|^2 \cdot (-1) = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot (|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|) \cdot \cos\varphi = \\ &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.\end{aligned}$$

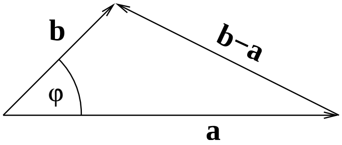
Skaláris szorzat

2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$

Skaláris szorzat

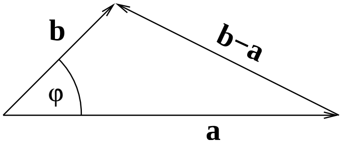
2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$

Ekkor **a** és **b** háromszöget feszít ki:



Skaláris szorzat

2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$
Ekkor **a** és **b** háromszöget feszít ki:

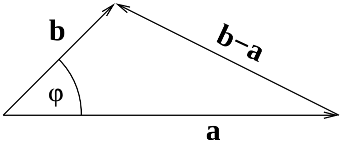


Alkalmazzuk a koszinusztételt:

Skaláris szorzat

2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$

Ekkor **a** és **b** háromszöget feszít ki:

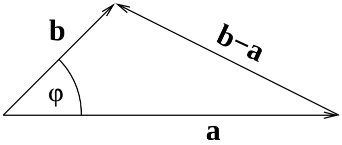


Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$$

Skaláris szorzat

2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$
Ekkor **a** és **b** háromszöget feszít ki:



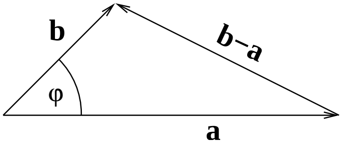
Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi \\ (\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{a}) & \end{aligned}$$

Skaláris szorzat

2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$

Ekkor **a** és **b** háromszöget feszít ki:

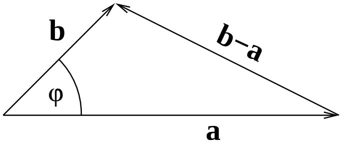


Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi \\ (\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{a}) & \\ \mathbf{bb} - \mathbf{ab} - \mathbf{ba} + \mathbf{aa} & \end{aligned}$$

Skaláris szorzat

2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$
Ekkor **a** és **b** háromszöget feszít ki:

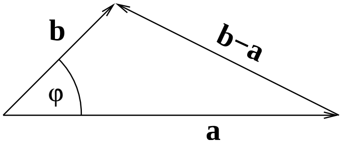


Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\cdot|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi \\ (\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{a}) & \\ \mathbf{bb}-\mathbf{ab}-\mathbf{ba}+\mathbf{aa} & \\ |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{ab} + |\mathbf{a}|^2 & \end{aligned}$$

Skaláris szorzat

2. eset: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$
Ekkor **a** és **b** háromszöget feszít ki:



Alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{b}-\mathbf{a}\right|^2 &= \left|\mathbf{a}\right|^2 + \left|\mathbf{b}\right|^2 - 2\cdot\left|\mathbf{a}\right|\cdot\left|\mathbf{b}\right|\cdot\cos\varphi \\
(\mathbf{b}-\mathbf{a})(\mathbf{b}-\mathbf{a}) & \\
\mathbf{bb}-\mathbf{ab}-\mathbf{ba}+\mathbf{aa} & \\
\left|\mathbf{b}\right|^2 - 2\mathbf{ab} + \left|\mathbf{a}\right|^2 & \\
\mathbf{ab} &= \left|\mathbf{a}\right|\cdot\left|\mathbf{b}\right|\cdot\cos\varphi
\end{aligned}$$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Megjegyzések:

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Megjegyzések:

- A tételben implicite feltettük, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Megjegyzések:

- A tételben implicite feltettük, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (ui. különben nem beszélhetnénk a φ szögről).

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Megjegyzések:

- A tételben implicite feltettük, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (ui. különben nem beszélhetnénk a φ szögről). Szokás a tételbe beleérteni az $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ eseteket is:

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Megjegyzések:

- A tételben implicite feltettük, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (ui. különben nem beszélhetnénk a φ szögről). Szokás a tételbe beleérteni az $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ eseteket is:
  bár φ nincs meghatározva, a jobb oldal mégis $\mathbf{0}$-nak tekinthető,

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Megjegyzések:

- A tételben implicite feltettük, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (ui. különben nem beszélhetnénk a φ szögről). Szokás a tételbe beleérteni az $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ eseteket is:
  bár φ nincs meghatározva, a jobb oldal mégis $\mathbf{0}$-nak tekinthető, hiszen a tényezők között szerepel a 0 szám.

Skaláris szorzat

A skaláris szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Ha az **a** és **b** vektorok φ szöget zárnak be, akkor

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Megjegyzések:

- A tételben implicite feltettük, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (ui. különben nem beszélhetnénk a φ szögről). Szokás a tételbe beleérteni az $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ eseteket is:
  bár φ nincs meghatározva, a jobb oldal mégis **0**-nak tekinthető, hiszen a tényezők között szerepel a 0 szám.
- Az $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$ formulát gyakran a skaláris szorzat definíciójaként használják.

Skaláris szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

Skaláris szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

1. Következmény

A skaláris szorzat értéke nem függ a (Descartes-féle) koordinátarendszer választásától.

Skaláris szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

1. Következmény

A skaláris szorzat értéke nem függ a (Descartes-féle) koordinátarendszer választásától.

2. Következmény

Koordinátáikkal adott vektorok szöge kiszámolható a

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

képlet használatával.

Skaláris szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

1. Következmény

A skaláris szorzat értéke nem függ a (Descartes-féle) koordinátarendszer választásától.

2. Következmény

Koordinátáikkal adott vektorok szöge kiszámolható a

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})\sphericalangle = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

képlet használatával.

3. Következmény

$$\mathbf{ab} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

Skaláris szorzat

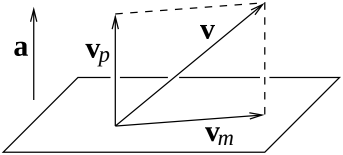
4. Következmény

Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:

Skaláris szorzat

4. Következmény

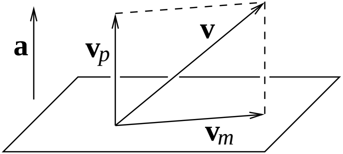
Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:



Skaláris szorzat

4. Következmény

Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:

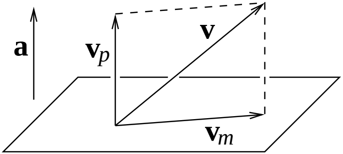


Itt $\mathbf{v}_p = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral.

Skaláris szorzat

4. Következmény

Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:



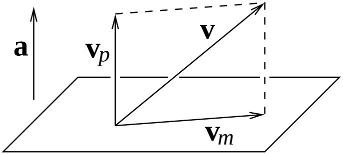
Itt $\mathbf{v}_p = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral.
Először meghatározzuk λ-t:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_m$$

Skaláris szorzat

4. Következmény

Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:



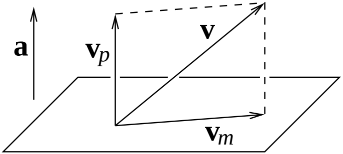
Itt $\mathbf{v}_p = \lambda \mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral.
Először meghatározzuk λ-t:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_m \\
\mathbf{av} &= \mathbf{av}_p + \mathbf{av}_m,
\end{aligned}
$$

Skaláris szorzat

4. Következmény

Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:



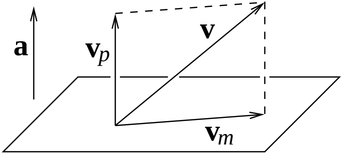
Itt $\mathbf{v}_p = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral.
Először meghatározzuk λ-t:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_m \\ \mathbf{a}\mathbf{v} &= \mathbf{a}\mathbf{v}_p + \mathbf{a}\mathbf{v}_m, \quad \mathbf{a}\mathbf{v}_m = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Skaláris szorzat

4. Következmény

Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:



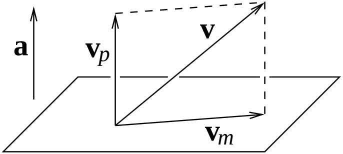
Itt $\mathbf{v}_p = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral.
Először meghatározzuk λ-t:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_m \\
\mathbf{av} &= \mathbf{av}_p + \mathbf{av}_m, \qquad \mathbf{av}_m = \mathbf{0} \\
\mathbf{av} &= \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2
\end{aligned}$$

Skaláris szorzat

4. Következmény

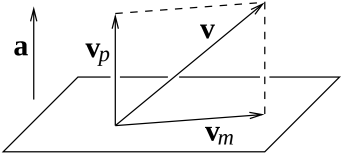
Képletet kaphatunk vektornak adott vektorral párhuzamos összetevőjére:



Itt $\mathbf{v}_p = \lambda\mathbf{a}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral.
Először meghatározzuk λ-t:

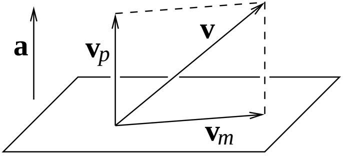
$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_m \\
\mathbf{av} &= \mathbf{av}_p + \mathbf{av}_m, \qquad \mathbf{av}_m = \mathbf{0} \\
\mathbf{av} &= \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}^2 \\
\lambda &= \frac{\mathbf{av}}{\mathbf{a}^2}
\end{aligned}$$

Skaláris szorzat



Tehát itt $\mathbf{v}_p = \lambda\mathbf{a}$, ahol $\lambda = \dfrac{\mathbf{av}}{\mathbf{a}^2}$

Skaláris szorzat



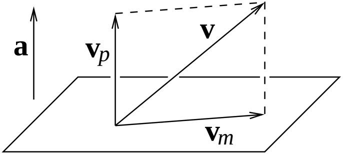
Tehát itt $\mathbf{v}_p = \lambda \mathbf{a}$, ahol $\lambda = \dfrac{\mathbf{av}}{\mathbf{a}^2}$

Ezzel:

$$\mathbf{v}_p = \frac{\mathbf{av}}{\mathbf{a}^2} \cdot \mathbf{a}$$

Speciális eset: ha $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, akkor

Skaláris szorzat



Tehát itt $\mathbf{v}_p = \lambda\mathbf{a}$, ahol $\lambda = \dfrac{\mathbf{av}}{\mathbf{a}^2}$

Ezzel:

$$\mathbf{v}_p = \frac{\mathbf{av}}{\mathbf{a}^2} \cdot \mathbf{a}$$

Speciális eset: ha $\mathbf{a} = \mathbf{e}$ egységvektor, akkor

$$\mathbf{v}_p = (\mathbf{ev})\mathbf{e}$$

Vektoriális szorzat

Vektoriális szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Vektoriális szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok
vektoriális szorzatán az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2b_3 - a_3b_2 \,,\, a_3b_1 - a_1b_3 \,,\, a_1b_2 - a_2b_1 \,)$$

vektort értjük.

Vektoriális szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzatán az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1 \,)$$

vektort értjük.

Megjegyzés:

Vektoriális szorzat

Rögzítsünk egy Descartes-féle koordinátarendszert.

Definíció

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzatán az

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1 \,)$$

vektort értjük.

Megjegyzés:

A vektoriális szorzást csak térben értelmezzük; ennek a műveletnek síkbeli megfelelője nincs.

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1 \,)$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1 \,)$$

Észrevétel:

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1 \,)$$

Észrevétel:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad = \quad \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \,,\, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \,,\, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2 \, , \, a_3b_1 - a_1b_3 \, , \, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Észrevétel:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2b_3 - a_3b_2 \,,\, a_3b_1 - a_1b_3 \,,\, a_1b_2 - a_2b_1 \,)$$

Észrevétel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} , -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\, a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\, a_1 b_2 - a_2 b_1 \,)$$

Észrevétel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} , -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Megjegyzés:
A determinánsos alak a vektoriális szorzat koordinátás előállításának a legkönnyebben megjegyezhető változata.

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok (rögtön következnek a determináns tulajdonságaiból):

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok (rögtön következnek a determináns tulajdonságaiból):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad = \quad -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok (rögtön következnek a determináns tulajdonságaiból):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok (rögtön következnek a determináns tulajdonságaiból):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a}' \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok (rögtön következnek a determináns tulajdonságaiból):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a}' \times \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{b}') &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}' \end{aligned}$$

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok (rögtön következnek a determináns tulajdonságaiból):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a}' \times \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{b}') &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}' \end{aligned}$$

Észrevétel: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$,

Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok (rögtön következnek a determináns tulajdonságaiból):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a}' \times \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{b}') &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}' \end{aligned}$$

Észrevétel: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$,
sőt, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ esetén is $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az **a** és **b** vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az **a** és **b** vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az **a** és **b** által kifeszített síkra;

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra;

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$;

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra;

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin \varphi$;

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra;

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$;

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra;

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$;

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A (ii) egyenlőség fennáll $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ esetén is.

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra;

(ii) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$;

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A (ii) egyenlőség fennáll $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ esetén is.
- Az $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ esetben az (i), (ii), (iii) tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort,

Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat geometriai jellemzése:

Tétel

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok nem párhuzamosak és φ szöget zárnak be. Ekkor:

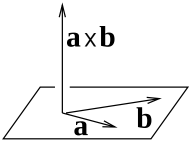
(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra;

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$;

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Megjegyzések (bizonyítás előtt):

- A (ii) egyenlőség fennáll $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ esetén is.
- Az $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ esetben az (i), (ii), (iii) tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort, ezért ezek $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ definíciójául is szolgálhatnak.



Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Elég ellenőrizni, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra.

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Elég ellenőrizni, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra.

Ehhez elég belátni, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b} = 0$.

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Elég ellenőrizni, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra.

Ehhez elég belátni, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b} = 0$.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} \quad =$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Elég ellenőrizni, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra.

Ehhez elég belátni, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b} = 0$.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot a_3$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Elég ellenőrizni, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra.

Ehhez elég belátni, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b} = 0$.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot a_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Elég ellenőrizni, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra.

Ehhez elég belátni, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b} = 0$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot a_3 = \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített síkra.

Elég ellenőrizni, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra.

Ehhez elég belátni, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b} = 0$.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot a_3 = \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

(Hasonlóan kezelhető $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{b}$ is.)

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$

$$\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|^2 =$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$

$$\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 \end{aligned}$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\
&= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2
\end{aligned}
$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\
&= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
(\mathbf{ab})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2
\end{aligned}
$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\
&= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
(\mathbf{ab})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\
&= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + \\
&\quad + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3
\end{aligned}
$$

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi$

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\
&= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + \\
&\quad + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\
(\mathbf{ab})^2 &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \\
&= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + \\
&\quad + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_2 a_3 b_2 b_3
\end{aligned}$$

Összeadva:

Vektoriális szorzat

Bizonyítás:

(ii) $\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right|\cdot\left|\mathbf{b}\right|\cdot\sin\varphi$

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + \\
&\quad + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + \\
&\quad + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
(\mathbf{ab})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\
&= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + \\
&\quad + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3
\end{aligned}$$

Összeadva: $\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2 + (\mathbf{ab})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$.

Vektoriális szorzat

$$\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right|^2 + (\mathbf{ab})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Vektoriális szorzat

$$\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2+(\mathbf{ab})^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

Azaz:

$$\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2+\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2\cos^2\varphi=\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2,$$

Vektoriális szorzat

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2+(\mathbf{ab})^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

Azaz:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\varphi=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2,$$

ahonnan

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 \quad = \quad |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\varphi$$

Vektoriális szorzat

$$\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2+(\mathbf{ab})^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

Azaz:

$$\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2+\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2\cos^2\varphi=\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2 &= \left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2-\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2\cos^2\varphi = \\ &= \left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2(1-\cos^2\varphi)\end{aligned}$$

Vektoriális szorzat

$$\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2+(\mathbf{ab})^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

Azaz:

$$\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2+\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2\cos^2\varphi=\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|^2 &= \left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2-\left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2\cos^2\varphi \;= \\ &= \left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2(1-\cos^2\varphi) \;= \\ &= \left|\mathbf{a}\right|^2\left|\mathbf{b}\right|^2\sin^2\varphi.\end{aligned}$$

Miután pozitív mennyiségek négyzetei szerepelnek, négyzetgyököt vonhatunk és a (ii) állítás adódik.

Vektoriális szorzat

Még bizonyítani kell:

Vektoriális szorzat

Még bizonyítani kell:

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Vektoriális szorzat

Még bizonyítani kell:

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Segédtétel

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok ebben a sorrendben pontosan akkor alkotnak jobbsodrású rendszert, ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Vektoriális szorzat

Még bizonyítani kell:

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású bázist alkotnak.

Segédtétel

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok ebben a sorrendben pontosan akkor alkotnak jobbsodrású rendszert, ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Miért igaz a segédtétel?

Vektoriális szorzat

Tegyük fel, hogy **a**, **b** és **c** nem egysíkú vektorok.

Vektoriális szorzat

Tegyük fel, hogy **a**, **b** és **c** nem egysíkú vektorok.

Kíséreljük meg az **a**, **b**, **c** vektorok alkotta koordinátarendszert az **i**, **j**, **k** koordinátarendszerbe folytonosan átdeformálni úgy, hogy közben egyetlen pillanatra se essen a három vektor egy síkba.

Vektoriális szorzat

Tegyük fel, hogy **a**, **b** és **c** nem egysíkú vektorok.

Kíséreljük meg az **a**, **b**, **c** vektorok alkotta koordinátarendszert az **i**, **j**, **k** koordinátarendszerbe folytonosan átdeformálni úgy, hogy közben egyetlen pillanatra se essen a három vektor egy síkba.

(Tudjuk, hogy ez pontosan akkor végezhető el, ha az **a**, **b**, **c** vektorrendszer jobbsodrású.)

Vektoriális szorzat

1. lépés: Elérhetjük, hogy **a** egyirányú legyen **i**-vel (akár merev mozgással is).

Vektoriális szorzat

1. lépés: Elérhetjük, hogy **a** egyirányú legyen **i**-vel (akár merev mozgással is).

2. lépés: Az **i** egyenese körüli forgatással elérhetjük, hogy **b** az **i**-**j** síkban feküdjön és ugyanabba a félsíkba mutasson, mint **j**.

Vektoriális szorzat

1. lépés: Elérhetjük, hogy **a** egyirányú legyen **i**-vel (akár merev mozgással is).

2. lépés: Az **i** egyenese körüli forgatással elérhetjük, hogy **b** az **i**-**j** síkban feküdjön és ugyanabba a félsíkba mutasson, mint **j**.

3. lépés: Ebben a félsíkban **b**-t mozgatva elérhetjük, hogy **b** egyirányú legyen **j**-vel.

Vektoriális szorzat

1. lépés: Elérhetjük, hogy **a** egyirányú legyen **i**-vel (akár merev mozgással is).

2. lépés: Az **i** egyenese körüli forgatással elérhetjük, hogy **b** az **i**-**j** síkban feküdjön és ugyanabba a félsíkba mutasson, mint **j**.

3. lépés: Ebben a félsíkban **b**-t mozgatva elérhetjük, hogy **b** egyirányú legyen **j**-vel.

4. lépés: A **c** vektor valamelyik nyílt féltérbe esik az **i**-**j** sík szerint; ebben a féltérben mozgatva elérhetjük, hogy párhuzamos legyen **k**-val.

Vektoriális szorzat

1. lépés: Elérhetjük, hogy **a** egyirányú legyen **i**-vel (akár merev mozgással is).

2. lépés: Az **i** egyenese körüli forgatással elérhetjük, hogy **b** az **i**-**j** síkban feküdjön és ugyanabba a félsíkba mutasson, mint **j**.

3. lépés: Ebben a félsíkban **b**-t mozgatva elérhetjük, hogy **b** egyirányú legyen **j**-vel.

4. lépés: A **c** vektor valamelyik nyílt féltérbe esik az **i**-**j** sík szerint; ebben a féltérben mozgatva elérhetjük, hogy párhuzamos legyen **k**-val.

5. lépés: Végül alkalmas nyújtásokkal **a**, **b**, **c**-t egységvektorokká alakítjuk.

(Ezek a lépések valóban folytonos deformációkat írnak le, melyek során a vektorrendszer mindvégig bázis marad.)

Vektoriális szorzat

A deformáció során az eredeti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bázistól eljutottunk vagy az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, vagy pedig az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ bázishoz.

Vektoriális szorzat

A deformáció során az eredeti **a**, **b**, **c** bázistól eljutottunk vagy az **i**, **j**, **k**, vagy pedig az **i**, **j**, $-$**k** bázishoz.

Akkor érkeztünk meg **i**, **j**, **k**-hoz, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer volt, és akkor jutottunk **i**, **j**, $-$**k**-ba, ha **a**, **b**, **c** balrendszer volt.

Vektoriális szorzat

A deformáció során az eredeti **a**, **b**, **c** bázistól eljutottunk vagy az **i**, **j**, **k**, vagy pedig az **i**, **j**, $-$**k** bázishoz.

Akkor érkeztünk meg **i**, **j**, **k**-hoz, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer volt, és akkor jutottunk **i**, **j**, $-$**k**-ba, ha **a**, **b**, **c** balrendszer volt.

A deformáció során az **a**, **b**, **c** koordinátáiból alkotott determináns folytonosan változott, így nem válthatott előjelet, hiszen nem vehette fel a 0 értéket (hiszen a három vektor minden pillanatban bázist alkotott). Az **i**, **j**, **k**-hoz tartozó determináns 1, az **i**, **j**, $-$**k**-hoz tartozó pedig -1.

Vektoriális szorzat

A deformáció során az eredeti **a**, **b**, **c** bázistól eljutottunk vagy az **i**, **j**, **k**, vagy pedig az **i**, **j**, $-$**k** bázishoz.

Akkor érkeztünk meg **i**, **j**, **k**-hoz, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer volt, és akkor jutottunk **i**, **j**, $-$**k**-ba, ha **a**, **b**, **c** balrendszer volt.

A deformáció során az **a**, **b**, **c** koordinátáiból alkotott determináns folytonosan változott, így nem válthatott előjelet, hiszen nem vehette fel a 0 értéket (hiszen a három vektor minden pillanatban bázist alkotott). Az **i**, **j**, **k**-hoz tartozó determináns 1, az **i**, **j**, $-$**k**-hoz tartozó pedig -1.

Tehát: az **a**, **b**, **c** vektorok koordinátáiból alkotott determináns pontosan akkor pozitív, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer.

Vektoriális szorzat

A deformáció során az eredeti **a**, **b**, **c** bázistól eljutottunk vagy az **i**, **j**, **k**, vagy pedig az **i**, **j**, $-$**k** bázishoz.

Akkor érkeztünk meg **i**, **j**, **k**-hoz, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer volt, és akkor jutottunk **i**, **j**, $-$**k**-ba, ha **a**, **b**, **c** balrendszer volt.

A deformáció során az **a**, **b**, **c** koordinátáiból alkotott determináns folytonosan változott, így nem válthatott előjelet, hiszen nem vehette fel a 0 értéket (hiszen a három vektor minden pillanatban bázist alkotott). Az **i**, **j**, **k**-hoz tartozó determináns 1, az **i**, **j**, $-$**k**-hoz tartozó pedig -1.

Tehát: az **a**, **b**, **c** vektorok koordinátáiból alkotott determináns pontosan akkor pozitív, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer.

Ezzel a segédtételt beláttuk.

Vektoriális szorzat

A deformáció során az eredeti **a**, **b**, **c** bázistól eljutottunk vagy az **i**, **j**, **k**, vagy pedig az **i**, **j**, $-$**k** bázishoz.

Akkor érkeztünk meg **i**, **j**, **k**-hoz, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer volt, és akkor jutottunk **i**, **j**, $-$**k**-ba, ha **a**, **b**, **c** balrendszer volt.

A deformáció során az **a**, **b**, **c** koordinátáiból alkotott determináns folytonosan változott, így nem válthatott előjelet, hiszen nem vehette fel a 0 értéket (hiszen a három vektor minden pillanatban bázist alkotott). Az **i**, **j**, **k**-hoz tartozó determináns 1, az **i**, **j**, $-$**k**-hoz tartozó pedig -1.

Tehát: az **a**, **b**, **c** vektorok koordinátáiból alkotott determináns pontosan akkor pozitív, ha **a**, **b**, **c** jobbrendszer.

Ezzel a segédtételt beláttuk.

Ugyanilyen állítás érvényes két vektorra a síkban, illetve egy vektorra az egyenesen.

Vektoriális szorzat

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Vektoriális szorzat

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:

Vektoriális szorzat

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

Vektoriális szorzat

(iii) **a**, **b**, **a** $\times$ **b** (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az **a**, **b** és **c** $=$ **a** $\times$ **b** vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

Vektoriális szorzat

(iii) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{(a harmadik sor szerint kifejtve)} =$$

Vektoriális szorzat

(iii) **a**, **b**, **a** $\times$ **b** (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az **a**, **b** és **c** $=$ **a** $\times$ **b** vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{(a harmadik sor szerint kifejtve)} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

Vektoriális szorzat

(iii) **a**, **b**, **a** $\times$ **b** (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az **a**, **b** és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{(a harmadik sor szerint kifejtve)} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$$

Vektoriális szorzat

(iii) **a**, **b**, **a** $\times$ **b** (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az **a**, **b** és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{(a harmadik sor szerint kifejtve)} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$$

Vektoriális szorzat

(iii) **a**, **b**, **a** $\times$ **b** (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az **a**, **b** és $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{(a harmadik sor szerint kifejtve)} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$$

A segédtétel szerint tehát **a**, **b**, **a** $\times$ **b** jobbsodrású bázis.

Vektoriális szorzat

(iii) **a**, **b**, **a** $\times$ **b** (ebben a sorrendben) jobbsodrású koordinátarendszer alapvektorai.

Bizonyítás:
Tekintsük az **a**, **b** és **c** $=$ **a** $\times$ **b** vektorok koordinátáiból alkotott determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{(a harmadik sor szerint kifejtve)} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$$

A segédtétel szerint tehát **a**, **b**, **a** $\times$ **b** jobbsodrású bázis.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

1. Következmény

A vektoriális szorzat eredménye nem függ a (Descartes-féle) koordinátarendszer választásától.

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

1. Következmény

A vektoriális szorzat eredménye nem függ a (Descartes-féle) koordinátarendszer választásától.

2. Következmény

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

1. Következmény

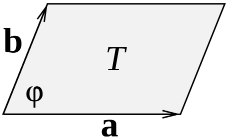
A vektoriális szorzat eredménye nem függ a (Descartes-féle) koordinátarendszer választásától.

2. Következmény

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

3. Következmény

Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor hossza egyenlő az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített parallelogramma területével:
$\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \cdot \sin\varphi = T.$



Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

4. Következmény

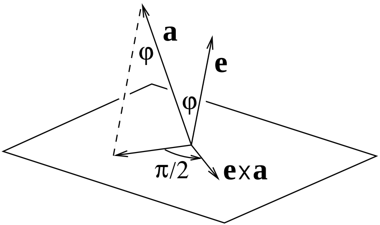
$|\mathbf{e}| = 1$ esetén az $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ vektoriális szorzat geometriai származtatása:

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

4. Következmény

$|\mathbf{e}| = 1$ esetén az $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ vektoriális szorzat geometriai származtatása:



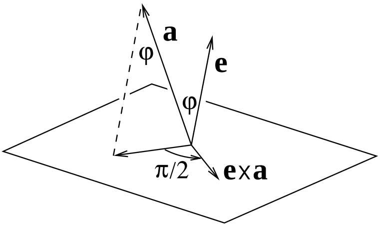
Az **a** vektort először merőlegesen levetítjük az **e**-re merőleges síkra,

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

4. Következmény

$|\mathbf{e}| = 1$ esetén az $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ vektoriális szorzat geometriai származtatása:



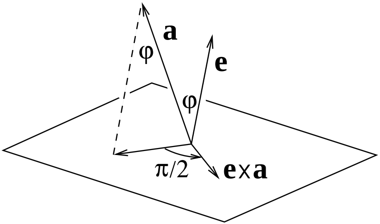
Az **a** vektort először merőlegesen levetítjük az **e**-re merőleges síkra, majd ebben a síkban **e** felől nézve pozitív forgásirányban derékszöggel elforgatjuk.

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

4. Következmény

$|\mathbf{e}| = 1$ esetén az $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ vektoriális szorzat geometriai származtatása:



Az **a** vektort először merőlegesen levetítjük az **e**-re merőleges síkra, majd ebben a síkban **e** felől nézve pozitív forgásirányban derékszöggel elforgatjuk.

Valóban, az így előállított vektor teljesíti a tételbeli (i), (ii), (iii) feltételek mindegyikét.

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

5. Következmény

Bármely $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egységvektorra merőleges összetevője:

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}.$$

Vektoriális szorzat

A geometriai jellemzés következményei:

5. Következmény

Bármely $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egységvektorra merőleges összetevője:

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}.$$

Alkalmazzuk ugyanis kétszer az előző eredményt:

Vektoriális szorzat

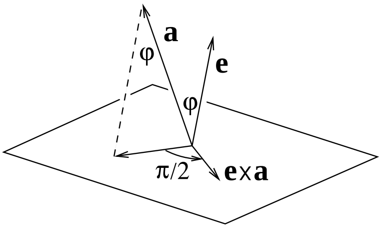
A geometriai jellemzés következményei:

5. Következmény

Bármely **a** vektornak az **e** egységvektorra merőleges összetevője:

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}.$$

Alkalmazzuk ugyanis kétszer az előző eredményt:



Vektoriális szorzat

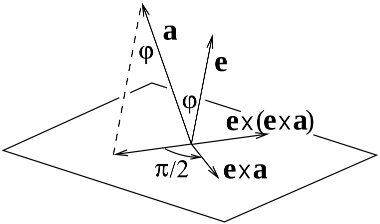
A geometriai jellemzés következményei:

5. Következmény

Bármely **a** vektornak az **e** egységvektorra merőleges összetevője:

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}.$$

Alkalmazzuk ugyanis kétszer az előző eredményt:



Vektoriális szorzat

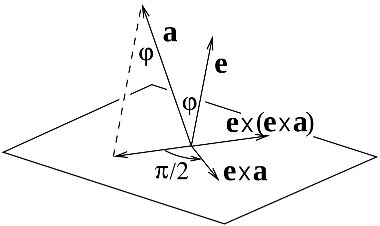
A geometriai jellemzés következményei:

5. Következmény

Bármely **a** vektornak az **e** egységvektorra merőleges összetevője:

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}.$$

Alkalmazzuk ugyanis kétszer az előző eredményt:



Leolvasható, hogy $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a}_m$, ahonnan $\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$ következik.

Vektoriális szorzat

Megjegyzések:

Vektoriális szorzat

Megjegyzések:

- Az alapvektorok vektoriális szorzatai:

Vektoriális szorzat

Megjegyzések:

- Az alapvektorok vektoriális szorzatai:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

Vektoriális szorzat

Megjegyzések:

- Az alapvektorok vektoriális szorzatai:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

Vektoriális szorzat

Megjegyzések:

- Az alapvektorok vektoriális szorzatai:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Vektoriális szorzat

Megjegyzések:

- Az alapvektorok vektoriális szorzatai:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

- A vektoriális szorzás nem asszociatív művelet:

Vektoriális szorzat

Megjegyzések:

- Az alapvektorok vektoriális szorzatai:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

- A vektoriális szorzás nem asszociatív művelet: például

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \text{de} \quad \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{0}.$$