

---

# Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton

[nmarci@math.elte.hu](mailto:nmarci@math.elte.hu)

[www.math.elte.hu/~nmarci](http://www.math.elte.hu/~nmarci)

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest



# A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- **Vektorgeometria**
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

# Koordinátarendszer

# Koordinátarendszer

Egyenesen:

# Koordinátarendszer

Egyenesen:

## Definíció

Az egyenes **koordinátarendszerén** az egyenesnek az  $\mathbb{R}$  számegyenessel való konkrét azonosítását értjük.

# Koordinátarendszer

Egyenesen:

## Definíció

Az egyenes **koordinátarendszerén** az egyenesnek az  $\mathbb{R}$  számegyenessel való konkrét azonosítását értjük.

Ehhez elegendő a 0 és 1 pontokat kijelölni:



# Koordinátarendszer

Egyenesen:

## Definíció

Az egyenes **koordinátarendszerén** az egyenesnek az  $\mathbb{R}$  számegyenessel való konkrét azonosítását értjük.

Ehhez elegendő a 0 és 1 pontokat kijelölni:



ezután az előjeles távolságmérés azonosítja az egyenest  $\mathbb{R}$ -rel.

# Koordinátarendszer

Egyenesen:

## Definíció

Az egyenes **koordinátarendszerén** az egyenesnek az  $\mathbb{R}$  számegyenessel való konkrét azonosítását értjük.

Ehhez elegendő a 0 és 1 pontokat kijelölni:



ezután az előjeles távolságmérés azonosítja az egyenest  $\mathbb{R}$ -rel.

Bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén az  $x$  és az  $y$  pont közötti előjeles távolság:  
 $y - x$ .

# Koordinátarendszer

Egyenesen:

## Definíció

Az egyenes **koordinátarendszerén** az egyenesnek az  $\mathbb{R}$  számegyenessel való konkrét azonosítását értjük.

Ehhez elegendő a 0 és 1 pontokat kijelölni:



ezután az előjeles távolságmérés azonosítja az egyenest  $\mathbb{R}$ -rel.

Bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén az  $x$  és az  $y$  pont közötti előjeles távolság:  $y - x$ .

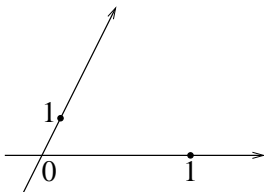
A koordinátarendszer felvétele az egyenes irányítását is rögzíti.

# Koordinátarendszer

Síkban:

# Koordinátarendszer

Síkban:

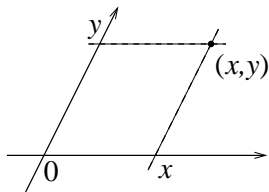


## Definíció

Síkbeli **koordinátarendszer**: két, koordinátákkal ellátott metsző egyenes, amelyek közös pontja mindkét egyenesen a kezdőpont.

# Koordináta-rendszer

Síkban:



## Definíció

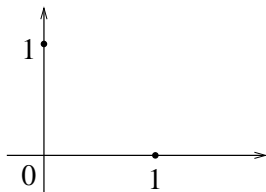
Síkbeli **koordináta-rendszer**: két, koordinátákkal ellátott metsző egyenes, amelyek közös pontja mindkét egyenesen a kezdőpont.

## Definíció

A pontok **koordinátáit** a tengelyekkel párhuzamosan húzott egyenesek metszik ki.

# Koordinátarendszer

Síkban:



## Definíció

Síkbeli **koordinátarendszer**: két, koordinátákkal ellátott metsző egyenes, amelyek közös pontja mindkét egyenesen a kezdőpont.

## Definíció

A pontok **koordinátáit** a tengelyekkel párhuzamosan húzott egyenesek metszik ki.

## Definíció

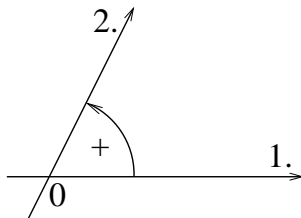
**Descartes-féle** koordinátarendszer: a tengelyek merőlegesek és a távolságegység egyenlő a két tengelyen.

# Koordinátarendszer

A síkban a koordinátarendszer felvétele (és a tengelyek sorrendje) a sík irányítását is rögzíti:

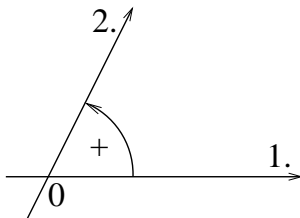
# Koordinátarendszer

A síkban a koordinátarendszer felvétele (és a tengelyek sorrendje) a sík irányítását is rögzíti:



# Koordináta-rendszer

A síkban a koordináta-rendszer felvétele (és a tengelyek sorrendje) a sík irányítását is rögzíti:



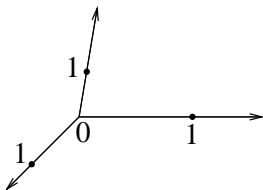
Pozitív forgásirány: az első tengely pozitív félegyenesét a második tengely pozitív félegyenesébe vivő  $\pi$ -nél kisebb forgatás iránya.

# Koordinátarendszer

Térben:

# Koordinátarendszer

Térben:

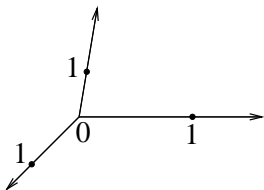


## Definíció

Térbeli **koordinátarendszer**: három, közös ponton áthaladó, nem egy síkban fekvő egyenes, amelyek metszéspontja mindhárom egyenesen a kezdőpont.

# Koordinátarendszer

Térben:



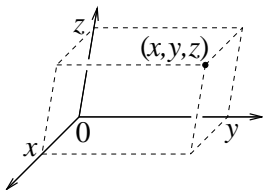
## Definíció

Térbeli **koordinátarendszer**: három, közös ponton áthaladó, nem egy síkban fekvő egyenes, amelyek metszéspontja mindhárom egyenesen a kezdőpont.

**Koordinátasíkok**: a tengelyek által páronként kifeszített síkok.

# Koordináta-rendszer

Térben:



## Definíció

Térbeli **koordináta-rendszer**: három, közös ponton áthaladó, nem egy síkban fekvő egyenes, amelyek metszéspontja mindhárom egyenesen a kezdőpont.

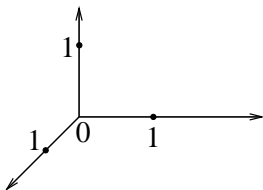
**Koordináta-síkok**: a tengelyek által páronként kifeszített síkok.

## Definíció

A pontok **koordinátáit** a koordináta-síkokkal párhuzamos síkok metszik ki.

# Koordinátarendszer

Térben:



## Definíció

Térbeli **koordinátarendszer**: három, közös ponton áthaladó, nem egy síkban fekvő egyenes, amelyek metszéspontja mindhárom egyenesen a kezdőpont.

**Koordinátasíkok**: a tengelyek által páronként kifeszített síkok.

## Definíció

A pontok **koordinátáit** a koordinátasíkokkal párhuzamos síkok metszik ki.

## Definíció

**Descartes-féle** koordinátarendszer: a tengelyek páronként merőlegesek és a távolságegység a három tengelyen egyenlő.

# Irányítás a térben

# Irányítás a térben

Szemléletesen:

# Irányítás a térben

Szemléletesen:

A tapasztalati térben felvett koordinátarendszert **pozitív irányításúnak**

# Irányítás a térben

Szemléletesen:

A tapasztalati térben felvett koordinátarendszert **pozitív irányításúnak** (**jobbsodrású rendszernek**) mondjuk, ha:

# Irányítás a térben

Szemléletesen:

A tapasztalati térben felvett koordinátarendszert **pozitív irányításúnak** (**jobbsodrású rendszernek**) mondjuk, ha:

- a tengelyek sorrendjét is rögzítjük, és emellett

# Irányítás a térben

Szemléletesen:

A tapasztalati térben felvett koordinátarendszert **pozitív irányításúnak** (**jobbsodrású rendszernek**) mondjuk, ha:

- a tengelyek sorrendjét is rögzítjük, és emellett
- jobb kezünk első három ujja természetes tartással rendre a három tengely pozitív irányába tud mutatni.

# Irányítás a térben

Szemléletesen:

A tapasztalati térben felvett koordinátarendszert **pozitív irányításúnak** (**jobbsodrású rendszernek**) mondjuk, ha:

- a tengelyek sorrendjét is rögzítjük, és emellett
- jobb kezünk első három ujjja természetes tartással rendre a három tengely pozitív irányába tud mutatni.

Ha a koordinátarendszer nem ilyen (azaz a bal kezünk első három ujjja jobban illeszkedik hozzá), akkor **negatív irányításúnak** vagy (**balsodrású rendszernek**) mondjuk.

# Irányítás a térben, precízebben

# Irányítás a térben, precízebben

A matematikai térben csak valamely rögzített koordinátarendszerhez **viszonyítva** beszélhetünk pozitív, illetve negatív (azaz: jobbsodrású, illetve balsodrású) koordinátarendszerről:

# Irányítás a térben, precízebben

A matematikai térben csak valamely rögzített koordinátarendszerhez **viszonyítva** beszélhetünk pozitív, illetve negatív (azaz: jobbsodrású, illetve balsodrású) koordinátarendszeréről:

Két térbeli koordinátarendszer megegyező sodrású (vagy megegyező **irányítású**), ha:

# Irányítás a térben, precízebben

A matematikai térben csak valamely rögzített koordináta-rendszerhez **viszonyítva** beszélhetünk pozitív, illetve negatív (azaz: jobbsodrású, illetve balsodrású) koordináta-rendszeréről:

Két térbeli koordináta-rendszer megegyező sodrású (vagy megegyező **irányítású**), ha:

az egyik a másikba átvihető olyan deformációval, amelynek során a tengelyek szöge és a távolságegységek folytonosan változhatnak, de a három egyenes mindvégig koordináta-rendszert alkot (azaz egyetlen pillanatra sem eshet egy síkba).

# Irányítás a térben, precízebben

A matematikai térben csak valamely rögzített koordinátarendszerhez **viszonyítva** beszélhetünk pozitív, illetve negatív (azaz: jobbsodrású, illetve balsodrású) koordinátarendszeréről:

Két térbeli koordinátarendszer megegyező sodrású (vagy megegyező **irányítású**), ha:

az egyik a másikba átvihető olyan deformációval, amelynek során a tengelyek szöge és a távolságegységek folytonosan változhatnak, de a három egyenes mindvégig koordinátarendszert alkot (azaz egyetlen pillanatra sem eshet egy síkba).

Az egymással megegyező irányítású koordinátarendszereknek pontosan két osztálya van. Azt mondjuk, hogy a teret **irányítással** látjuk el, ha az egyik osztályt kiszemeljük és pozitívnak tekintjük.

# Koordinátarendszer

A koordinátarendszer rögzítésével bijektív megfeleltetéseket kaptunk:

# Koordinátarendszer

A koordinátarendszer rögzítésével bijektív megfeleltetéseket kaptunk:

$$\text{egyenes} \longleftrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sík} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{tér} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$$

# Koordinátarendszer

A koordinátarendszer rögzítésével bijektív megfeleltetéseket kaptunk:

$$\text{egyenes} \longleftrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sík} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{tér} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$$

Elnevezések:  $\mathbb{R}$  számegyenes  
 $\mathbb{R}^2$  koordinátasík  
 $\mathbb{R}^3$  koordinátatér

# Koordinátarendszer

A koordinátarendszer rögzítésével bijektív megfeleltetéseket kaptunk:

$$\text{egyenes} \longleftrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{sík} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{tér} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$$

Elnevezések:  $\mathbb{R}$  számegyenes  
 $\mathbb{R}^2$  koordinátasík  
 $\mathbb{R}^3$  koordinátatér

A továbbiakban a  $P = (x_1, x_2, x_3)$  formula jelöli azt, hogy a  $P$  pont koordinátái az  $x_1, x_2, x_3$  számok.

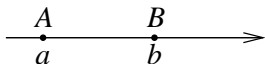
# Pontok távolsága

# Pontok távolsága

Descartes-féle koordinátarendszerben:

# Pontok távolsága

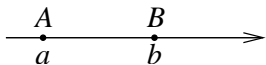
Descartes-féle koordinátarendszerben:



Egyenesen:

# Pontok távolsága

Descartes-féle koordináta-rendszerben:

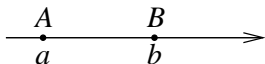


Egyenesen:

$$d(A, B) = |b - a| = \sqrt{(b - a)^2}$$

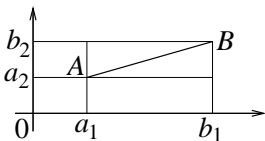
# Pontok távolsága

Descartes-féle koordinátarendszerben:



Egyenesen:

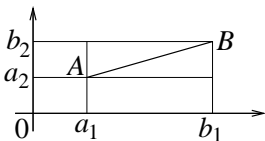
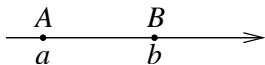
$$d(A, B) = |b - a| = \sqrt{(b - a)^2}$$



Síkban:

# Pontok távolsága

Descartes-féle koordináta-rendszerben:



Egyenesen:

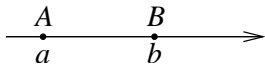
$$d(A, B) = |b - a| = \sqrt{(b - a)^2}$$

Síkban:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

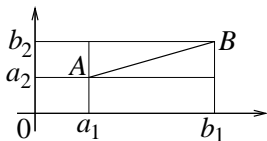
# Pontok távolsága

Descartes-féle koordináta-rendszerben:



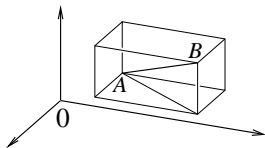
Egyenesen:

$$d(A, B) = |b - a| = \sqrt{(b - a)^2}$$



Síkban:

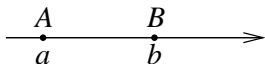
$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Térben:

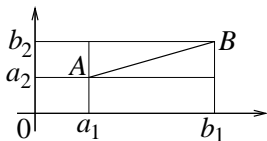
# Pontok távolsága

Descartes-féle koordináta-rendszerben:



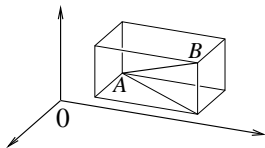
Egyenesen:

$$d(A, B) = |b - a| = \sqrt{(b - a)^2}$$



Síkban:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

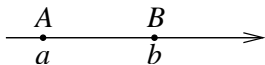


Térben:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

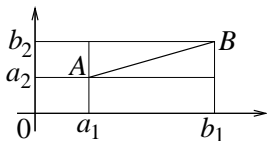
# Pontok távolsága

Descartes-féle koordináta-rendszerben:



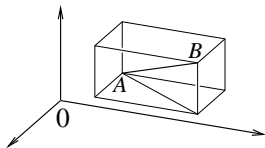
Egyenesen:

$$d(A, B) = |b - a| = \sqrt{(b - a)^2}$$



Síkban:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Térben:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

(Pitagorasz-tétel)

# Vektorok bevezetése

# Vektorok bevezetése

Megjegyzés:

Egyszerre beszélhetünk az egyenes, a sík, illetve a tér vektorairól, ugyanis az előbbieket felfoghatók a tér valamely rögzített egyeneséhez, illetve síkjához tartozó vektorokként.

# Vektorok bevezetése

## Definíció

A tér irányított szakaszait **vektoroknak** nevezzük azzal a megállapodással, hogy:

# Vektorok bevezetése

## Definíció

A tér irányított szakaszait **vektoroknak** nevezzük azzal a megállapodással, hogy:

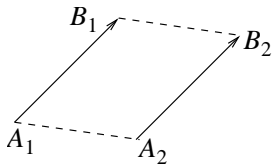
**nem teszünk különbséget** az  $A_1B_1$  és az  $A_2B_2$  irányított szakasz mint vektor között, ha létezik olyan eltolás, amelynél  $A_1 \mapsto A_2$  és  $B_1 \mapsto B_2$ .

# Vektorok bevezetése

## Definíció

A tér irányított szakaszait **vektoroknak** nevezzük azzal a megállapodással, hogy:

**nem teszünk különbséget** az  $A_1B_1$  és az  $A_2B_2$  irányított szakasz mint vektor között, ha létezik olyan eltolás, amelynél  $A_1 \mapsto A_2$  és  $B_1 \mapsto B_2$ .



Azaz:

$$\text{ha } d(A_1, B_1) = d(A_2, B_2)$$

és az  $A_1B_1, A_2B_2$  félegyenesek egyirányúak.

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**,

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve: ekvivalencia-osztályozás.

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve: ekvivalencia-osztályozás.

A séma:

Először megmondjuk, mely dolgokat kívánunk ekvivalensnek tekinteni

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve: ekvivalencia-osztályozás.

A séma:

Először megmondjuk, mely dolgokat kívánunk ekvivalensnek tekinteni (a konkrét esetben az egymásba eltolható irányított szakaszokat),

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve: ekvivalencia-osztályozás.

A séma:

Először megmondjuk, mely dolgokat kívánunk ekvivalensnek tekinteni (a konkrét esetben az egymásba eltolható irányított szakaszokat), majd az ekvivalenciaosztályokat képezzük

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve:  
ekvivalencia-osztályozás.

A séma:

Először megmondjuk, mely dolgokat kívánunk ekvivalensnek tekinteni (a konkrét esetben az egymásba eltolható irányított szakaszokat),

majd az ekvivalenciaosztályokat képezzük (a konkrét esetben ezek lesznek a vektorok).

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve:  
ekvivalencia-osztályozás.

A séma:

Először megmondjuk, mely dolgokat kívánunk ekvivalensnek tekinteni (a konkrét esetben az egymásba eltolható irányított szakaszokat), majd az ekvivalenciaosztályokat képezzük (a konkrét esetben ezek lesznek a vektorok).

Hasonló matematikai konstrukciók pl.:

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve: ekvivalencia-osztályozás.

A séma:

Először megmondjuk, mely dolgokat kívánunk ekvivalensnek tekinteni (a konkrét esetben az egymásba eltolható irányított szakaszokat),

majd az ekvivalenciaosztályokat képezzük (a konkrét esetben ezek lesznek a vektorok).

Hasonló matematikai konstrukciók pl.:

- kongruencia modulo  $m$   $\rightsquigarrow$  maradékosztályok,

# Vektorok bevezetése: ekvivalenciaosztályok

A **vektor** tehát nem ugyanazt jelenti, mint az **irányított szakasz**, hanem irányított szakaszok egy egész osztálya tartozik egy vektorhoz.

Ennek a matematikai konstrukciónak a neve:  
ekvivalencia-osztályozás.

A séma:

Először megmondjuk, mely dolgokat kívánunk ekvivalensnek tekinteni (a konkrét esetben az egymásba eltolható irányított szakaszokat),

majd az ekvivalenciaosztályokat képezzük (a konkrét esetben ezek lesznek a vektorok).

Hasonló matematikai konstrukciók pl.:

- kongruencia modulo  $m \rightsquigarrow$  maradékosztályok,
- koordinátarendszerek azonos sodrású volta  $\rightsquigarrow$  irányítás.

# Vektorok

Jelölések, elnevezések:

# Vektorok

Jelölések, elnevezések:

Az  $AB$  irányított szakaszhoz tartozó vektort  $\overrightarrow{AB}$  jelöli.

# Vektorok

Jelölések, elnevezések:

Az  $AB$  irányított szakaszhoz tartozó vektort  $\overrightarrow{AB}$  jelöli.

Használjuk a  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  jelölést is.

# Vektorok

Jelölések, elnevezések:

Az  $AB$  irányított szakaszhoz tartozó vektort  $\overrightarrow{AB}$  jelöli.

Használjuk a  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  jelölést is.

(Nyomtatásban vastag betű, kézírásban aláhúzás:  $\mathbf{v} = \underline{v} = \overrightarrow{AB}$ .)

# Vektorok

Jelölések, elnevezések:

Az  $AB$  irányított szakaszhoz tartozó vektort  $\overrightarrow{AB}$  jelöli.

Használjuk a  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  jelölést is.

(Nyomtatásban vastag betű, kézírásban aláhúzás:  $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB}$ .)

Az  $AB$  irányított szakaszt a  $\mathbf{v}$  vektor egy **reprezentánsának** mondjuk.

# Vektorok

Jelölések, elnevezések:

Az  $AB$  irányított szakaszhoz tartozó vektort  $\overrightarrow{AB}$  jelöli.

Használjuk a  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  jelölést is.

(Nyomtatásban vastag betű, kézírásban aláhúzás:  $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{v}} = \underline{\overrightarrow{AB}}$ .)

Az  $AB$  irányított szakaszt a  $\mathbf{v}$  vektor egy **reprezentánsának** mondjuk.

Pl.: bármely  $A$  pontra  $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$  a **nullvektor**.

# Szabad vektor, helyvektor

A most bevezetett vektorfogalom az ún. „szabad vektor” fogalma.

# Szabad vektor, helyvektor

A most bevezetett vektorfogalom az ún. „szabad vektor” fogalma. Az elnevezés arra utal, hogy a vektort reprezentáló irányított szakasz kezdőpontja bárhol, szabadon felvehető.

# Szabad vektor, helyvektor

A most bevezetett vektorfogalom az ún. „**szabad vektor**” fogalma. Az elnevezés arra utal, hogy a vektort reprezentáló irányított szakasz kezdőpontja bárhol, szabadon felvehető.

Szokás ún. „**helyvektorokat**” is használni, amelyeknél a kezdőpont rögzítve van.

# Szabad vektor, helyvektor

A most bevezetett vektorfogalom az ún. „**szabad vektor**” fogalma. Az elnevezés arra utal, hogy a vektort reprezentáló irányított szakasz kezdőpontja bárhol, szabadon felvehető.

Szokás ún. „**helyvektorokat**” is használni, amelyeknél a kezdőpont rögzítve van.

Bármely  $\mathbf{v}$  vektorhoz és  $O$  ponthoz egyértelműen található olyan  $P$  pont, hogy  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$ .

# Szabad vektor, helyvektor

A most bevezetett vektorfogalom az ún. „**szabad vektor**” fogalma. Az elnevezés arra utal, hogy a vektort reprezentáló irányított szakasz kezdőpontja bárhol, szabadon felvehető.

Szokás ún. „**helyvektorokat**” is használni, amelyeknél a kezdőpont rögzítve van.

Bármely  $\mathbf{v}$  vektorhoz és  $O$  ponthoz egyértelműen található olyan  $P$  pont, hogy  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$ .

Ez az összefüggés bijektív kapcsolatot létesít a (szabad) vektorok halmaza és a rögzített  $O$  kezdőpontú irányított szakaszok (azaz helyvektorok) halmaza között.

# Szabad vektor, helyvektor

A most bevezetett vektorfogalom az ún. „szabad vektor” fogalma. Az elnevezés arra utal, hogy a vektort reprezentáló irányított szakasz kezdőpontja bárhol, szabadon felvehető.

Szokás ún. „helyvektorokat” is használni, amelyeknél a kezdőpont rögzítve van.

Bármely  $\mathbf{v}$  vektorhoz és  $O$  ponthoz egyértelműen található olyan  $P$  pont, hogy  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$ .

Ez az összefüggés bijektív kapcsolatot létesít a (szabad) vektorok halmaza és a rögzített  $O$  kezdőpontú irányított szakaszok (azaz helyvektorok) halmaza között.

A helyvektorok pedig (a végpont hozzárendelése útján) bijektív kapcsolatban állnak a tér pontjaival.

# Vektorok állása

# Vektorok állása

Legyenek  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$  nullvektortól különböző vektorok.

# Vektorok állása

Legyenek  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$  nullvektortól különböző vektorok.

Azt mondjuk, hogy  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$

- **párhuzamos**, ha  $AB \parallel CD$ ;

# Vektorok állása

Legyenek  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$  nullvektortól különböző vektorok.

Azt mondjuk, hogy  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$

- **párhuzamos**, ha  $AB \parallel CD$ ;  
ezen belül:

# Vektorok állása

Legyenek  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$  nullvektortól különböző vektorok.

Azt mondjuk, hogy  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$

- **párhuzamos**, ha  $AB \parallel CD$ ;  
ezen belül:
  - **egyirányú**, ha az  $AB$  és a  $CD$  félegyenes egyirányú,

# Vektorok állása

Legyenek  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$  nullvektortól különböző vektorok.

Azt mondjuk, hogy  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$

- **párhuzamos**, ha  $AB \parallel CD$ ;  
ezen belül:
  - **egyirányú**, ha az  $AB$  és a  $CD$  félegyenes egyirányú,
  - **ellentétes irányú**, ha az  $AB$  és a  $CD$  félegyenes ellentétes irányú,

# Vektorok állása

Legyenek  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$  nullvektortól különböző vektorok.

Azt mondjuk, hogy  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$

- **párhuzamos**, ha  $AB \parallel CD$ ;  
ezen belül:
  - **egyirányú**, ha az  $AB$  és a  $CD$  félegyenes egyirányú,
  - **ellentétes irányú**, ha az  $AB$  és a  $CD$  félegyenes ellentétes irányú,
- **merőleges**, ha  $AB \perp CD$ .

# Vektorok állása

Legyenek  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$  nullvektortól különböző vektorok.

Azt mondjuk, hogy  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$

- **párhuzamos**, ha  $AB \parallel CD$ ;  
ezen belül:
  - **egyirányú**, ha az  $AB$  és a  $CD$  félegyenes egyirányú,
  - **ellentétes irányú**, ha az  $AB$  és a  $CD$  félegyenes ellentétes irányú,
- **merőleges**, ha  $AB \perp CD$ .

(Megjegyzés: a definíciók korrektek, mert a feltételek nem függenek a reprezentánsok ( $AB$  és  $CD$ ) választásától, csak a vektoroktól.)

# Vektorok állása

Hasonlóan definiáljuk vektornak egyenessel vagy síkkal vett párhuzamosságát, merőlegességét is.

# Vektorok állása

Hasonlóan definiáljuk vektornak egyenessel vagy síkkal vett párhuzamosságát, merőlegességét is.

Vektorok egy rendszerét **egysíkú**nak mondjuk, ha létezik olyan sík amellyel mindegyik vektor párhuzamos.

# Vektorok állása

Hasonlóan definiáljuk vektornak egyenessel vagy síkkal vett párhuzamosságát, merőlegességét is.

Vektorok egy rendszerét **egysíkú**nak mondjuk, ha létezik olyan sík amellyel mindegyik vektor párhuzamos.

Megállapodás: a **0** nullvektor bármely vektorral (egyenessel, síkkal) párhuzamos és ugyanakkor bármely vektorra (egyenesre, síkra) merőleges is.

# Vektorok állása

Hasonlóan definiáljuk vektornak egyenessel vagy síkkal vett párhuzamosságát, merőlegességét is.

Vektorok egy rendszerét **egysíkú**nak mondjuk, ha létezik olyan sík amellyel mindegyik vektor párhuzamos.

Megállapodás: a **0** nullvektor bármely vektorral (egyenessel, síkkal) párhuzamos és ugyanakkor bármely vektorra (egyenesre, síkra) merőleges is.

(Azt mondjuk, hogy **0** határozatlan irányú.)

# Vektorok szöge, hossza

# Vektorok szöge, hossza

Definíció: két vektor szöge

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$ .

# Vektorok szöge, hossza

## Definíció: két vektor szöge

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor:

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle =$  az  $AB$  és az  $AC$  félegyenes által bezárt szög.

# Vektorok szöge, hossza

## Definíció: két vektor szöge

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor:

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle =$  az  $AB$  és az  $AC$  félegyenes által bezárt szög.

Ha  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  vagy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , akkor az  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle$  szöget **nem** értelmezzük.

# Vektorok szöge, hossza

## Definíció: két vektor szöge

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor:

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle =$  az  $AB$  és az  $AC$  félegyenes által bezárt szög.

Ha  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  vagy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , akkor az  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle$  szöget **nem** értelmezzük.

## Definíció: vektor hossza

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ .

# Vektorok szöge, hossza

## Definíció: két vektor szöge

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor:

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle =$  az  $AB$  és az  $AC$  félegyenes által bezárt szög.

Ha  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  vagy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , akkor az  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle$  szöget **nem** értelmezzük.

## Definíció: vektor hossza

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ . Ekkor:

$|\mathbf{u}| = d(A, B)$ .

# Vektorok szöge, hossza

## Definíció: két vektor szöge

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor:

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle =$  az  $AB$  és az  $AC$  félegyenes által bezárt szög.

Ha  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  vagy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , akkor az  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle$  szöget **nem** értelmezzük.

## Definíció: vektor hossza

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ . Ekkor:

$|\mathbf{u}| = d(A, B)$ .

Pl. a nullvektor hossza 0 (és a nullvektor az egyetlen ilyen vektor).

# Vektorok szöge, hossza

## Definíció: két vektor szöge

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor:

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle =$  az  $AB$  és az  $AC$  félegyenes által bezárt szög.

Ha  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  vagy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , akkor az  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \sphericalangle$  szöget **nem** értelmezzük.

## Definíció: vektor hossza

Legyen  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ . Ekkor:

$|\mathbf{u}| = d(A, B)$ .

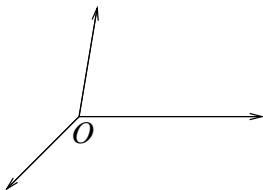
Pl. a nullvektor hossza 0 (és a nullvektor az egyetlen ilyen vektor).

A  $\mathbf{v}$  vektort **egységvektornak** nevezzük, ha  $|\mathbf{v}| = 1$ .

# Vektorok koordinátái

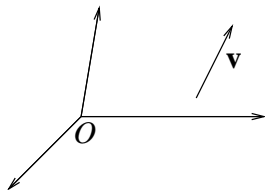
# Vektorok koordinátái

Rögzítsünk egy  $O$  kezdőpontú koordinátarendszert.



# Vektorok koordinátái

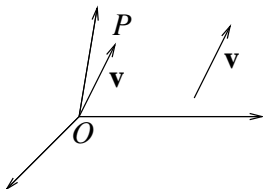
Rögzítsünk egy  $O$  kezdőpontú koordinátarendszert.



Tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektorhoz

# Vektorok koordinátái

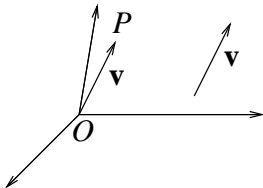
Rögzítsünk egy  $O$  kezdőpontú koordinátarendszert.



Tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektorhoz tekintsük azt a  $P$  pontot, amelyre  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$

# Vektorok koordinátái

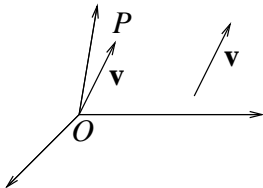
Rögzítsünk egy  $O$  kezdőpontú koordinátarendszert.



Tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektorhoz tekintsük azt a  $P$  pontot, amelyre  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$ , és  $\mathbf{v}$  koordinátáin értsük a  $P$  pont koordinátáit.

# Vektorok koordinátái

Rögzítsünk egy  $O$  kezdőpontú koordinátarendszert.

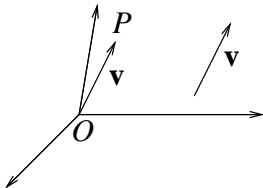


Tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektorhoz tekintsük azt a  $P$  pontot, amelyre  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$ , és  $\mathbf{v}$  koordinátáin értsük a  $P$  pont koordinátáit.

Ezáltal bijektív megfeleltetést nyertünk a vektorok halmaza és  $\mathbb{R}^3$  (illetve az egyenes esetében  $\mathbb{R}$ , sík esetében  $\mathbb{R}^2$ ) között.

# Vektorok koordinátái

Rögzítsünk egy  $O$  kezdőpontú koordináta-rendszert.



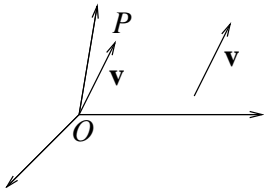
Tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektorhoz tekintsük azt a  $P$  pontot, amelyre  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$ , és  $\mathbf{v}$  koordinátáin értsük a  $P$  pont koordinátáit.

Ezáltal bijektív megfeleltetést nyertünk a vektorok halmaza és  $\mathbb{R}^3$  (illetve az egyenes esetében  $\mathbb{R}$ , sík esetében  $\mathbb{R}^2$ ) között.

Általában, ha  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  és  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ , akkor  
$$\mathbf{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

# Vektorok koordinátái

Rögzítsünk egy  $O$  kezdőpontú koordináta-rendszert.



Tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektorhoz tekintsük azt a  $P$  pontot, amelyre  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$ , és  $\mathbf{v}$  koordinátáin értsük a  $P$  pont koordinátáit.

Ezáltal bijektív megfeleltetést nyertünk a vektorok halmaza és  $\mathbb{R}^3$  (illetve az egyenes esetében  $\mathbb{R}$ , sík esetében  $\mathbb{R}^2$ ) között.

Általában, ha  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$  és  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ , akkor

$$\mathbf{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Ha a koordináta-rendszer Descartes-féle, akkor a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor hossza

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

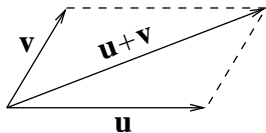
# Vektorműveletek

# Vektorműveletek

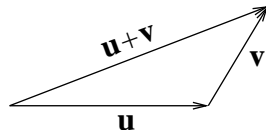
Összeadás:

# Vektorműveletek

Összeadás:

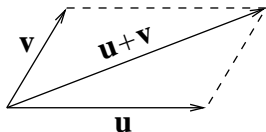


vagy

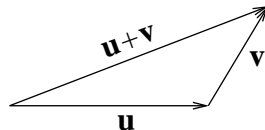


# Vektorműveletek

Összeadás:



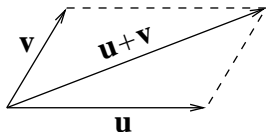
vagy



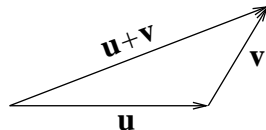
Koordinátákkal:

# Vektorműveletek

Összeadás:



vagy



Koordinátákkal:

Legyen  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , ekkor

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

(Mindegyik koordinátatengelyen irányított szakaszok előjeles hossza adódik össze.)

# Vektorműveletek

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám;

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám; három esetet tekintünk:

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám; három esetet tekintünk:

$\lambda > 0$ :

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám; három esetet tekintünk:

$\lambda > 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  egyirányú  $\mathbf{v}$ -vel  
és  $|\lambda\mathbf{v}| = \lambda \cdot |\mathbf{v}|$ ,



# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám; három esetet tekintünk:

$\lambda > 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  egyirányú  $\mathbf{v}$ -vel  
és  $|\lambda\mathbf{v}| = \lambda \cdot |\mathbf{v}|$ ,



$\lambda = 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

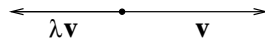
Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám; három esetet tekintünk:

$\lambda > 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  egyirányú  $\mathbf{v}$ -vel  
és  $|\lambda\mathbf{v}| = \lambda \cdot |\mathbf{v}|$ ,



$\lambda = 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,

$\lambda < 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  ellentétes irányú  
 $\mathbf{v}$ -vel és  $|\lambda\mathbf{v}| = -\lambda \cdot |\mathbf{v}|$ .



(Jelölés:  $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ )

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

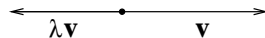
Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám; három esetet tekintünk:

$\lambda > 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  egyirányú  $\mathbf{v}$ -vel  
és  $|\lambda\mathbf{v}| = \lambda \cdot |\mathbf{v}|$ ,



$\lambda = 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,

$\lambda < 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  ellentétes irányú  
 $\mathbf{v}$ -vel és  $|\lambda\mathbf{v}| = -\lambda \cdot |\mathbf{v}|$ .



(Jelölés:  $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ )

Koordinátákkal:

# Vektorműveletek

Szorzás skalárral (azaz valós számmal):

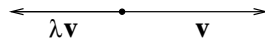
Adott a  $\mathbf{v}$  vektor és a  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám; három esetet tekintünk:

$\lambda > 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  egyirányú  $\mathbf{v}$ -vel  
és  $|\lambda\mathbf{v}| = \lambda \cdot |\mathbf{v}|$ ,



$\lambda = 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,

$\lambda < 0$ : ekkor  $\lambda\mathbf{v}$  ellentétes irányú  
 $\mathbf{v}$ -vel és  $|\lambda\mathbf{v}| = -\lambda \cdot |\mathbf{v}|$ .



(Jelölés:  $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$ )

Koordinátákkal:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ esetén } \lambda\mathbf{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$$

# Vektorműveletek

# Vektorműveletek

## Műveleti tulajdonságok

# Vektorműveletek

Műveleti tulajdonságok (mind nyilvánvaló):

# Vektorműveletek

Műveleti tulajdonságok (mind nyilvánvaló):

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

$$(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$

$$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

# Vektorműveletek

Műveleti tulajdonságok (mind nyilvánvaló):

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

$$(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$

$$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Ezek a tulajdonságok mutatják, hogy a vektorok ezekre a műveletekre nézve **vektorteret** alkotnak a valós számtest fölött

# Vektorműveletek

Műveleti tulajdonságok (mind nyilvánvaló):

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

$$(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$$

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$

$$(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Ezek a tulajdonságok mutatják, hogy a vektorok ezekre a műveletekre nézve **vektorteret** alkotnak a valós számtest fölött (ld. algebra).

# Bázis

# Bázis

## Definíció

Vektorok egy rendszerét **bázis**nak nevezük, ha bármely vektor egyértelműen felírható ezek lineáris kombinációjaként (azaz: skalárszorosainak összegeként)

# Bázis

## Definíció

Vektorok egy rendszerét **bázis**nak nevezünk, ha bármely vektor egyértelműen felírható ezek lineáris kombinációjaként (azaz: skalárszorosainak összegeként) (ld. algebra).

Például:

# Bázis

## Definíció

Vektorok egy rendszerét **bázis**nak nevezük, ha bármely vektor egyértelműen felírható ezek lineáris kombinációjaként (azaz: skalárszorosainak összegeként) (ld. algebra).

Például:

- Az egyenes vektorai számára bázist alkot bármelyik  $\neq \mathbf{0}$  vektor.

# Bázis

## Definíció

Vektorok egy rendszerét **bázis**nak nevezük, ha bármely vektor egyértelműen felírható ezek lineáris kombinációjaként (azaz: skalárszorosainak összegeként) (ld. algebra).

Például:

- Az egyenes vektorai számára bázist alkot bármelyik  $\neq \mathbf{0}$  vektor.
- A sík vektorai számára bázist alkot bármely két nem párhuzamos vektor.

# Bázis

## Definíció

Vektorok egy rendszerét **bázis**nak nevezünk, ha bármely vektor egyértelműen felírható ezek lineáris kombinációjaként (azaz: skalárszorosainak összegeként) (ld. algebra).

Például:

- Az egyenes vektorai számára bázist alkot bármelyik  $\neq \mathbf{0}$  vektor.
- A sík vektorai számára bázist alkot bármely két nem párhuzamos vektor.
- A tér vektorai számára bázist alkot bármely három nem egysíkú vektor.

# Bázisok és koordinátarendszerek

# Bázisok és koordinátarendszerek

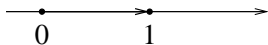
Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist

# Bázisok és koordinátarendszerek

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist (a koordinátarendszer **alapsvektorait**):

# Bázisok és koordinátarendszerek

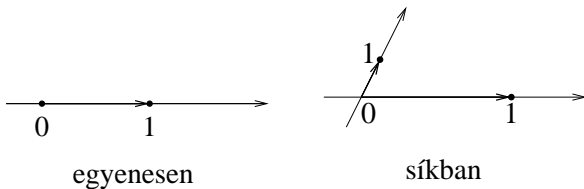
Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist (a koordinátarendszer **alapsvektorait**):



egyenesen

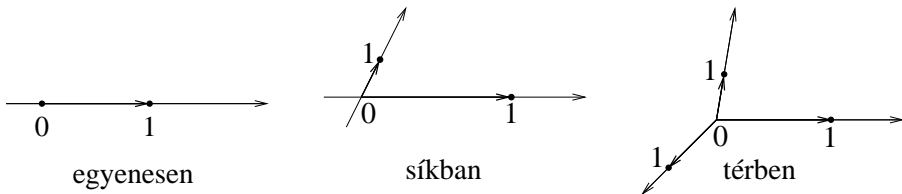
# Bázisok és koordinátarendszerek

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist (a koordinátarendszer **alvektorait**):



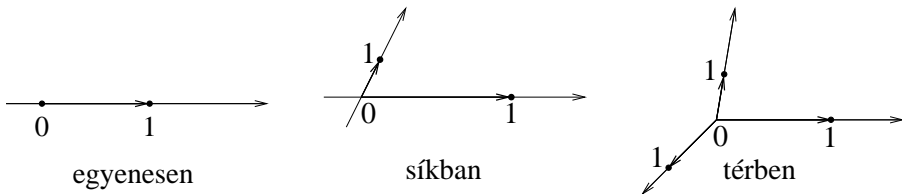
# Bázisok és koordinátarendszerek

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist (a koordinátarendszer **alapsvektorait**):



# Bázisok és koordinátarendszerek

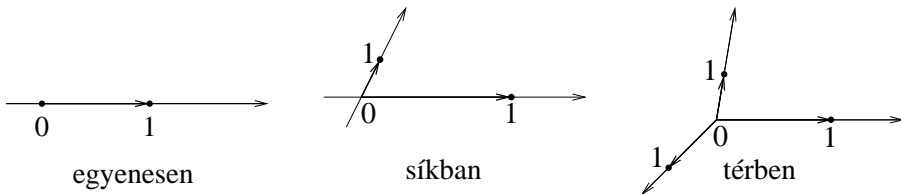
Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist (a koordinátarendszer **alapsvektorait**):



Megfordítva, az origó rögzítése és egy bázis kiválasztása meghatározza a koordinátarendszert.

# Bázisok és koordinátarendszerek

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist (a koordinátarendszer **alapvektorait**):



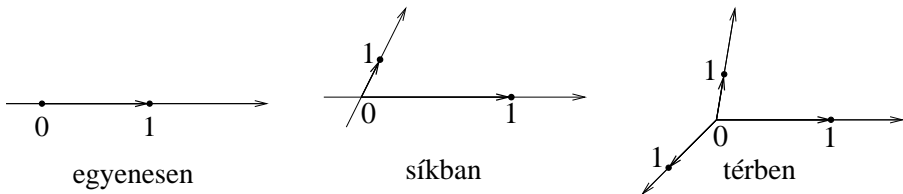
Megfordítva, az origó rögzítése és egy bázis kiválasztása meghatározza a koordinátarendszert.

Ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  az alapvektorok és  $\mathbf{v}$  koordinátái  $(v_1, v_2, v_3)$ , akkor

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c}.$$

# Bázisok és koordinátarendszerek

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor az egyértelműen származtat egy bázist (a koordinátarendszer **alapsvektorait**):



Megfordítva, az origó rögzítése és egy bázis kiválasztása meghatározza a koordinátarendszert.

Ha  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  az alapsvektorok és  $\mathbf{v}$  koordinátái  $(v_1, v_2, v_3)$ , akkor

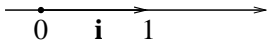
$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} + v_3 \mathbf{c}.$$

(Azaz: a koordináták éppen a lineáris kombinációban szereplő együtthatók.)

# Descartes-féle alapvektorok

# Descartes-féle alapvektorok

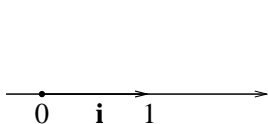
A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



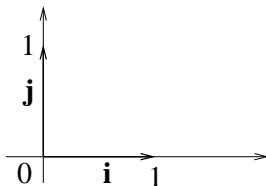
egyenesen

# Descartes-féle alapvektorok

A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



egyenesen



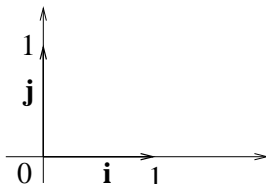
síkban

# Descartes-féle alapvektorok

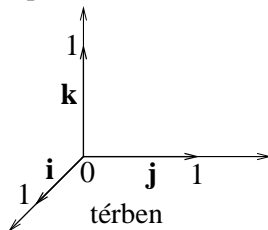
A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



egyenesen



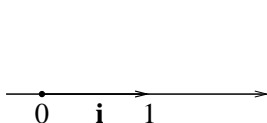
síkban



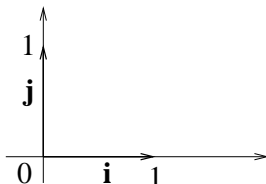
térben

# Descartes-féle alapvektorok

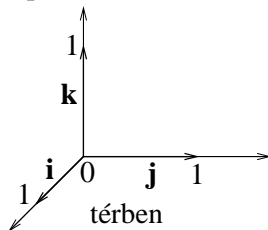
A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



egyenesen



síkban

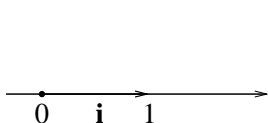


térben

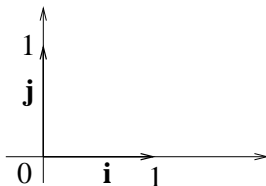
Itt **i, j, k** páronként merőleges egységvektorok,  
 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

# Descartes-féle alapvektorok

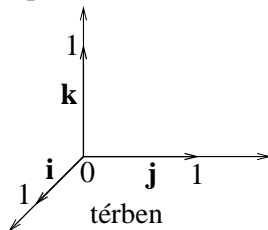
A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



egyenesen



síkban



térben

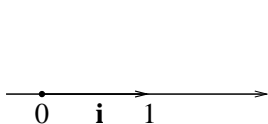
Itt  **$\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$**  páronként merőleges egységvektorok,

$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

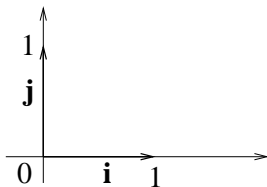
A  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor tehát  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$  alakban is írható.

# Descartes-féle alapvektorok

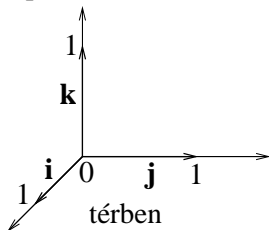
A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



egyenesen



síkban



térben

Itt  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  páronként merőleges egységvektorok,

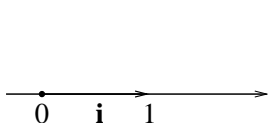
$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

A  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor tehát  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$  alakban is írható.

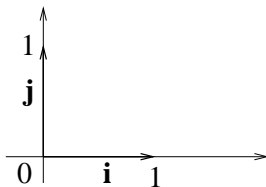
Megállapodás:

# Descartes-féle alapvektorok

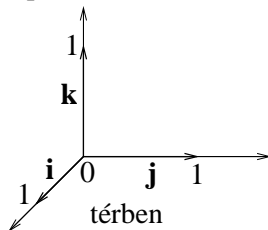
A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



egyenesen



síkban



térben

Itt  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  páronként merőleges egységvektorok,

$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

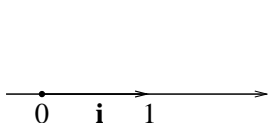
A  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor tehát  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$  alakban is írható.

Megállapodás:

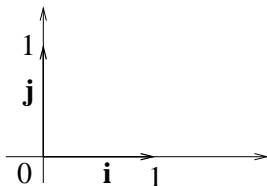
- síkban:  $\mathbf{i}$ -t  $\mathbf{j}$ -be pozitív  $90^\circ$ -os forgatás viszi;

# Descartes-féle alapvektorok

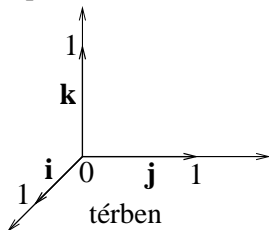
A Descartes-féle koordináta-rendszerhez tartozó alapvektorok:



egyenesen



síkban



térben

Itt  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  páronként merőleges egységvektorok,

$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

A  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektor tehát  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$  alakban is írható.

Megállapodás:

- síkban:  $\mathbf{i}$ -t  $\mathbf{j}$ -be pozitív  $90^\circ$ -os forgatás viszi;
- térben:  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (ebben a sorrendben) jobbsodrású rendszert alkot.

# Komponensek

Tegyük föl, hogy a rögzített **a**, **b** és **c** vektorok bázist alkotnak a tér vektorai számára.

# Komponensek

Tegyük föl, hogy a rögzített  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok bázist alkotnak a tér vektorai számára.

Fejezzük ki egy tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektort ebben a bázisban:

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

alkalmas  $\alpha, \beta, \gamma$  skalárokkal.

# Komponensek

Tegyük föl, hogy a rögzített  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok bázist alkotnak a tér vektorai számára.

Fejezzük ki egy tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektort ebben a bázisban:

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

alkalmas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  skalárokkal.

Az  $\alpha\mathbf{a}$ ,  $\beta\mathbf{b}$ ,  $\gamma\mathbf{c}$  vektorokat a  $\mathbf{v}$  vektor (adott bázisra vonatkozó) **komponenseinek** vagy **összetevőinek** nevezzük.

# Komponensek

Tegyük föl, hogy a rögzített  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok bázist alkotnak a tér vektorai számára.

Fejezzük ki egy tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektort ebben a bázisban:

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

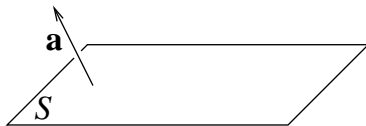
alkalmas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  skalárokkal.

Az  $\alpha\mathbf{a}$ ,  $\beta\mathbf{b}$ ,  $\gamma\mathbf{c}$  vektorokat a  $\mathbf{v}$  vektor (adott bázisra vonatkozó) **komponenseinek** vagy **összetevőinek** nevezzük.

(Figyeljünk a különbségtételre: az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  koordináták skalárok, míg a komponensek vektorok.)

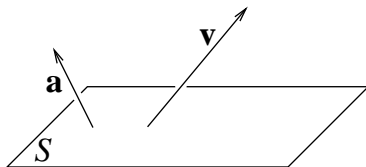
# Komponensek

Rögzítsünk egy  $S$  síkot és egy vele nem párhuzamos  $\mathbf{a}$  vektort.



# Komponensek

Rögzítsünk egy  $S$  síkot és egy vele nem párhuzamos  $\mathbf{a}$  vektort.



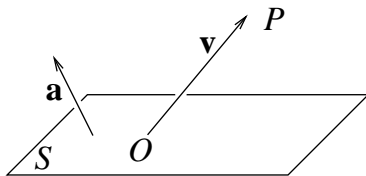
A tér bármely  $\mathbf{v}$  vektora egyértelműen írható

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$$

alakban, ahol  $\mathbf{v}' \parallel \mathbf{a}$  és  $\mathbf{v}'' \parallel S$ .

# Komponensek

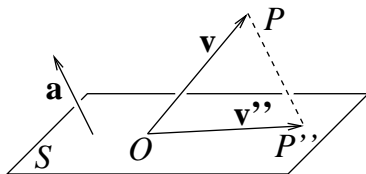
Rögzítsünk egy  $S$  síkot és egy vele nem párhuzamos  $\mathbf{a}$  vektort.



Valóban, ha  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ , ahol  $O \in S$ ,

# Komponensek

Rögzítsünk egy  $S$  síkot és egy vele nem párhuzamos  $\mathbf{a}$  vektort.

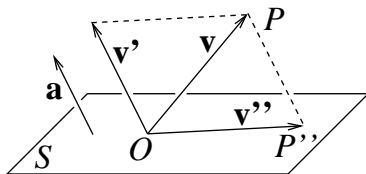


Valóban, ha  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ , ahol  $O \in S$ ,

akkor a  $\mathbf{v}'' = \overrightarrow{OP''}$  vektor számára a  $P'' \in S$  pontot a  $P$ -n áthaladó,  $\mathbf{a}$ -val párhuzamos egyenes dőfi ki az  $S$  síkból.

# Komponensek

Rögzítsünk egy  $S$  síkot és egy vele nem párhuzamos  $\mathbf{a}$  vektort.



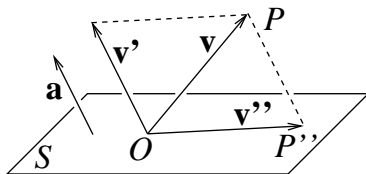
Valóban, ha  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ , ahol  $O \in S$ ,

akkor a  $\mathbf{v}'' = \overrightarrow{OP''}$  vektor számára a  $P'' \in S$  pontot a  $P$ -n áthaladó,  $\mathbf{a}$ -val párhuzamos egyenes dőfi ki az  $S$  síkból.

Ezután  $\mathbf{v}'$  a  $\mathbf{v} - \mathbf{v}''$  különbségvektorként adódik.

# Komponensek

Rögzítsünk egy  $S$  síkot és egy vele nem párhuzamos  $\mathbf{a}$  vektort.



Valóban, ha  $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ , ahol  $O \in S$ ,

akkor a  $\mathbf{v}'' = \overrightarrow{OP''}$  vektor számára a  $P'' \in S$  pontot a  $P$ -n áthaladó,  $\mathbf{a}$ -val párhuzamos egyenes dőfi ki az  $S$  síkból.

Ezután  $\mathbf{v}'$  a  $\mathbf{v} - \mathbf{v}''$  különbségvektorként adódik.

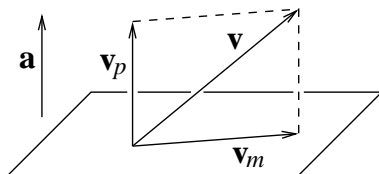
Ilyenkor azt mondjuk, hogy a  $\mathbf{v}$  vektort felbontottuk az  $\mathbf{a}$  vektorral párhuzamos és az  $S$  síkkal párhuzamos komponensekre.

# Komponensek

Fontos speciális eset:  $\mathbf{a} \perp S$ .

# Komponensek

Fontos speciális eset:  $\mathbf{a} \perp S$ . Ilyenkor ezt a tételt kapjuk:



## Tétel

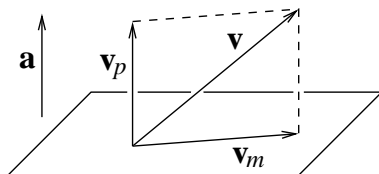
Rögzített  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  vektor mellett a tér bármely  $\mathbf{v}$  vektora egyértelműen írható

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_m$$

alakban, ahol  $\mathbf{v}_p \parallel \mathbf{a}$  és  $\mathbf{v}_m \perp \mathbf{a}$ .

# Komponensek

Fontos speciális eset:  $\mathbf{a} \perp S$ . Ilyenkor ezt a tételt kapjuk:



## Tétel

Rögzített  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  vektor mellett a tér bármely  $\mathbf{v}$  vektora egyértelműen írható

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_m$$

alakban, ahol  $\mathbf{v}_p \parallel \mathbf{a}$  és  $\mathbf{v}_m \perp \mathbf{a}$ .

Itt azt mondjuk, hogy a  $\mathbf{v}$  vektort felbontottuk az  $\mathbf{a}$  vektorral párhuzamos  $\mathbf{v}_p$  és az  $\mathbf{a}$  vektorra merőleges  $\mathbf{v}_m$  komponens összegére.