Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton
nmarci@math.elte.hu

www.math.elte.hu/˜nmarci

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Sokszögek és poliéderek
  - Konvexitás
  - Sokszögek, konvex sokszögek, konvex poliéderek
  - Szabályos poliéderek

Eltolás és párhuzamosság

Eltolás és párhuzamosság

Bármely eltolás

- bármely egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz,
- bármely síkot vele párhuzamos síkba visz,
- bármely félegyenest vele egyirányú félegyenesbe visz.

Eltolás és párhuzamosság

Bármely eltolás

- bármely egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz,
- bármely síkot vele párhuzamos síkba visz,
- bármely félegyenest vele egyirányú félegyenesbe visz.

Ha A és B tetszőleges pontok és valamely eltolásnál az A pont képe az A' pont, a B pont képe a B' pont, akkor $d(A, A') = d(B, B')$, továbbá az AA' és BB' félegyenesek egyirányúak.

Eltolás és párhuzamosság

Bármely eltolás

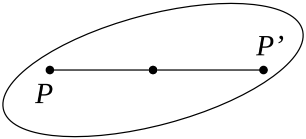
- bármely egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz,
- bármely síkot vele párhuzamos síkba visz,
- bármely félegyenest vele egyirányú félegyenesbe visz.

Ha A és B tetszőleges pontok és valamely eltolásnál az A pont képe az A' pont, a B pont képe a B' pont, akkor $d(A, A') = d(B, B')$, továbbá az AA' és BB' félegyenesek egyirányúak.

A tér bármely P és P' pontjához egyértelműen létezik olyan eltolás, amely P-t P'-be viszi.

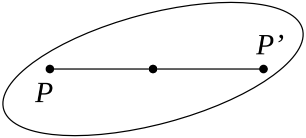
Szimmetriák: tükrözés

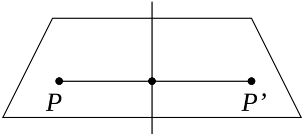
Szimmetriák: tükrözés



Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben): alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.

Szimmetriák: tükrözés

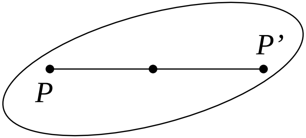




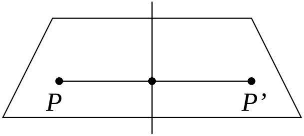
Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben):
alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.

Tengelyesen szimmetrikus alakzat (síkban):
alkalmas tengelyes tükrözés önmagába viszi.

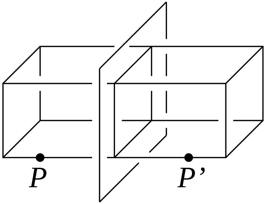
Szimmetriák: tükrözés



Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben):
alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.

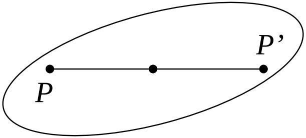


Tengelyesen szimmetrikus alakzat (síkban):
alkalmas tengelyes tükrözés önmagába viszi.

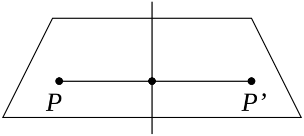


Síkra szimmetrikus alakzat (térben): alkalmas síkra vonatkozó tükrözés önmagába viszi.

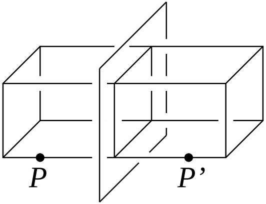
Szimmetriák: tükrözés



Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben): alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.



Tengelyesen szimmetrikus alakzat (síkban): alkalmas tengelyes tükrözés önmagába viszi.



Síkra szimmetrikus alakzat (térben): alkalmas síkra vonatkozó tükrözés önmagába viszi.

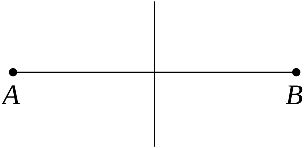
Megjegyzés: a síkra vonatkozó tükrözés nem mozgás.

Szimmetriák: tükrözés

Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P, A) = d(P, B)$ fennáll:

Szimmetriák: tükrözés

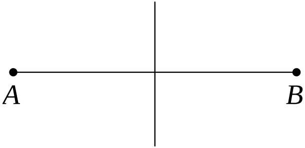
Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P,A) = d(P,B)$ fennáll:



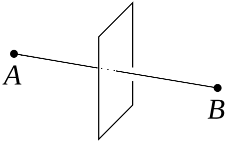
síkban: egyenes
(szakaszfelező merőleges),

Szimmetriák: tükrözés

Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P,A) = d(P,B)$ fennáll:



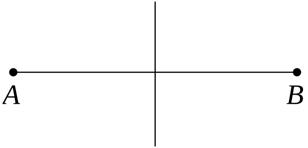
síkban: egyenes
(szakaszfelező merőleges),



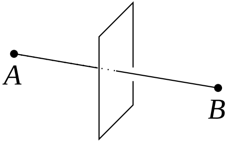
térben: sík
(szakaszfelező merőleges sík).

Szimmetriák: tükrözés

Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P, A) = d(P, B)$ fennáll:



síkban: egyenes
(szakaszfelező merőleges),

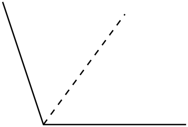


térben: sík
(szakaszfelező merőleges sík).

A szakaszfelező merőleges az egyetlen olyan egyenes, illetve sík, amelyre vonatkozó tükrözés A-t és B-t felcseréli.

Szimmetriák: tükrözés

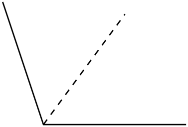
Síkban:



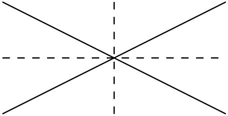
Adott konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félegyenes.

Szimmetriák: tükrözés

Síkban:



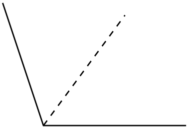
Adott konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félegyenes.



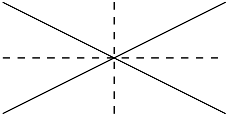
Két metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező egyenes egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két egyenest.

Szimmetriák: tükrözés

Síkban:



Adott konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félegyenes.



Két metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező egyenes egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két egyenest.

Térben:

Adott konvex lapszögtartományban a lapoktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félsík.

Két metsző síktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező sík egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két síkot.

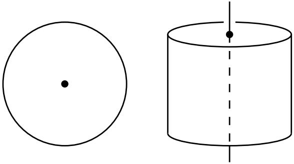
Szimmetriák: forgatás

Szimmetriák: forgatás

Forgásszimmetrikus egy alakzat, ha síkban alkalmas pont, illetve térben alkalmas tengely körüli összes forgatás önmagába viszi.

Szimmetriák: forgatás

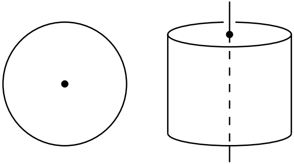
Forgásszimmetrikus egy alakzat, ha síkban alkalmas pont, illetve térben alkalmas tengely körüli összes forgatás önmagába viszi.



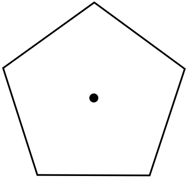
Pl. síkban a kör, térben a forgástestek forgásszimmetrikusak.

Szimmetriák: forgatás

Forgásszimmetrikus egy alakzat, ha síkban alkalmas pont, illetve térben alkalmas tengely körüli összes forgatás önmagába viszi.



Pl. síkban a kör, térben a forgástestek forgásszimmetrikusak.



Egy alakzat n-edrendben forgásszimmetrikus (síkban pont körül, térben egyenes körül), ha alkalmas pont (illetve tengely) körüli $2\pi/n$ szögű forgatás önmagába viszi.

Egybevágóság

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra, léteznek rajtuk kívül más egybevágósági transzformációk is.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra, léteznek rajtuk kívül más egybevágósági transzformációk is.
(2) Bármely mozgás egybevágóság

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

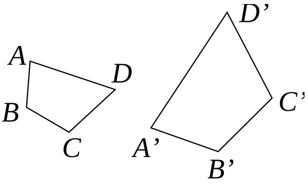
Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra, léteznek rajtuk kívül más egybevágósági transzformációk is.
(2) Bármely mozgás egybevágóság, de nem minden egybevágóság mozgás.

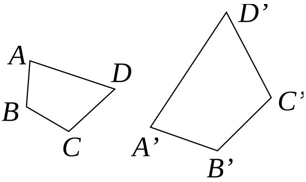
Hasonlóság, nagyítás

Hasonlóság, nagyítás

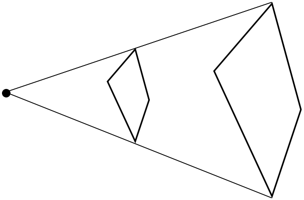


Hasonló alakzatok megfelelő távolságadatai arányosak, megfelelő szögei egyenlők. (Ha az arányossági tényező 1, akkor egybevágóságról van szó.)

Hasonlóság, nagyítás



Hasonló alakzatok megfelelő távolságadatai arányosak, megfelelő szögei egyenlők. (Ha az arányossági tényező 1, akkor egybevágóságról van szó.)



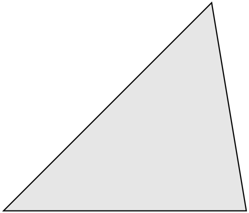
A középpontos nagyítás minden alakzatot hasonló alakzatba visz. Bármely egyenes képe vele párhuzamos egyenes, bármely szög képe egyállású szög. Tetszőleges pozitív valós szám előírható, mint nagyítási arány.

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

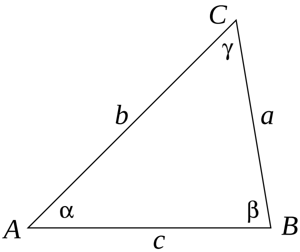
Háromszög

Háromszög: három nem kollineáris pont páronkénti összekötő szakaszai által körülhatárolt síkrész (háromszöglemez).



Háromszög

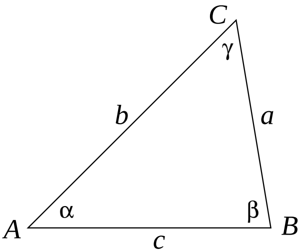
Háromszög: három nem kollineáris pont páronkénti összekötő szakaszai által körülhatárolt síkrész (háromszöglemez).



Szokásos jelölések és elnevezések:

Háromszög

Háromszög: három nem kollineáris pont páronkénti összekötő szakaszai által körülhatárolt síkrész (háromszöglemez).

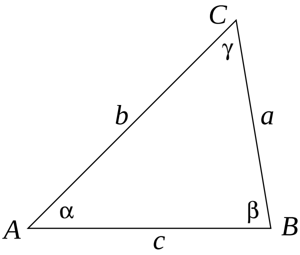


Szokásos jelölések és elnevezések:

- A, B, C: csúcsok,

Háromszög

Háromszög: három nem kollineáris pont páronkénti összekötő szakaszai által körülhatárolt síkrész (háromszöglemez).

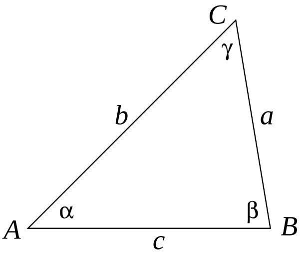


Szokásos jelölések és elnevezések:

- A, B, C: csúcsok,
- a, b, c: oldalak (oldalszakaszok, oldalegyenesek),

Háromszög

Háromszög: három nem kollineáris pont páronkénti összekötő szakaszai által körülhatárolt síkrész (háromszöglemez).



Szokásos jelölések és elnevezések:

- A, B, C: csúcsok,
- a, b, c: oldalak (oldalszakaszok, oldalegyenesek),
- α, β, γ: szögek (belső szögek).

Háromszög

Összehasonlítási tulajdonságok:

Háromszög

Összehasonlítási tulajdonságok:

- nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van:
  $\alpha < \beta \iff a < b$;

Háromszög

Összehasonlítási tulajdonságok:

- nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van:
  $\alpha < \beta \iff a < b$;
- $\alpha = \beta \iff a = b$ (egyenlőszárú háromszög esete);

Háromszög

Összehasonlítási tulajdonságok:

- nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van:
  $\alpha < \beta \iff a < b$;
- $\alpha = \beta \iff a = b$ (egyenlőszárú háromszög esete);
- háromszög-egyenlőtlenség: $a < b + c$;

Háromszög

Összehasonlítási tulajdonságok:

- nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van:
  $\alpha < \beta \iff a < b$;
- $\alpha = \beta \iff a = b$ (egyenlőszárú háromszög esete);
- háromszög-egyenlőtlenség: $a < b + c$;
- általában: a tér bármely három pontjára

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

egyenlőség csak akkor áll, ha B az AC szakaszra esik;

Háromszög

Összehasonlítási tulajdonságok:

- nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van:
  $\alpha < \beta \iff a < b$;
- $\alpha = \beta \iff a = b$ (egyenlőszárú háromszög esete);
- háromszög-egyenlőtlenség: $a < b + c$;
- általában: a tér bármely három pontjára

  $$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

  egyenlőség csak akkor áll, ha B az AC szakaszra esik;
- szögösszeg:
  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$;

Háromszög

Összehasonlítási tulajdonságok:

- nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van: $\alpha < \beta \iff a < b$;
- $\alpha = \beta \iff a = b$ (egyenlőszárú háromszög esete);
- háromszög-egyenlőtlenség: $a < b + c$;
- általában: a tér bármely három pontjára

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

  egyenlőség csak akkor áll, ha B az AC szakaszra esik;
- szögösszeg: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$;
- bármely külső szög a nem mellette fekvő két belső szög összegével egyenlő.

Alakzatok egybev./hason.-sága

Definíció: Két ponthalmaz a térben (síkon) *egybevágó* ill. *hasonló*, ha van a térnek (síknak) egy egybevágósága ill. hasonlósága, amelynél az egyik képe a másik.

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög rendre egyenlő.

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög rendre egyenlő.

Két háromszög hasonlóságához elegendő:

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög rendre egyenlő.

Két háromszög hasonlóságához elegendő:

- ha az oldalak aránya egyenlő, vagy

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög rendre egyenlő.

Két háromszög hasonlóságához elegendő:

- ha az oldalak aránya egyenlő, vagy
- két oldal aránya és a közrefogott szög egyenlő, vagy

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög rendre egyenlő.

Két háromszög hasonlóságához elegendő:

- ha az oldalak aránya egyenlő, vagy
- két oldal aránya és a közrefogott szög egyenlő, vagy
- két szög páronként egyenlő, vagy

Háromszög: egybevágóság, hasonlóság

Két háromszög egybevágóságához elegendő:

- ha oldalaik rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a közrefogott szög rendre egyenlő, vagy
- egy oldal és a rajta fekvő szögek rendre egyenlők, vagy
- két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög rendre egyenlő.

Két háromszög hasonlóságához elegendő:

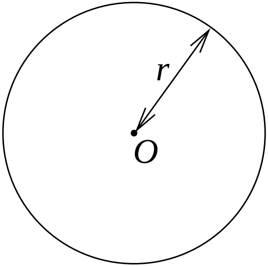
- ha az oldalak aránya egyenlő, vagy
- két oldal aránya és a közrefogott szög egyenlő, vagy
- két szög páronként egyenlő, vagy
- két oldal aránya és a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő.

Kör

Kör: rögzített ponttól adott pozitív távolságra levő pontok mértani helye a síkban.

Kör

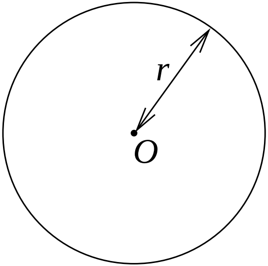
Kör: rögzített ponttól adott pozitív távolságra levő pontok mértani helye a síkban.



O: középpont,
r: sugár;

Kör

Kör: rögzített ponttól adott pozitív távolságra levő pontok mértani helye a síkban.

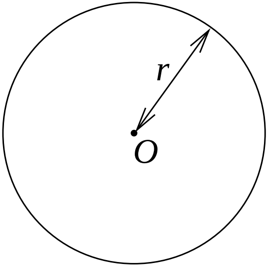


O: középpont,
r: sugár;

P belső pont, ha $d(P, O) < r$,
külső, ha $d(P, O) > r$.

Kör

Kör: rögzített ponttól adott pozitív távolságra levő pontok mértani helye a síkban.



O: középpont,
r: sugár;

P belső pont, ha $d(P,O) < r$,
külső, ha $d(P,O) > r$.

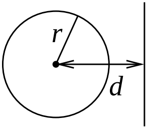
Figyelem: a „kör” szó a körvonalat jelenti a matematikában.
Ha a kör belsejéből és a körvonalból együttesen álló alakzatot akarjuk megnevezni, akkor körlemezt vagy körlapot mondunk.

Kör és egyenes

Kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban:

Kör és egyenes

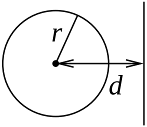
Kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban:



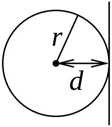
$r < d$: nincs közös pont

Kör és egyenes

Kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban:



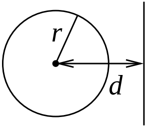
$r < d$: nincs közös pont



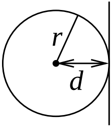
$r = d$: egyetlen közös pont van
(az egyenes: érintő)
Az érintő merőleges a közös pontban húzott sugárra.

Kör és egyenes

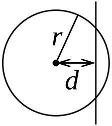
Kör és egyenes kölcsönös helyzete a síkban:



$r < d$: nincs közös pont

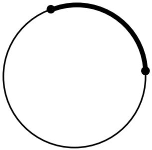


$r = d$: egyetlen közös pont van
(az egyenes: érintő)
Az érintő merőleges a közös pontban húzott sugárra.



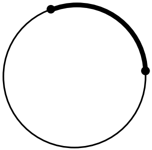
$r > d$: két közös pont van
(az egyenes: szelő)

Kör: elnevezések

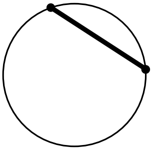


körív

Kör: elnevezések

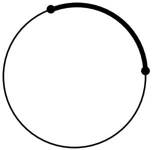


körív

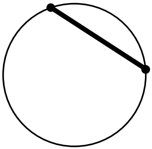


húr

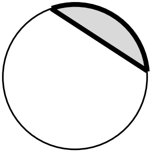
Kör: elnevezések



körív

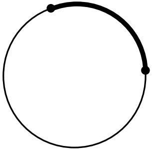


húr

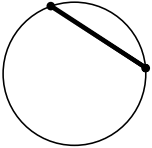


körszelet

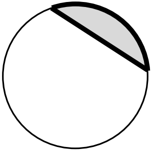
Kör: elnevezések



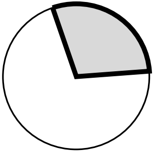
körív



húr

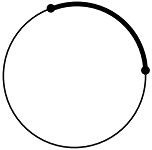


körszelet

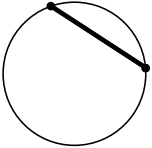


körcikk

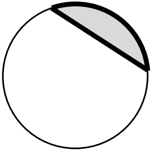
Kör: elnevezések



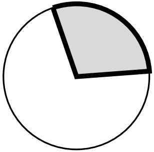
körív



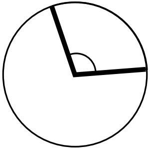
húr



körszelet

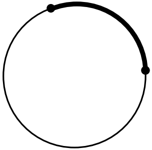


körcikk

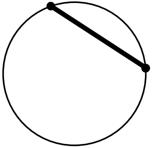


középponti szög

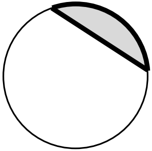
Kör: elnevezések



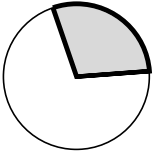
körív



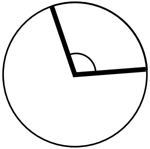
húr



körszelet



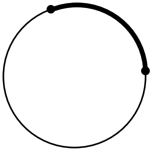
körcikk



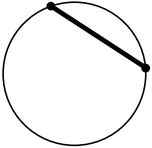
középponti szög

Egyenlő (azaz egybevágó) ívekhez

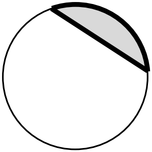
Kör: elnevezések



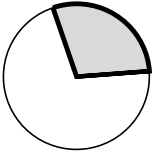
körív



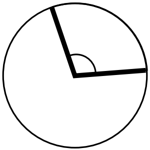
húr



körszelet



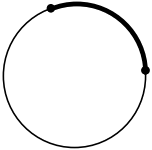
körcikk



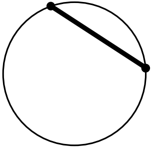
középponti szög

Egyenlő (azaz egybevágó) ívekhez egyenlő húrok, egyenlő középponti szögek, egybevágó körcikkek és egybevágó körszeletek tartoznak

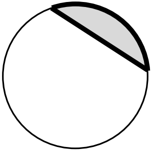
Kör: elnevezések



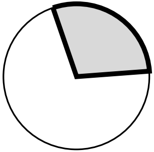
körív



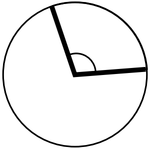
húr



körszelet



körcikk



középponti szög

Egyenlő (azaz egybevágó) ívekhez egyenlő húrok, egyenlő középponti szögek, egybevágó körcikkek és egybevágó körszeletek tartoznak (indoklás: forgásszimmetria).

Kör: érintők

Az érintők száma:

Kör: érintők

Az érintők száma:

- A kör bármely pontjában egyértelműen létezik érintő.

Kör: érintők

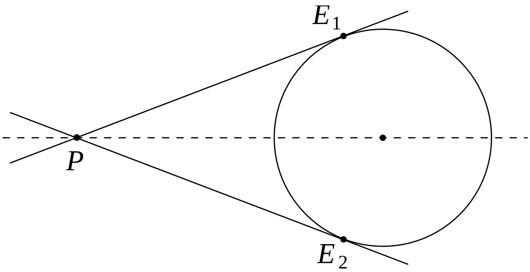
Az érintők száma:

- A kör bármely pontjában egyértelműen létezik érintő.
- A kör belső pontján át nincsen érintő.

Kör: érintők

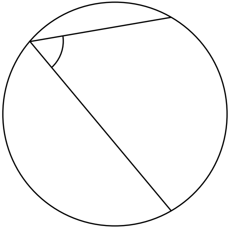
Az érintők száma:

- A kör bármely pontjában egyértelműen létezik érintő.
- A kör belső pontján át nincsen érintő.
- Bármely külső ponton át két érintő húzható;
  a két érintőszakasz egyenlő (tengelyes szimmetria):



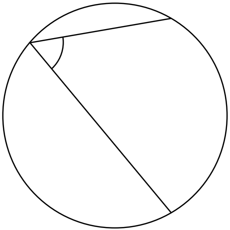
$$PE_1 = PE_2$$

Kör: kerületi szögek

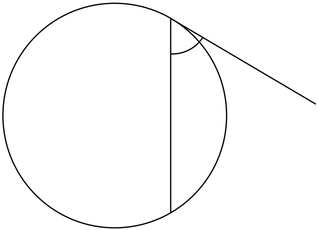


kerületi szög

Kör: kerületi szögek

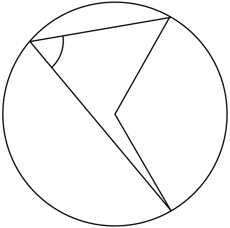


kerületi szög

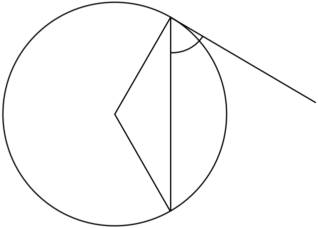


érintőszárú kerületi szög

Kör: kerületi szögek



kerületi szög

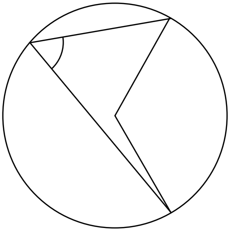


érintőszárú kerületi szög

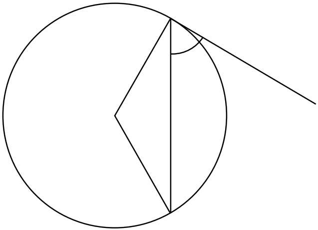
Tétel

Bármely kerületi szög fele az ugyanakkora ívhez tartozó középponti szögnek.

Kör: kerületi szögek



kerületi szög



érintőszárú kerületi szög

Tétel

Bármely kerületi szög fele az ugyanakkora ívhez tartozó középponti szögnek.

Miért?

Kör: kerületi szögek

Bizonyítás:

Kör: kerületi szögek

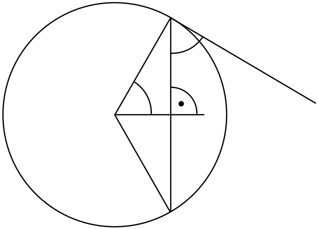
Bizonyítás:

Először az érintőszárú esetben:

Kör: kerületi szögek

Bizonyítás:

Először az érintőszárú esetben:

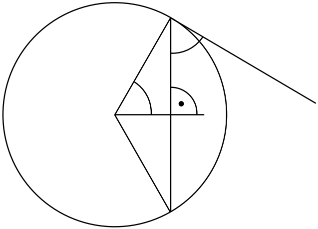


Kör: kerületi szögek

Bizonyítás:

Először az érintőszárú esetben:

merőleges szárú szögek



Kör: kerületi szögek

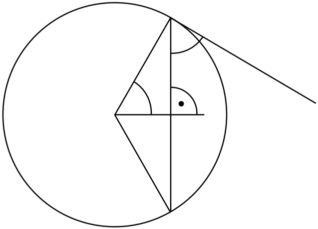
Bizonyítás:

Először az érintőszárú esetben:

merőleges szárú szögek

(mindkettő egyformán

hegyes-, derék- vagy tompaszög)

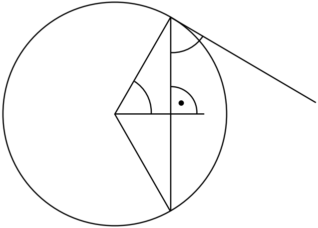


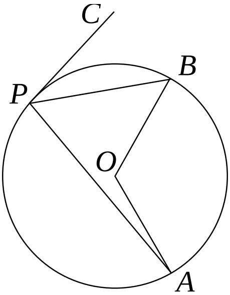
Kör: kerületi szögek

Bizonyítás:

Először az érintőszárú esetben:

merőleges szárú szögek
(mindkettő egyformán
hegyes-, derék- vagy tompaszög)





Általános eset:

két érintőszárú kerületi szög különbsége:

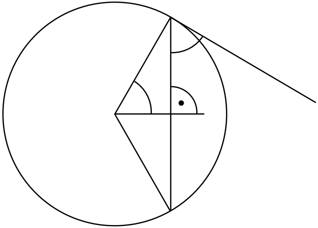
$AOB\sphericalangle = AOP\sphericalangle - BOP\sphericalangle =$
$= 2 \cdot APC\sphericalangle - 2 \cdot BPC\sphericalangle =$
$= 2 \cdot APB\sphericalangle$

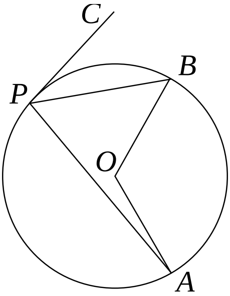
Kör: kerületi szögek

Bizonyítás:

Először az érintőszárú esetben:

merőleges szárú szögek
(mindkettő egyformán
hegyes-, derék- vagy tompaszög)





Általános eset:

két érintőszárú kerületi szög különbsége:

$AOB\sphericalangle = AOP\sphericalangle - BOP\sphericalangle =$

$= 2 \cdot APC\sphericalangle - 2 \cdot BPC\sphericalangle =$

$= 2 \cdot APB\sphericalangle$

(Figyelem: itt $AOP\sphericalangle$ a B-t tartalmazó szöget jelöli!)

Kör: kerületi szögek

Következmények:

Kör: kerületi szögek

Következmények:

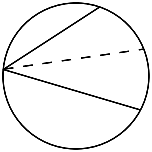
Ugyanabban a körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak.

Kör: kerületi szögek

Következmények:

Ugyanabban a körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak.

Például:
a kerületi szög szögfelezője
felezi az ívet

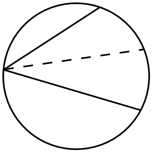


Kör: kerületi szögek

Következmények:

Ugyanabban a körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak.

Például:
a kerületi szög szögfelezője
felezi az ívet



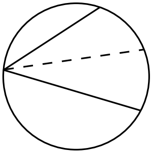
Látószögek tétele:
Adott $A \neq B$ síkbeli pontok és α $(0 < \alpha < \pi)$ szög esetén a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre $APB\sphericalangle = \alpha$:

Kör: kerületi szögek

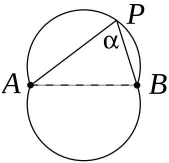
Következmények:

Ugyanabban a körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak.

Például:
a kerületi szög szögfelezője
felezi az ívet



Látószögek tétele:
Adott $A \neq B$ síkbeli pontok és α $(0 < \alpha < \pi)$ szög esetén a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre $APB\sphericalangle = \alpha$:
két nyílt körív egyesítése, amelyek AB-re szimmetrikusak.

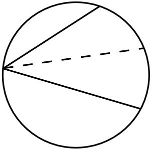


Kör: kerületi szögek

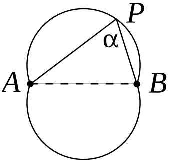
Következmények:

Ugyanabban a körben egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak.

Például:
a kerületi szög szögfelezője
felezi az ívet



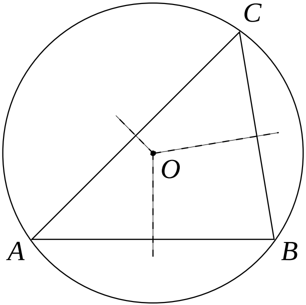
Látószögek tétele:
Adott $A \neq B$ síkbeli pontok és α $(0 < \alpha < \pi)$ szög esetén a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre $APB\sphericalangle = \alpha$:
két nyílt körív egyesítése, amelyek AB-re szimmetrikusak.



Speciális eset: Thalész tétele $(\alpha = \pi/2)$

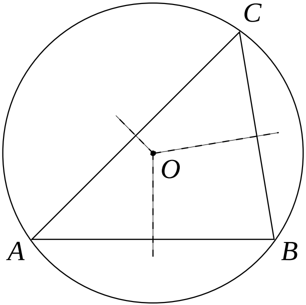
Háromszög: nevezetes vonalak és pontok

Háromszög: nevezetes vonalak és pontok



Körülírt kör

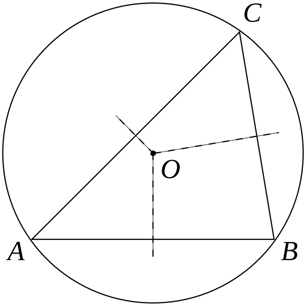
Háromszög: nevezetes vonalak és pontok



Körülírt kör

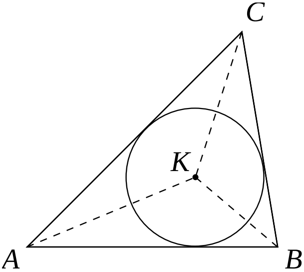
Középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja

Háromszög: nevezetes vonalak és pontok



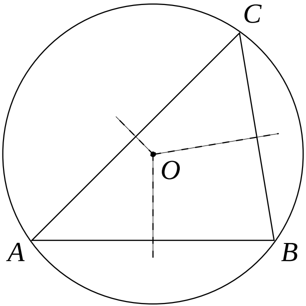
Körülírt kör

Középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja



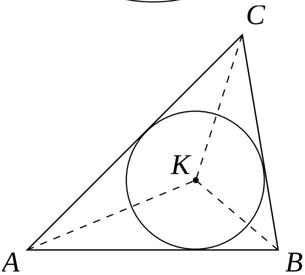
Beírt kör

Háromszög: nevezetes vonalak és pontok



Körülírt kör

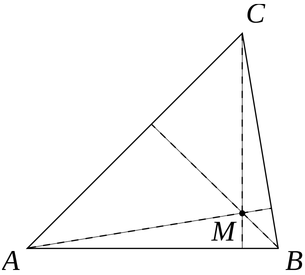
Középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja



Beírt kör

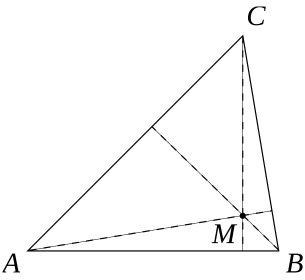
Középpontja a szögfelezők metszéspontja

Háromszög: nevezetes vonalak és pontok

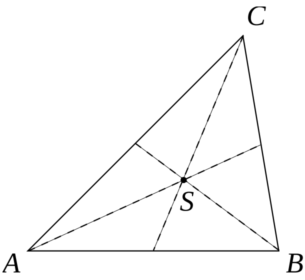


Magasságvonalak,
magasságpont

Háromszög: nevezetes vonalak és pontok

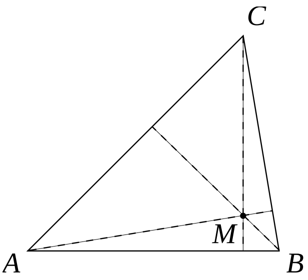


Magasságvonalak, magasságpont

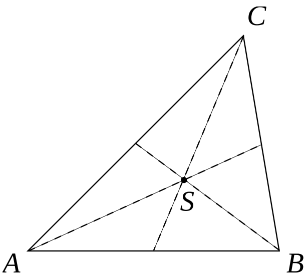


Súlyvonalak, súlypont (A súlyvonalak harmadolják egymást)

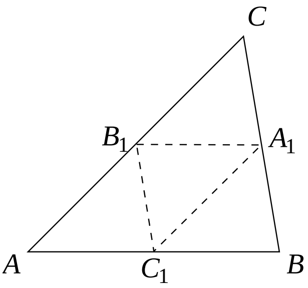
Háromszög: nevezetes vonalak és pontok



Magasságvonalak, magasságpont



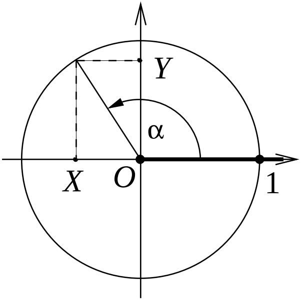
Súlyvonalak, súlypont (A súlyvonalak harmadolják egymást)



Középvonalak ($A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$)

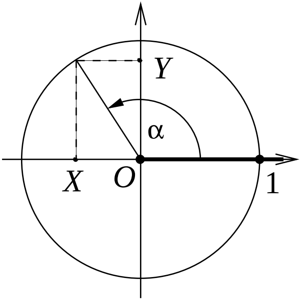
Szögfüggvények

Szögfüggvények



α tetszőleges forgásszög:

Szögfüggvények

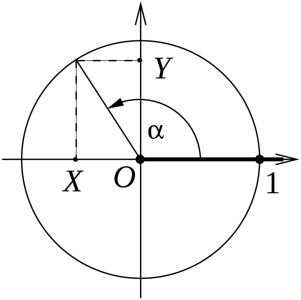


α tetszőleges forgásszög:

$\cos \alpha = OX$,

előjeles távolság

Szögfüggvények

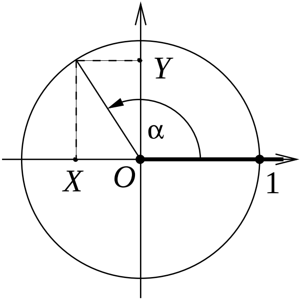


α tetszőleges forgásszög:

$\cos\alpha = OX, \qquad \sin\alpha = OY$

előjeles távolságok,

Szögfüggvények



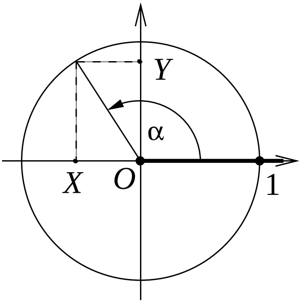
α tetszőleges forgásszög:

$\cos\alpha = OX, \quad \sin\alpha = OY$

előjeles távolságok,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Szögfüggvények



α tetszőleges forgásszög:

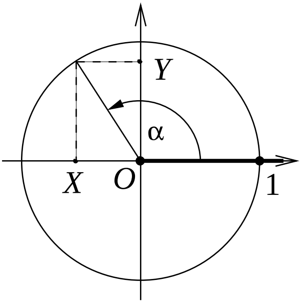
$\cos\alpha = OX, \qquad \sin\alpha = OY$

előjeles távolságok,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Szinusztétel, koszinusztétel:

Szögfüggvények



α tetszőleges forgásszög:

$\cos\alpha = OX, \qquad \sin\alpha = OY$

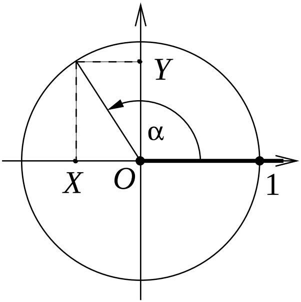
előjeles távolságok,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Szinusztétel, koszinusztétel:

Bármely háromszögben $\quad \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

Szögfüggvények



α tetszőleges forgásszög:

$\cos\alpha = OX, \qquad \sin\alpha = OY$

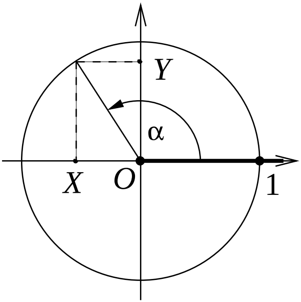
előjeles távolságok,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Szinusztétel, koszinusztétel:

Bármely háromszögben
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Szögfüggvények



α tetszőleges forgásszög:

$\cos\alpha = OX, \qquad \sin\alpha = OY$

előjeles távolságok,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Szinusztétel, koszinusztétel:

Bármely háromszögben
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

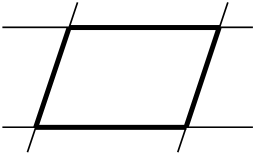
(speciális eset: Pitagorasz tétele)

Speciális négyszögek: parallelogramma

Parallelogramma ekvivalens jellemzései:

Speciális négyszögek: parallelogramma

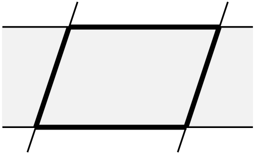
Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek: parallelogramma

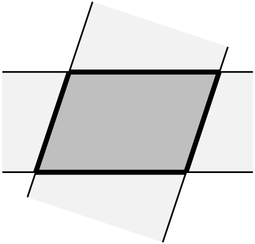
Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek: parallelogramma

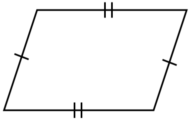
Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek: parallelogramma

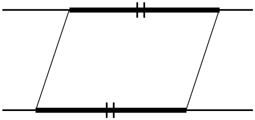
Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek: parallelogramma

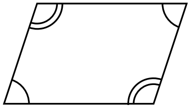
Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek: parallelogramma

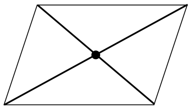
Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek: parallelogramma

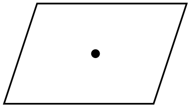
Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek: parallelogramma

Parallelogramma ekvivalens jellemzései:



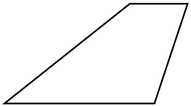
- két-két szemközti oldal párhuzamos,
- két-két szemközti oldal egyenlő,
- két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő,
- két-két szemközti szög egyenlő,
- az átlók felezik egymást,
- középpontosan szimmetrikus.

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:

Speciális négyszögek

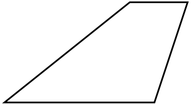
További fontos négyszögtípusok:



trapéz: két oldal párhuzamos (alapok)

Speciális négyszögek

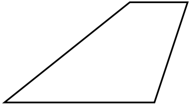
További fontos négyszögtípusok:



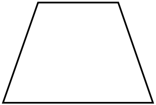
trapéz: két oldal párhuzamos (alapok)
(A középvonal egyenlő az alapok számtani középével.)

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:



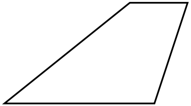
trapéz: két oldal párhuzamos (alapok)
(A középvonal egyenlő az alapok számtani közepével.)



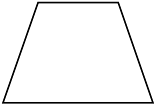
szimmetrikus trapéz:
az alapok felező merőlegese közös

Speciális négyszögek

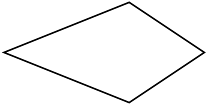
További fontos négyszögtípusok:



trapéz: két oldal párhuzamos (alapok)
(A középvonal egyenlő az alapok számtani közepével.)



szimmetrikus trapéz:
az alapok felező merőlegese közös



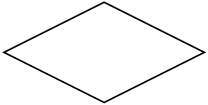
deltoid:
két-két szomszédos oldal egyenlő
(szimmetrikus az egyik átlóra)

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:

Speciális négyszögek

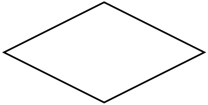
További fontos négyszögtípusok:



rombusz: egyenlő oldalú négyszög

Speciális négyszögek

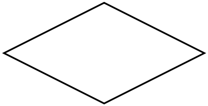
További fontos négyszögtípusok:



rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,

Speciális négyszögek

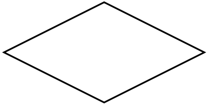
További fontos négyszögtípusok:



rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,
olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói)

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:

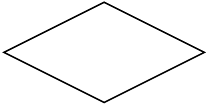


rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,
olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói)

téglalap: egyenlő szögű négyszög

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:

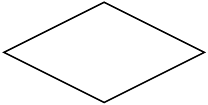


rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,
olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói)

téglalap: egyenlő szögű négyszög
(mindegyik szög derékszög,

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:

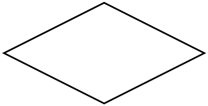


rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,
olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói)

téglalap: egyenlő szögű négyszög
(mindegyik szög derékszög,
olyan parallelogramma, amelyben az átlók egyenlők)

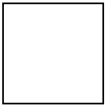
Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:



rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,
olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói)

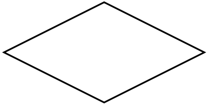
téglalap: egyenlő szögű négyszög
(mindegyik szög derékszög,
olyan parallelogramma, amelyben az átlók egyenlők)



négyzet: negyedrendben forgásszimmmetrikus négyszög

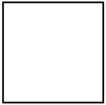
Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:



rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,
olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói)

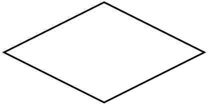
téglalap: egyenlő szögű négyszög
(mindegyik szög derékszög,
olyan parallelogramma, amelyben az átlók egyenlők)



négyzet: negyedrendben forgásszimmmetrikus négyszög
(egyenlő oldalú téglalap,

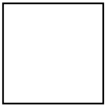
Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:



rombusz: egyenlő oldalú négyszög
(mindkét átlóra szimmmetrikus,
olyan parallelogramma, amelynek merőlegesek az átlói)

téglalap: egyenlő szögű négyszög
(mindegyik szög derékszög,
olyan parallelogramma, amelyben az átlók egyenlők)



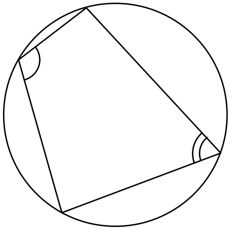
négyzet: negyedrendben forgásszimmmetrikus négyszög
(egyenlő oldalú téglalap,
derékszögű rombusz)

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:

Speciális négyszögek

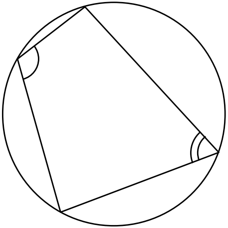
További fontos négyszögtípusok:



húrnégyszög: körbe írt négyszög
(a négy csúcs egy körön van)

Speciális négyszögek

További fontos négyszögtípusok:



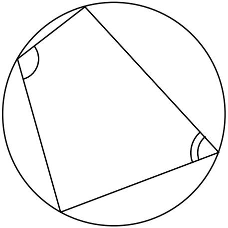
húrnégyszög: körbe írt négyszög
(a négy csúcs egy körön van)

Tétel

Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögei kiegészítő szögek.

Speciális négyszögek

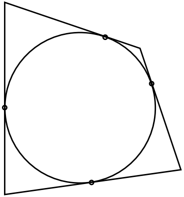
További fontos négyszögtípusok:



húrnégyszög: körbe írt négyszög
(a négy csúcs egy körön van)

Tétel

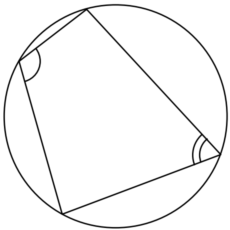
Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögei kiegészítő szögek.



érintőnégyszög: kör köré írt négyszög
(a négy oldal egy kört érint)

Speciális négyszögek

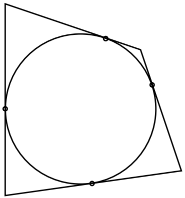
További fontos négyszögtípusok:



húrnégyszög: körbe írt négyszög
(a négy csúcs egy körön van)

Tétel

Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögei kiegészítő szögek.



érintőnégyszög: kör köré írt négyszög
(a négy oldal egy kört érint)

Tétel

Bármely érintőnégyszögben a szemközti oldalpárok összege egyenlő.

Kúpszeletek

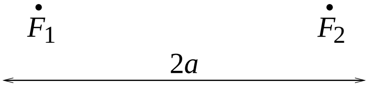
Kúpszeletek

Az ellipszis származtatása mértani helyként:

Kúpszeletek

Az ellipszis származtatása mértani helyként:

Adottak az F_1, F_2 pontok a síkon és adott a $2a \in \mathbb{R}$ szám $(F_1 \neq F_2,\ 2a > d(F_1, F_2))$:

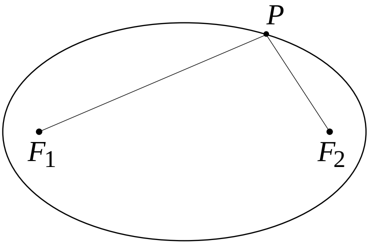


Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszis:

Kúpszeletek

Az ellipszis származtatása mértani helyként:

Adottak az F_1, F_2 pontok a síkon és adott a $2a \in \mathbb{R}$ szám
($F_1 \neq F_2$, $2a > d(F_1, F_2)$):



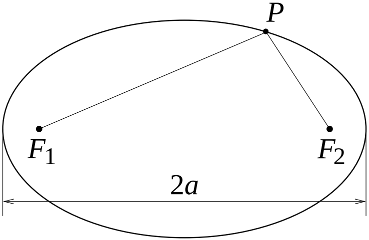
Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszis:
a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Kúpszeletek

Az ellipszis származtatása mértani helyként:

Adottak az F_1, F_2 pontok a síkon és adott a $2a \in \mathbb{R}$ szám ($F_1 \neq F_2$, $2a > d(F_1, F_2)$):



Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszis:
a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

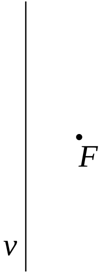
Kúpszeletek

A parabola származtatása mértani helyként:

Kúpszeletek

A parabola származtatása mértani helyként:

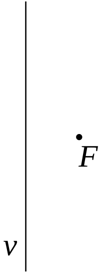
Adott a v egyenes és az F pont a síkon ($F \notin v$):



Kúpszeletek

A parabola származtatása mértani helyként:

Adott a v egyenes és az F pont a síkon ($F \notin v$):

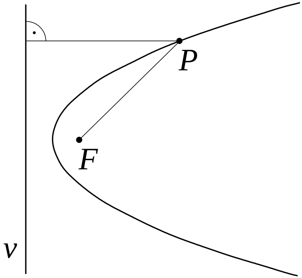


Az F fókuszú, v vezéregyenesű parabola:

Kúpszeletek

A parabola származtatása mértani helyként:

Adott a v egyenes és az F pont a síkon ($F \notin v$):



Az F fókuszú, v vezéregyenesű parabola:

a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre

$$d(P,F) = d(P,v).$$

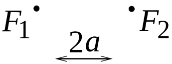
Kúpszeletek

A hiperbola származtatása mértani helyként:

Kúpszeletek

A hiperbola származtatása mértani helyként:

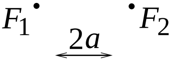
Adottak az F_1, F_2 pontok a síkon és adott a $2a \in \mathbb{R}$ szám
$(F_1 \neq F_2,\, 0 < 2a < d(F_1, F_2))$:



Kúpszeletek

A hiperbola származtatása mértani helyként:

Adottak az F_1, F_2 pontok a síkon és adott a $2a \in \mathbb{R}$ szám ($F_1 \neq F_2$, $0 < 2a < d(F_1, F_2)$):

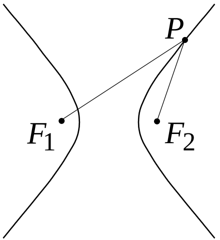


Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ valós tengelyű hiperbola:

Kúpszeletek

A hiperbola származtatása mértani helyként:

Adottak az F_1, F_2 pontok a síkon és adott a $2a \in \mathbb{R}$ szám $(F_1 \neq F_2, 0 < 2a < d(F_1, F_2))$:



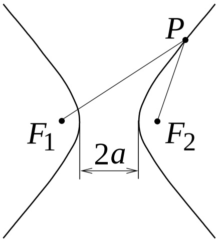
Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ valós tengelyű hiperbola:
a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Kúpszeletek

A hiperbola származtatása mértani helyként:

Adottak az F_1, F_2 pontok a síkon és adott a $2a \in \mathbb{R}$ szám ($F_1 \neq F_2$, $0 < 2a < d(F_1, F_2)$):

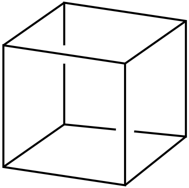


Az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ valós tengelyű hiperbola:
a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

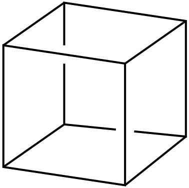
Testek

Testek

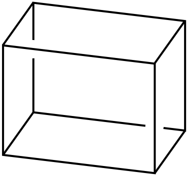


kocka

Testek

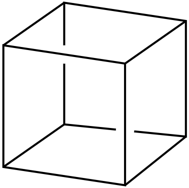


kocka

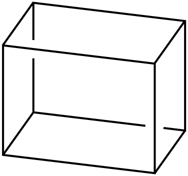


téglatest

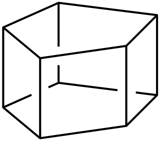
Testek



kocka

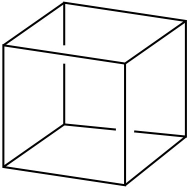


téglatest

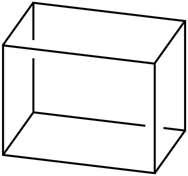


(egyenes) hasáb

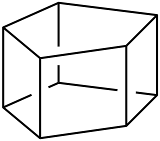
Testek



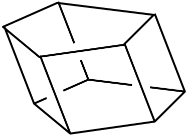
kocka



téglatest

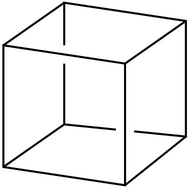


(egyenes) hasáb

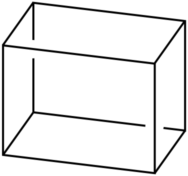


(ferde) hasáb

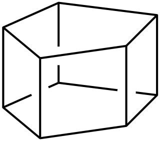
Testek



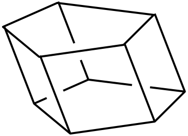
kocka



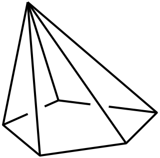
téglatest



(egyenes) hasáb

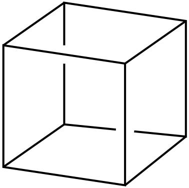


(ferde) hasáb

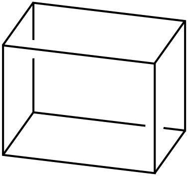


gúla

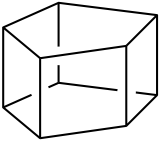
Testek



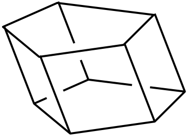
kocka



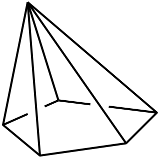
téglatest



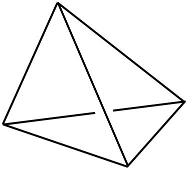
(egyenes) hasáb



(ferde) hasáb



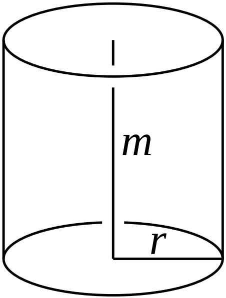
gúla



tetraéder

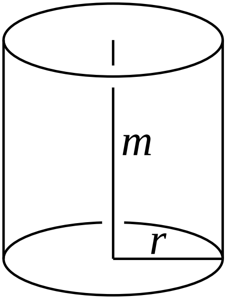
Testek

Testek

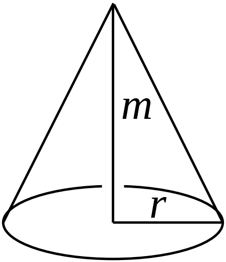


henger
(forgáshenger)

Testek

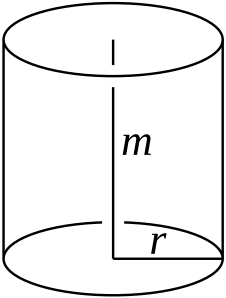


henger
(forgáshenger)

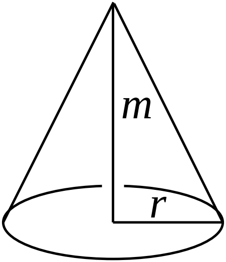


kúp
(forgáskúp)

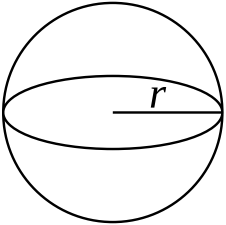
Testek



henger
(forgáshenger)

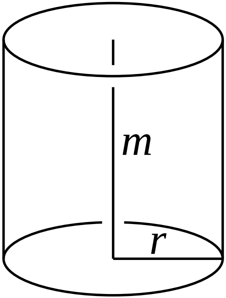


kúp
(forgáskúp)

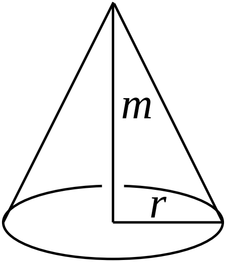


gömb

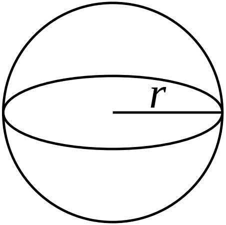
Testek



henger
(forgáshenger)



kúp
(forgáskúp)

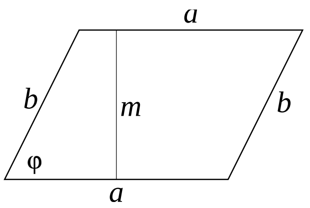


gömb

A gömbfelület mint mértani hely:
Rögzített ponttól adott pozitív távolságra levő pontok mértani helye a térben.

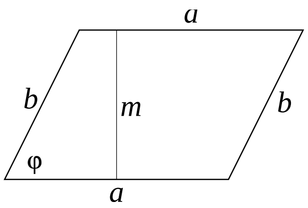
Terület

Terület



Parallelogramma területe:

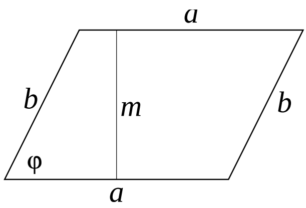
Terület



Parallelogramma területe:

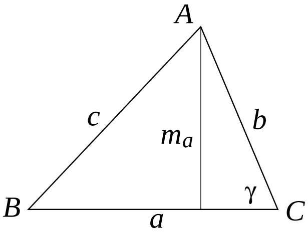
$t = am = ab \sin \varphi$

Terület



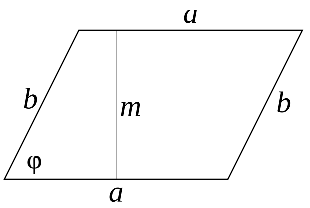
Parallelogramma területe:

$t = am = ab \sin\varphi$



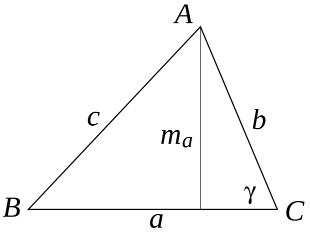
Háromszög területe:

Terület



Parallelogramma területe:

$$t = am = ab\sin\varphi$$

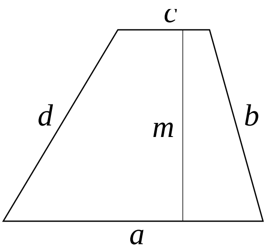


Háromszög területe:

$$t = \frac{am_a}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$$

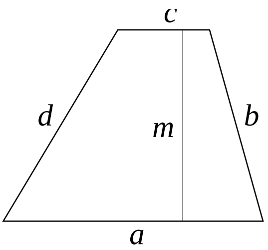
Terület

Terület



Trapéz területe:

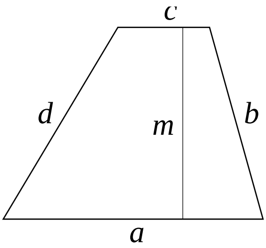
Terület



Trapéz területe:

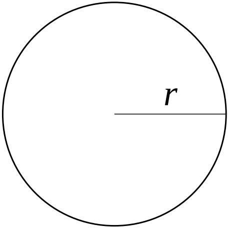
$$t = \frac{(a+c)m}{2}$$

Terület



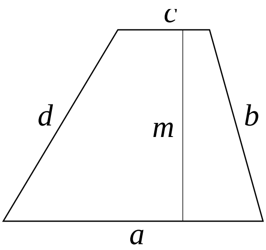
Trapéz területe:

$$t = \frac{(a+c)m}{2}$$



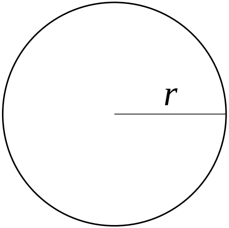
Kör területe:

Terület



Trapéz területe:

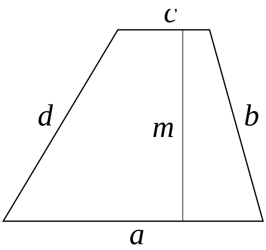
$$t = \frac{(a+c)m}{2}$$



Kör területe:

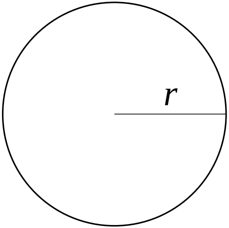
$$t = r^2\pi$$

Terület



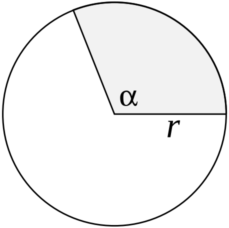
Trapéz területe:

$$t = \frac{(a+c)m}{2}$$



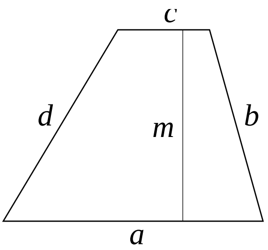
Kör területe:

$$t = r^2\pi$$



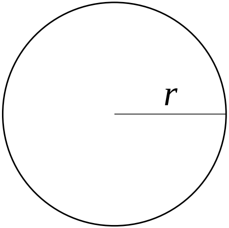
α középponti szögű körcikk területe:

Terület



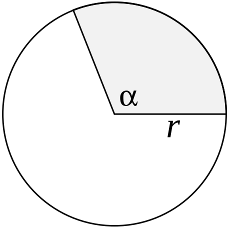
Trapéz területe:

$$t = \frac{(a+c)m}{2}$$



Kör területe:

$$t = r^2\pi$$

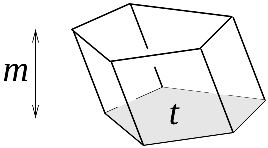


α középponti szögű körcikk területe:

$$t = \frac{r^2\alpha}{2}$$

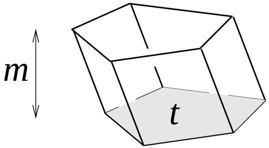
Térfogat

Térfogat



Hasáb térfogata:
(alapterület)·(magasság)

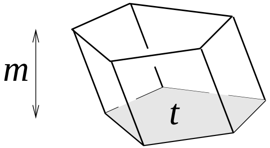
Térfogat



Hasáb térfogata:
(alapterület)·(magasság)

$V = t \cdot m$

Térfogat

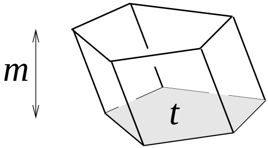


Hasáb térfogata:
(alapterület)·(magasság)

$V = t \cdot m$

(Speciális eset: az a, b, c élű téglatest térfogata $V = abc$,
az a élű kockáé $V = a^3$.)

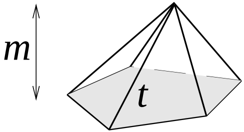
Térfogat



Hasáb térfogata:
(alapterület)·(magasság)

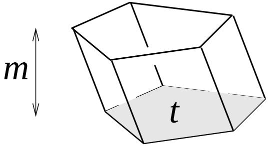
$V = t \cdot m$

(Speciális eset: az a, b, c élű téglatest térfogata $V = abc$, az a élű kockáé $V = a^3$.)



Gúla térfogata:
$\frac{1}{3}$(alapterület)·(magasság)

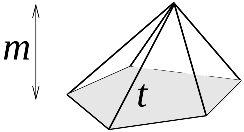
Térfogat



Hasáb térfogata:
(alapterület)·(magasság)

$V = t \cdot m$

(Speciális eset: az a, b, c élű téglatest térfogata $V = abc$, az a élű kockáé $V = a^3$.)

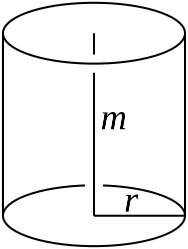


Gúla térfogata:
$\frac{1}{3}$(alapterület)·(magasság)

$V = \frac{tm}{3}$

Térfogat

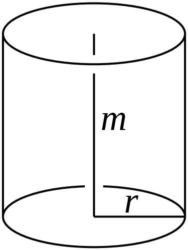
Térfogat



henger

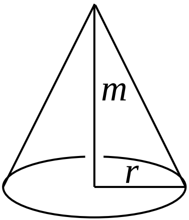
$$V = r^2\pi m$$

Térfogat



henger

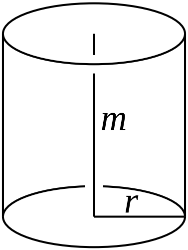
$$V = r^2 \pi m$$



kúp

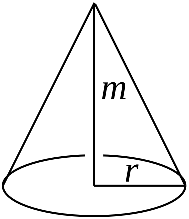
$$V = \frac{r^2 \pi m}{3}$$

Térfogat



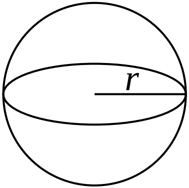
henger

$$V = r^2 \pi m$$



kúp

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3}$$



gömb

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

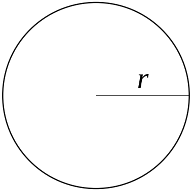
Kerület, ívhossz

Kerület, ívhossz

Háromszög, négyszög, stb. kerülete az oldalszakaszok hosszainak összege.

Kerület, ívhossz

Háromszög, négyszög, stb. kerülete az oldalszakaszok hosszainak összege.

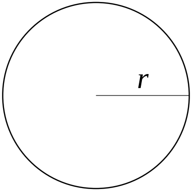


Kör kerülete:

$$k = 2r\pi$$

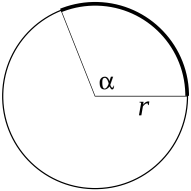
Kerület, ívhossz

Háromszög, négyszög, stb. kerülete az oldalszakaszok hosszainak összege.



Kör kerülete:

$$k = 2r\pi$$



α középponti szögű köriv hossza:

$$r\alpha$$

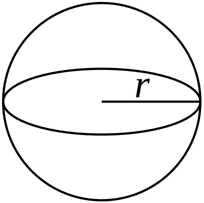
Felszín

Felszín

Síklapokkal határolt test felszíne a határoló lapok területeinek összege.

Felszín

Síklapokkal határolt test felszíne a határoló lapok területeinek összege.

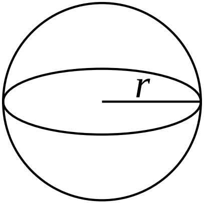


Gömb felszíne:

$$A = 4r^2\pi$$

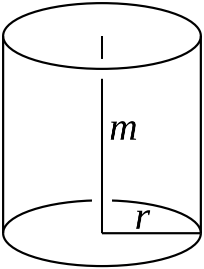
Felszín

Síklapokkal határolt test felszíne a határoló lapok területeinek összege.



Gömb felszíne:

$$A = 4r^2\pi$$



Hengerpalást felszíne:

$$A = 2rm\pi$$