Geometria 1 normál szint

Diákat írta: Moussong Gábor

Előadó: Naszódi Márton
nmarci@math.elte.hu

www.math.elte.hu/˜nmarci

ELTE TTK Geometriai Tsz.

Budapest

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Konvexitás
- Sokszögek és poliéderek
  - Sokszögek és konvex sokszögek
  - Konvex poliéderek, szabályos poliéderek

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

Ezeket a fogalmakat nem definiáljuk.
Tulajdonságaikon keresztül határozzuk meg őket.

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

A tér az euklideszi geometria alaphalmaza,

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

A tér az euklideszi geometria alaphalmaza,
a pontok az alaphalmaz elemei,

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

A tér az euklideszi geometria alaphalmaza,
a pontok az alaphalmaz elemei,
az egyenesek és a síkok az alaphalmaz bizonyos részhalmazai.

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

A tér az euklideszi geometria alaphalmaza,
a pontok az alaphalmaz elemei,
az egyenesek és a síkok az alaphalmaz bizonyos részhalmazai.

(Általánosságban: a geometriai alakzatok a tér részhalmazai.)

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

Szóhasználat:

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

Szóhasználat:
a térelemek között fennálló tartalmazást geometriai nyelven illeszkedésnek mondjuk.

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

Szóhasználat:
a térelemek között fennálló tartalmazást geometriai nyelven illeszkedésnek mondjuk. Például:

- a P pont illeszkedik az e egyenesre (vagy e illeszkedik P-re), ha $P \in e$;

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

Szóhasználat:
a térelemek között fennálló tartalmazást geometriai nyelven illeszkedésnek mondjuk. Például:

- a P pont illeszkedik az e egyenesre (vagy e illeszkedik P-re), ha $P \in e$;
- az f egyenes illeszkedik az S síkra (vagy S illeszkedik f-re), ha $f \subset S$.

Térelemek

Az euklideszi térgeometria alkotóelemei:

tér, pontok, egyenesek, síkok

Szóhasználat:
a térelemek között fennálló tartalmazást geometriai nyelven illeszkedésnek mondjuk. Például:

- a P pont illeszkedik az e egyenesre (vagy e illeszkedik P-re), ha $P \in e$;
- az f egyenes illeszkedik az S síkra (vagy S illeszkedik f-re), ha $f \subset S$.

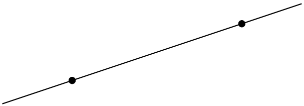
Pontok egy rendszerét kollineárisnak mondjuk, ha a pontok egy egyenesre illeszkednek.

Térelemek

Néhány jellegzetes illeszkedési tulajdonság:

Térelemek

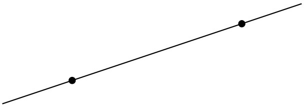
Néhány jellegzetes illeszkedési tulajdonság:



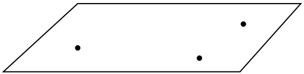
Bármely két különböző ponthoz
egyértelműen létezik
rájuk illeszkedő egyenes.

Térelemek

Néhány jellegzetes illeszkedési tulajdonság:



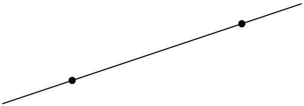
Bármely két különböző ponthoz egyértelműen létezik rájuk illeszkedő egyenes.



Bármely három nemkollineáris ponthoz egyértelműen létezik rájuk illeszkedő sík.

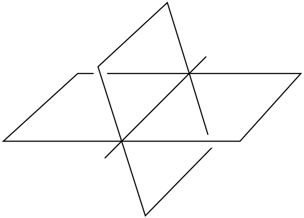
Térelemek

Néhány jellegzetes illeszkedési tulajdonság:



Bármely két különböző ponthoz egyértelműen létezik rájuk illeszkedő egyenes.

Bármely három nemkollineáris ponthoz egyértelműen létezik rájuk illeszkedő sík.



Ha két síknak van közös pontja, akkor a közös részük egyenes.

Felbontási tulajdonságok (rendezés)

Az egyenest bármely pontja két félegyenesre bontja,

Felbontási tulajdonságok (rendezés)

Az egyenest bármely pontja két félegyenesre bontja,

a félegyenest bármely, a végpontjától különböző pontja
egy szakaszra és egy félegyenesre bontja,

Felbontási tulajdonságok (rendezés)

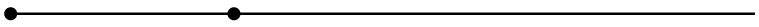
Az egyenest bármely pontja két félegyenesre bontja,

a félegyenest bármely, a végpontjától különböző pontja
egy szakaszra és egy félegyenesre bontja,

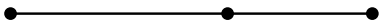
a szakaszt bármely, a végpontjaitól különböző pontja
két részszakaszra bontja.

Felbontási tulajdonságok (rendezés)

Az egyenest bármely pontja két félegyenesre bontja,



a félegyenest bármely, a végpontjától különböző pontja
egy szakaszra és egy félegyenesre bontja,



a szakaszt bármely, a végpontjaitól különböző pontja
két részszakaszra bontja.

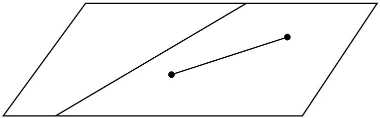
A síkot bármely benne fekvő egyenes két félsíkra,
a teret bármely sík két féltérre bontja.

Felbontási tulajdonságok (rendezés)

Beszélhetünk zárt vagy nyílt félegyenesről, szakaszról, félsíkról vagy féltérről aszerint, hogy a határt hozzávesszük-e vagy nem.
(Megállapodás: jelző nélkül zártnak értjük.)

Felbontási tulajdonságok (rendezés)

Beszélhetünk zárt vagy nyílt félegyenesről, szakaszról, félsíkról vagy féltérről aszerint, hogy a határt hozzávesszük-e vagy nem.
(Megállapodás: jelző nélkül zártnak értjük.)



Két pont akkor és csak akkor tartozik ugyanahhoz a nyílt félegyeneshez (nyílt félsíkhoz, illetve nyílt féltérhez), ha az összekötő szakasz diszjunkt az elválasztó ponttól (egyenestől, illetve síktól).

A tér mozgásai

A tér „mindenütt egyforma”, azaz a térbeli idomok szabadon mozgathatók.

A tér mozgásai

A tér „mindenütt egyforma”, azaz a térbeli idomok szabadon mozgathatók.

Ezeket a mozgásokat úgy fogjuk föl, hogy az egész tér mozdul el és magával viszi a vizsgált alakzatot.

A tér mozgásai

A tér „mindenütt egyforma”, azaz a térbeli idomok szabadon mozgathatók.

Ezeket a mozgásokat úgy fogjuk föl, hogy az egész tér mozdul el és magával viszi a vizsgált alakzatot.

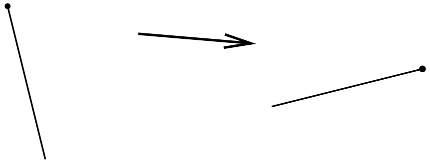
Egy mozgás vizsgálatakor csak a kiinduló és a végső helyzetet hasonlítjuk össze; azzal nem törődünk, hogy milyen utat járunk be a mozgás fizikai végrehajtása során.

A tér mozgásai

Bármely pontból bármely pontba eljuthatunk alkalmas mozgással.

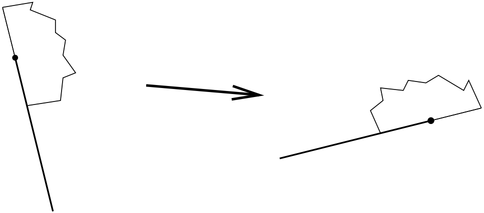
A tér mozgásai

Bármely pontból bármely pontba eljuthatunk alkalmas mozgással.
Sőt:



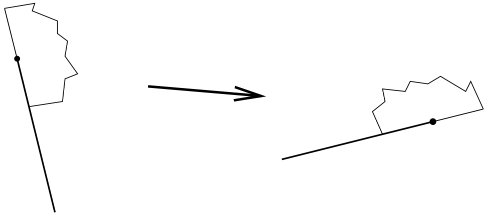
A tér mozgásai

Bármely pontból bármely pontba eljuthatunk alkalmas mozgással.
Sőt:



A tér mozgásai

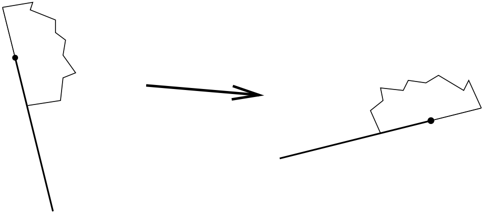
Bármely pontból bármely pontba eljuthatunk alkalmas mozgással. Sőt:



Zászlónak nevezünk egy olyan alakzatot, amely egy félsíkból és a határán kijelölt félegyenesből áll.

A tér mozgásai

Bármely pontból bármely pontba eljuthatunk alkalmas mozgással.
Sőt:



Zászlónak nevezünk egy olyan alakzatot, amely egy félsíkból és a határán kijelölt félegyenesből áll.

Bármely két zászlóhoz egy és csak egy olyan mozgás létezik, amely az első zászlót a másodikba viszi.

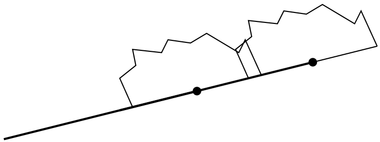
A tér mozgásai

Példák:

A tér mozgásai

Példák:

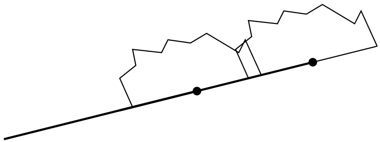
- Ha a két zászlóhoz tartozó félsík ugyanaz, és az egyik félegyenes tartalmazza a másikat, akkor a zászlók által megadott mozgás eltolás.



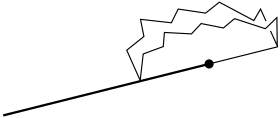
A tér mozgásai

Példák:

- Ha a két zászlóhoz tartozó félsík ugyanaz, és az egyik félegyenes tartalmazza a másikat, akkor a zászlók által megadott mozgás eltolás.



- Ha a két zászlóhoz tartozó félegyenes ugyanaz, akkor a zászlók által megadott mozgás forgatás egyenes körül.



Távolság, hosszúság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.

Távolság, hosszúság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szakaszok hosszát (= pontpárok távolságát) pozitív valós számokkal mérjük. Az AB szakasz hosszát $d(A, B)$-vel, $\overline{AB}$-vel, vagy AB-vel jelölhetjük. Nyilván $d(B, A) = d(A, B)$.

Távolság, hosszúság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szakaszok hosszát (= pontpárok távolságát) pozitív valós számokkal mérjük. Az AB szakasz hosszát $d(A, B)$-vel, $\overline{AB}$-vel, vagy AB-vel jelölhetjük. Nyilván $d(B, A) = d(A, B)$.

A távolságmérés meghatározó tulajdonságai:

Távolság, hosszúság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szakaszok hosszát (= pontpárok távolságát) pozitív valós számokkal mérjük. Az AB szakasz hosszát $d(A,B)$-vel, $\overline{AB}$-vel, vagy AB-vel jelölhetjük. Nyilván $d(B,A) = d(A,B)$.

A távolságmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szakaszok hossza egyenlő;

Távolság, hosszúság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szakaszok hosszát (= pontpárok távolságát) pozitív valós számokkal mérjük. Az AB szakasz hosszát $d(A, B)$-vel, $\overline{AB}$-vel, vagy AB-vel jelölhetjük. Nyilván $d(B, A) = d(A, B)$.

A távolságmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szakaszok hossza egyenlő;
- Ha az AC szakaszt a B pont két részszakaszra osztja, akkor $AB + BC = AC$;

Távolság, hosszúság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szakaszok hosszát (= pontpárok távolságát) pozitív valós számokkal mérjük. Az AB szakasz hosszát $d(A,B)$-vel, $\overline{AB}$-vel, vagy AB-vel jelölhetjük. Nyilván $d(B,A) = d(A,B)$.

A távolságmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szakaszok hossza egyenlő;
- Ha az AC szakaszt a B pont két részszakaszra osztja, akkor $AB + BC = AC$;
- Tetszőlegesen adott $d > 0$ valós számhoz bármely O kezdőpontú félegyenesen egyértelműen létezik olyan A pont, hogy $OA = d$.

Távolság, hosszúság

Két szakasz egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szakaszok hosszát (= pontpárok távolságát) pozitív valós számokkal mérjük. Az AB szakasz hosszát $d(A,B)$-vel, $\overline{AB}$-vel, vagy AB-vel jelölhetjük. Nyilván $d(B,A) = d(A,B)$.

A távolságmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szakaszok hossza egyenlő;
- Ha az AC szakaszt a B pont két részszakaszra osztja, akkor $AB + BC = AC$;
- Tetszőlegesen adott $d > 0$ valós számhoz bármely O kezdőpontú félegyenesen egyértelműen létezik olyan A pont, hogy $OA = d$.

Megállapodás: bármely P pontra $d(P,P) = 0$ („nullszakasz” hossza 0).

Irányított szakasz és egyenes, előjeles távolság

Irányított szakasz: a végpontok sorrendje is számít.

Irányított szakasz és egyenes, előjeles távolság

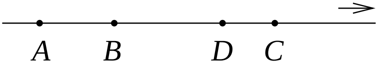
Irányított szakasz: a végpontok sorrendje is számít.

Ha egy egyenes két lehetséges irányítása közül az egyiket rögzítjük és pozitívnak tekintjük, akkor az egyenesen fekvő irányított szakaszok hosszát előjellel láthatjuk el.

Irányított szakasz és egyenes, előjeles távolság

Irányított szakasz: a végpontok sorrendje is számít.

Ha egy egyenes két lehetséges irányítása közül az egyiket rögzítjük és pozitívnak tekintjük, akkor az egyenesen fekvő irányított szakaszok hosszát előjellel láthatjuk el.

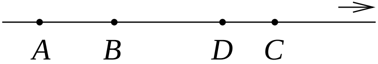


Itt $AB > 0$ és $CD < 0$. (Persze $BA = -AB$.)

Irányított szakasz és egyenes, előjeles távolság

Irányított szakasz: a végpontok sorrendje is számít.

Ha egy egyenes két lehetséges irányítása közül az egyiket rögzítjük és pozitívnak tekintjük, akkor az egyenesen fekvő irányított szakaszok hosszát előjellel láthatjuk el.



Itt $AB > 0$ és $CD < 0$. (Persze $BA = -AB$.)

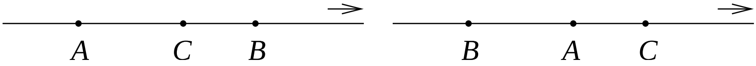
Megjegyzés: az előjeles távolság jelölésére csak AB-t vagy $\overline{AB}$-t használjuk; a $d(A, B)$ jelölés mindig a szokásos (előjel nélküli) távolságra vonatkozik.

Irányított szakasz és egyenes, előjeles távolság

Irányított szakasz: a végpontok sorrendje is számít.

Ha egy egyenes két lehetséges irányítása közül az egyiket rögzítjük és pozitívnak tekintjük, akkor az egyenesen fekvő irányított szakaszok hosszát előjellel láthatjuk el.

Előjeles távolságok használatával az $AB + BC = AC$ képlet az egyenes bármely három pontjára, azok tetszőleges sorrendje esetén is érvényes:

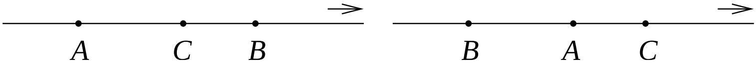


Irányított szakasz és egyenes, előjeles távolság

Irányított szakasz: a végpontok sorrendje is számít.

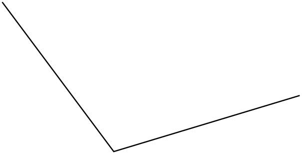
Ha egy egyenes két lehetséges irányítása közül az egyiket rögzítjük és pozitívnak tekintjük, akkor az egyenesen fekvő irányított szakaszok hosszát előjellel láthatjuk el.

Előjeles távolságok használatával az $AB + BC = AC$ képlet az egyenes bármely három pontjára, azok tetszőleges sorrendje esetén is érvényes:



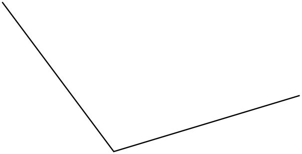
Ha egy egyenesen megadunk egy irányítást, felveszünk egy kezdőpontot, és rögzítjük a távolságegységet, akkor az irányított távolságmérés az egyenest a jól ismert $\mathbb{R}$ valós számegyenessel azonosítja.

Szög, szögmérték



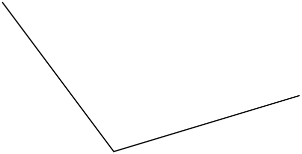
Szögvonal: közös csúcsú két félegyenes egyesítése.

Szög, szögmérték



Szögvonal: közös csúcsú két félegyenes egyesítése. Bármely szögvonal a síkot két részre vágja.

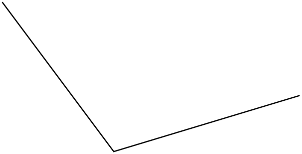
Szög, szögmérték



Szögvonal: közös csúcsú két félegyenes egyesítése. Bármely szögvonal a síkot két részre vágja.

Szögtartomány vagy szög: mindkét résztartomány (a határvonalukkal együtt).

Szög, szögmérték

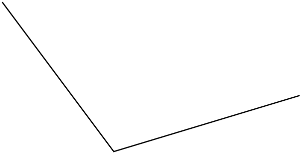


Szögvonal: közös csúcsú két félegyenes egyesítése. Bármely szögvonal a síkot két részre vágja.

Szögtartomány vagy szög: mindkét résztartomány (a határvonalukkal együtt).

Két szög egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.

Szög, szögmérték

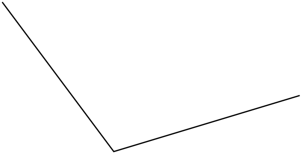


Szögvonal: közös csúcsú két félegyenes egyesítése. Bármely szögvonal a síkot két részre vágja.

Szögtartomány vagy szög: mindkét résztartomány (a határvonalukkal együtt).

Két szög egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.
Szögek nagyságát pozitív valós számokkal mérjük (szögmérték).

Szög, szögmérték

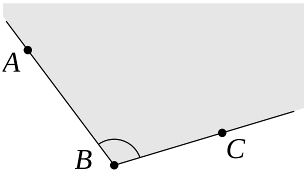


Szögvonal: közös csúcsú két félegyenes egyesítése. Bármely szögvonal a síkot két részre vágja.

Szögtartomány vagy szög: mindkét résztartomány (a határvonalukkal együtt).

Két szög egybevágó, ha létezik olyan mozgás, amely az egyiket a másikba viszi.

Szögek nagyságát pozitív valós számokkal mérjük (szögmérték).



Az ABC szög mértékét $ABC\sphericalangle$-gel vagy $B\sphericalangle$-gel jelöljük.
Nyilván $CBA\sphericalangle = ABC\sphericalangle$.

Szög, szögmérték

A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

Szög, szögmérték

A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szögek mértéke egyenlő;

Szög, szögmérték

A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szögek mértéke egyenlő;
- Ha egy szöget a csúcsából induló félegyenes két részszögre bont, akkor a mértéke a részszögek mértékeinek az összege.

Szög, szögmérték

A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szögek mértéke egyenlő;
- Ha egy szöget a csúcsából induló félegyenes két részszögre bont, akkor a mértéke a részszögek mértékeinek az összege.
- Bármely szög egy adott, nála nagyobb szögtartományban bármelyik szögszártól kiindulva egyértelműen fölmérhető.

Szög, szögmérték

A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szögek mértéke egyenlő;
- Ha egy szöget a csúcsából induló félegyenes két részszögre bont, akkor a mértéke a részszögek mértékeinek az összege.
- Bármely szög egy adott, nála nagyobb szögtartományban bármelyik szögszártól kiindulva egyértelműen fölmérhető.

Speciális szögek:

Szög, szögmérték

A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szögek mértéke egyenlő;
- Ha egy szöget a csúcsából induló félegyenes két részszögre bont, akkor a mértéke a részszögek mértékeinek az összege.
- Bármely szög egy adott, nála nagyobb szögtartományban bármelyik szögszártól kiindulva egyértelműen fölmérhető.

Speciális szögek:
egyenesszög (mértéke π vagy 180°),
derékszög (mértéke $\pi/2$ vagy 90°), (a merőlegesség jele: $\perp$),
hegyesszög (derékszögnél kisebb),
tompaszög (derékszögnél nagyobb, egyenesszögnél kisebb),
konvex szög (mértéke $\leq \pi$),
konkáv szög (mértéke $> \pi$),
megállapodás: nullszög (0), teljesszög (2π).

Szög, szögmérték

A szögmérés meghatározó tulajdonságai:

- Egybevágó szögek mértéke egyenlő;
- Ha egy szöget a csúcsából induló félegyenes két részszögre bont, akkor a mértéke a részszögek mértékeinek az összege.
- Bármely szög egy adott, nála nagyobb szögtartományban bármelyik szögszártól kiindulva egyértelműen fölmérhető.

Speciális szögek:
egyenesszög (mértéke π vagy 180°),
derékszög (mértéke $\pi/2$ vagy 90°), (a merőlegesség jele: $\perp$),
hegyesszög (derékszögnél kisebb),
tompaszög (derékszögnél nagyobb, egyenesszögnél kisebb),
konvex szög (mértéke $\leq \pi$),
konkáv szög (mértéke $> \pi$),
megállapodás: nullszög (0), teljesszög (2π).

Metsző egyenesek hajlásszöge: mindig $\leq \pi/2$.

Forgásszög, előjeles szögmérték

Forgásszög, előjeles szögmérték

Egy síkon irányítást adhatunk meg azáltal, hogy a két lehetséges síkbeli forgásirány egyikét kiválasztjuk és pozitívnak tekintjük.

Forgásszög, előjeles szögmérték

Egy síkon irányítást adhatunk meg azáltal, hogy a két lehetséges síkbeli forgásirány egyikét kiválasztjuk és pozitívnak tekintjük.
Ha az irányított síkon két közös kezdőpontú félegyenes sorrendje is adott, akkor az ezekhez tartozó forgásszög (vagy előjeles szög): annak a szögelfordulásnak a mértéke (a forgásirány előjelét is tekintetbe vébe), amellyel az első félegyenesből a másodikba jutunk.

Forgásszög, előjeles szögmérték

Egy síkon irányítást adhatunk meg azáltal, hogy a két lehetséges síkbeli forgásirány egyikét kiválasztjuk és pozitívnak tekintjük.
Ha az irányított síkon két közös kezdőpontú félegyenes sorrendje is adott, akkor az ezekhez tartozó forgásszög (vagy előjeles szög): annak a szögelfordulásnak a mértéke (a forgásirány előjelét is tekintetbe vébe), amellyel az első félegyenesből a másodikba jutunk.
A forgásszög tetszőleges valós szám lehet, és csak modulo 2π van meghatározva.

Forgásszög, előjeles szögmérték

Egy síkon irányítást adhatunk meg azáltal, hogy a két lehetséges síkbeli forgásirány egyikét kiválasztjuk és pozitívnak tekintjük.
Ha az irányított síkon két közös kezdőpontú félegyenes sorrendje is adott, akkor az ezekhez tartozó forgásszög (vagy előjeles szög): annak a szögelfordulásnak a mértéke (a forgásirány előjelét is tekintetbe vébe), amellyel az első félegyenesből a másodikba jutunk.
A forgásszög tetszőleges valós szám lehet, és csak modulo 2π van meghatározva.
Például $\pi/2$ és $-(3/2)\pi$ (illetve 90° és -270°) ugyanazt a forgásszöget jelöli.

Forgásszög, előjeles szögmérték

Egy síkon irányítást adhatunk meg azáltal, hogy a két lehetséges síkbeli forgásirány egyikét kiválasztjuk és pozitívnak tekintjük.
Ha az irányított síkon két közös kezdőpontú félegyenes sorrendje is adott, akkor az ezekhez tartozó forgásszög (vagy előjeles szög): annak a szögelfordulásnak a mértéke (a forgásirány előjelét is tekintetbe vébe), amellyel az első félegyenesből a másodikba jutunk.
A forgásszög tetszőleges valós szám lehet, és csak modulo 2π van meghatározva.
Megállapodás: ha $AOB\sphericalangle$ irányított szöget jelöl, akkor mindig OA a sorrendben az első, OB a második félegyenes.

Forgásszög, előjeles szögmérték

Egy síkon irányítást adhatunk meg azáltal, hogy a két lehetséges síkbeli forgásirány egyikét kiválasztjuk és pozitívnak tekintjük.

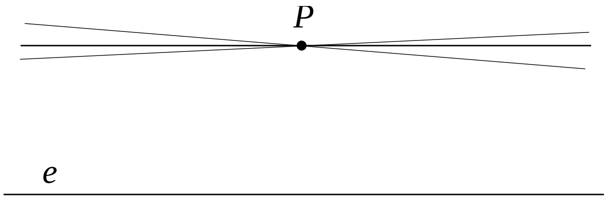
Ha az irányított síkon két közös kezdőpontú félegyenes sorrendje is adott, akkor az ezekhez tartozó forgásszög (vagy előjeles szög): annak a szögelfordulásnak a mértéke (a forgásirány előjelét is tekintetbe vébe), amellyel az első félegyenesből a másodikba jutunk.

A forgásszög tetszőleges valós szám lehet, és csak modulo 2π van meghatározva.

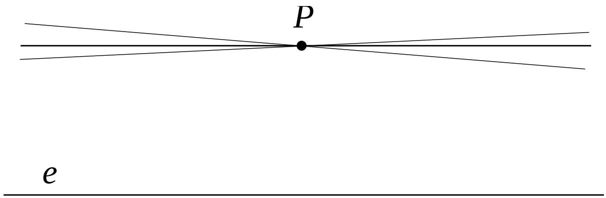
Megállapodás: ha $AOB\sphericalangle$ irányított szöget jelöl, akkor mindig OA a sorrendben az első, OB a második félegyenes.

Irányított szögekkel számolva a közös kezdőpontú OA, OB és OC félegyenesek elhelyezkedésétől függetlenül mindig érvényben van az $AOB\sphericalangle + BOC\sphericalangle = AOC\sphericalangle$ összefüggés.

Párhuzamosság



Párhuzamosság



Párhuzamossági axióma:

Ha a P pont nem illeszkedik az e egyenesre, akkor az általuk meghatározott síkban a P-n keresztül csak egy olyan egyenes létezik, amely e-t nem metszi.

Párhuzamosság

Két egyenes párhuzamos, ha vagy megegyeznek, vagy pedig egy síkba esnek és nincs közös pontjuk.
(A párhuzamosság jele: $\|$)

Párhuzamosság

Két egyenes párhuzamos, ha vagy megegyeznek, vagy pedig egy síkba esnek és nincs közös pontjuk.
(A párhuzamosság jele: $\|$)

Két félegyenes egyirányú, ha vagy az egyik tartalmazza a másikat, vagy pedig különböző párhuzamos egyeneseken fekszenek és a kezdőpontjaik egyenese nem választja el őket. Ha párhuzamosak és nem egyirányúak, akkor ellentétes irányúnak mondjuk a félegyeneseket.

Párhuzamosság

Két egyenes párhuzamos, ha vagy megegyeznek, vagy pedig egy síkba esnek és nincs közös pontjuk.
(A párhuzamosság jele: $\|$)

Két félegyenes egyirányú, ha vagy az egyik tartalmazza a másikat, vagy pedig különböző párhuzamos egyeneseken fekszenek és a kezdőpontjaik egyenese nem választja el őket. Ha párhuzamosak és nem egyirányúak, akkor ellentétes irányúnak mondjuk a félegyeneseket.

A párhuzamosság és az egyirányúság tranzitív reláció, azaz:
Ha két egyenes (félegyenes) párhuzamos (egyirányú) egy harmadikkal, akkor egymással is párhuzamosak (egyirányúak).

Párhuzamos szárú szögek

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Párhuzamos szárú szögek

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Megjegyzések: (1) A tétel térbeli szögekre is vonatkozik.

Párhuzamos szárú szögek

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Megjegyzések: (1) A tétel térbeli szögekre is vonatkozik.
(2) Fel kell tenni, hogy konvex szögekről van szó.
Találjunk ellenpéldát a nem feltétlenül konvex szögek körében!

Párhuzamos szárú szögek

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Példák:

Párhuzamos szárú szögek

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Példák:

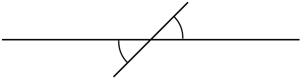
egyállású szögek (egyenlők)

Párhuzamos szárú szögek

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Példák:

egyállású szögek (egyenlők)



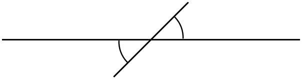
csúcsszögek (egyenlők)

Párhuzamos szárú szögek

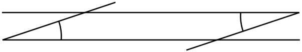
Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Példák:

egyállású szögek (egyenlők)



csúcsszögek (egyenlők)

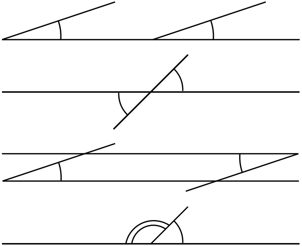


váltószögek (egyenlők)

Párhuzamos szárú szögek

Ha két konvex szög szárai rendre egyirányúak, vagy ellentétes irányúak, akkor a két szög mértéke egyenlő. Ha a szárak egyike egyirányú, másika ellentétes irányú, akkor a két szög mértéke π-re egészíti ki egymást.

Példák:



egyállású szögek (egyenlők)

csúcsszögek (egyenlők)

váltószögek (egyenlők)

mellékszögek (kiegészítő szögek)

Párhuzamos síkok

Két sík párhuzamos, ha megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk.

Párhuzamos síkok

Két sík párhuzamos, ha megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk.

Fontosabb tulajdonságok:

Párhuzamos síkok

Két sík párhuzamos, ha megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk.

Fontosabb tulajdonságok:

- Adott ponton át egyértelműen fektethető adott síkkal párhuzamos sík.

Párhuzamos síkok

Két sík párhuzamos, ha megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk.

Fontosabb tulajdonságok:

- Adott ponton át egyértelműen fektethető adott síkkal párhuzamos sík.
- A párhuzamosság a síkok körében is tranzitív reláció.

Párhuzamos síkok

Két sík párhuzamos, ha megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk.

Fontosabb tulajdonságok:

- Adott ponton át egyértelműen fektethető adott síkkal párhuzamos sík.
- A párhuzamosság a síkok körében is tranzitív reláció.
- Ha egy egyenes két párhuzamos sík egyikét döfi, akkor a másik síkot is döfi.

Párhuzamos síkok

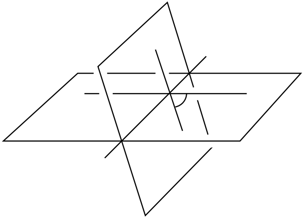
Két sík **párhuzamos**, ha megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk.

Fontosabb tulajdonságok:

- Adott ponton át egyértelműen fektethető adott síkkal párhuzamos sík.
- A párhuzamosság a síkok körében is tranzitív reláció.
- Ha egy egyenes két párhuzamos sík egyikét döfi, akkor a másik síkot is döfi.
- Ha egy sík két párhuzamos sík egyikét metszi, akkor a másik síkot is metszi, és a két metszésvonal párhuzamos.

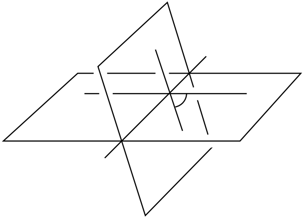
Metsző síkok

Metsző síkok



A két sík hajlásszögén a metszésvonal valamely pontjában a síkokban a metszésvonalra állított merőleges egyenesek hajlásszögét értjük. Ez mindig $\leq \pi/2$.

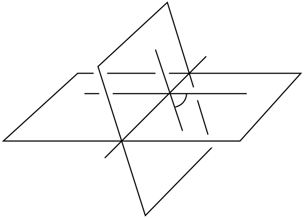
Metsző síkok



A két sík hajlásszögén a metszésvonal valamely pontjában a síkokban a metszésvonalra állított merőleges egyenesek hajlásszögét értjük. Ez mindig $\leq \pi/2$.

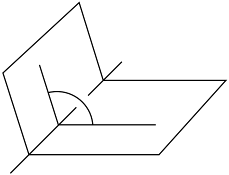
Két közös határegyenesű félsík a teret két lapszögtartományra (vagy lapszögre) bontja. Ennek mértékét így határozzuk meg:

Metsző síkok



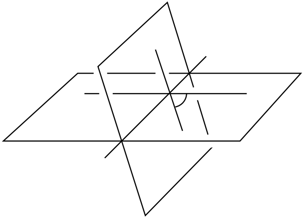
A két sík hajlásszögén a metszésvonal valamely pontjában a síkokban a metszésvonalra állított merőleges egyenesek hajlásszögét értjük. Ez mindig $\leq \pi/2$.

Két közös határegyenesű félsík a teret két lapszögtartományra (vagy lapszögre) bontja. Ennek mértékét így határozzuk meg:



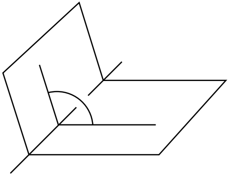
A metszésvonal valamely pontjában a félsíkokon belül egy-egy merőleges félegyenest állítunk. Ezeknek azt a szögét tekintjük, amely a lapszögtartományba esik. Ez a szög lehet tompa vagy akár konkáv is.

Metsző síkok



A két sík hajlásszögén a metszésvonal valamely pontjában a síkokban a metszésvonalra állított merőleges egyenesek hajlásszögét értjük. Ez mindig $\leq \pi/2$.

Két közös határegyenesű félsík a teret két lapszögtartományra (vagy lapszögre) bontja. Ennek mértékét így határozzuk meg:



A metszésvonal valamely pontjában a félsíkokon belül egy-egy merőleges félegyenest állítunk. Ezeknek azt a szögét tekintjük, amely a lapszögtartományba esik. Ez a szög lehet tompa vagy akár konkáv is.

A definíciók korrektek: a mondott szögek nem függnek a metszésvonal pontjának megválasztásától. (Egyállású szögek.)

Egyenes és sík párhuzamossága

Az e egyenes és az S sík párhuzamos, ha $e \subset S$, vagy $S \cap e = \emptyset$.

Egyenes és sík párhuzamossága

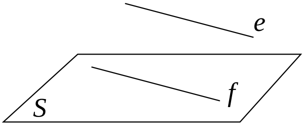
Az e egyenes és az S sík párhuzamos, ha $e \subset S$, vagy $S \cap e = \emptyset$.

Fontosabb tulajdonságok:

Egyenes és sík párhuzamossága

Az e egyenes és az S sík párhuzamos, ha $e \subset S$, vagy $S \cap e = \emptyset$.

Fontosabb tulajdonságok:

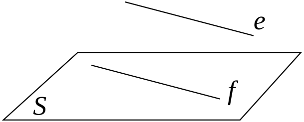


$e \parallel S$ akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $f \subset S$ egyenes, hogy $e \parallel f$.

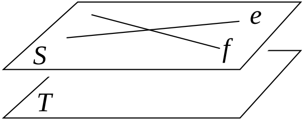
Egyenes és sík párhuzamossága

Az e egyenes és az S sík párhuzamos, ha $e \subset S$, vagy $S \cap e = \emptyset$.

Fontosabb tulajdonságok:

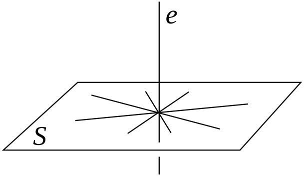


$e \parallel S$ akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $f \subset S$ egyenes, hogy $e \parallel f$.



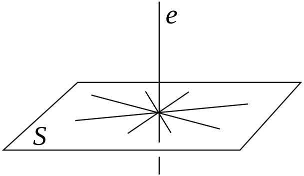
Ha S és T síkok, $e, f \subset S$ metsző egyenesek, $e \parallel T$ és $f \parallel T$, akkor $S \parallel T$.

Egyenes és sík merőlegessége



Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döfésponton átmenő összes S-beli egyenesre.

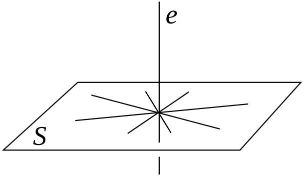
Egyenes és sík merőlegessége



Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspionton átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

Egyenes és sík merőlegessége

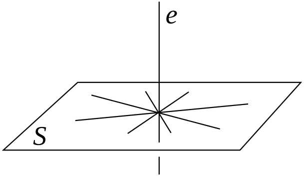


Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspontón átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha e merőleges két különböző, a döfésponton átmenő S-beli egyenesre, akkor $e \perp S$.

Egyenes és sík merőlegessége

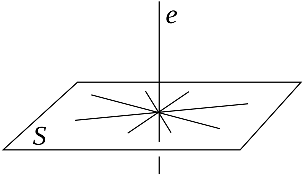


Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspontón átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha e merőleges két különböző, a döféspontón átmenő S-beli egyenesre, akkor $e \perp S$.
- Egy e egyenesre valamely rögzített pontjában állított merőleges egyenesek síkot alkotnak, amely merőleges az e egyenesre.

Egyenes és sík merőlegessége

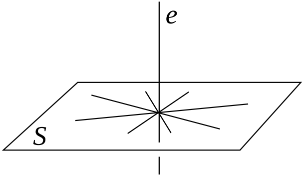


Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspontón átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha e merőleges két különböző, a döféspontón átmenő S-beli egyenesre, akkor $e \perp S$.
- Egy e egyenesre valamely rögzített pontjában állított merőleges egyenesek síkot alkotnak, amely merőleges az e egyenesre.
- Ha $e \perp S$, $e \parallel e'$ és $S \parallel S'$, akkor $e' \perp S'$.

Egyenes és sík merőlegessége

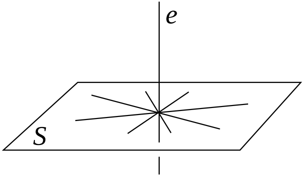


Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspronton átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha e merőleges két különböző, a döféspronton átmenő S-beli egyenesre, akkor $e \perp S$.
- Egy e egyenesre valamely rögzített pontjában állított merőleges egyenesek síkot alkotnak, amely merőleges az e egyenesre.
- Ha $e \perp S$, $e \parallel e'$ és $S \parallel S'$, akkor $e' \perp S'$.
- Ha $e \perp S$ és $e' \perp S$, akkor $e \parallel e'$.

Egyenes és sík merőlegessége

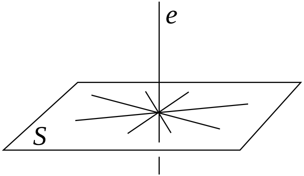


Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döfésponton átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha $e \perp S$ és $e \perp S'$, akkor $S \parallel S'$.

Egyenes és sík merőlegessége

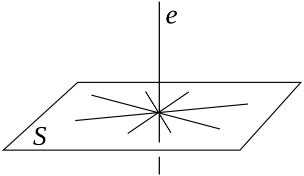


Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspontonon átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha $e \perp S$ és $e \perp S'$, akkor $S \parallel S'$.
- Adott S síkhoz és adott P ponthoz egyetlen olyan e egyenes található, hogy $P \in e$ és $e \perp S$.

Egyenes és sík merőlegessége

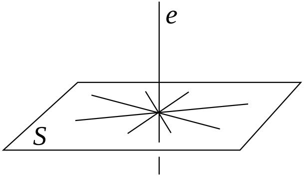


Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspontan átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha $e \perp S$ és $e \perp S'$, akkor $S \parallel S'$.
- Adott S síkhoz és adott P ponthoz egyetlen olyan e egyenes található, hogy $P \in e$ és $e \perp S$.
- Adott e egyeneshez és adott P ponthoz egyetlen olyan S sík található, hogy $P \in S$ és $e \perp S$.

Egyenes és sík merőlegessége



Az e egyenes merőleges az S síkra, ha $e \cap S \neq \emptyset$, és e merőleges a döféspononton átmenő összes S-beli egyenesre.

Fontosabb tulajdonságok:

- Ha $e \perp S$ és $e \perp S'$, akkor $S \parallel S'$.
- Adott S síkhoz és adott P ponthoz egyetlen olyan e egyenes található, hogy $P \in e$ és $e \perp S$.
- Adott e egyeneshez és adott P ponthoz egyetlen olyan S sík található, hogy $P \in S$ és $e \perp S$.
- Ha S_1 és S_2 metsző síkok, $e = S_1 \cap S_2$, $S_1 \perp S$ és $S_2 \perp S$, akkor $e \perp S$.

Egyenes és sík hajlásszöge

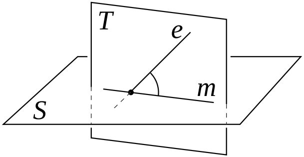
Egyenes és sík hajlásszöge

Ha az e egyenes merőleges az S síkra, akkor a hajlásszögük $\pi/2$.

Egyenes és sík hajlásszöge

Ha az e egyenes merőleges az S síkra, akkor
a hajlásszögük $\pi/2$.

Ha nem:

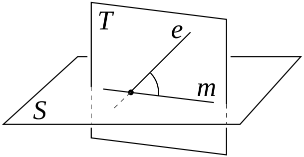


Egyetlen olyan T sík létezik, amelyre
$e \subset T$ és $T \perp S$. Jelölje m
az S és T síkok metszésvonalát.

Egyenes és sík hajlásszöge

Ha az e egyenes merőleges az S síkra, akkor
a hajlásszögük $\pi/2$.

Ha nem:



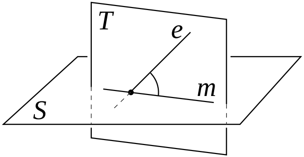
Egyetlen olyan T sík létezik, amelyre $e \subset T$ és $T \perp S$. Jelölje m az S és T síkok metszésvonalát.

Az e és S hajlásszögén e és m hajlásszögét értjük.

Egyenes és sík hajlásszöge

Ha az e egyenes merőleges az S síkra, akkor
a hajlásszögük $\pi/2$.

Ha nem:



Egyetlen olyan T sík létezik, amelyre $e \subset T$ és $T \perp S$. Jelölje m az S és T síkok metszésvonalát.

Az e és S hajlásszögén e és m hajlásszögét értjük.

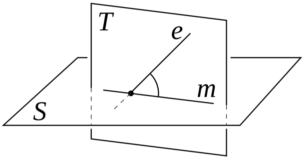
Észrevételek:

- m az e merőleges vetülete S-en;

Egyenes és sík hajlásszöge

Ha az e egyenes merőleges az S síkra, akkor a hajlásszögük $\pi/2$.

Ha nem:



Egyetlen olyan T sík létezik, amelyre $e \subset T$ és $T \perp S$. Jelölje m az S és T síkok metszésvonalát.

Az e és S hajlásszögén e és m hajlásszögét értjük.

Észrevételek:

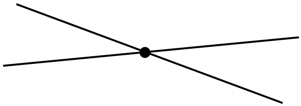
- m az e merőleges vetülete S-en;
- e és S hajlásszöge a lehető legkisebb az olyan szögek között, amelyeket e zár be az S-ben fekvő, a döféspont on átmenő egyenesekkel.

Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

Három lehetőség:

Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

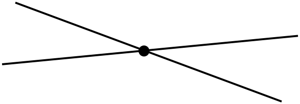
Három lehetőség:



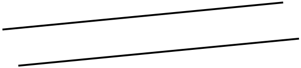
metsző,

Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

Három lehetőség:



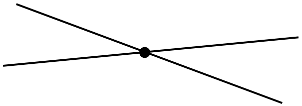
metsző,



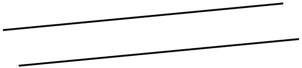
párhuzamos,

Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

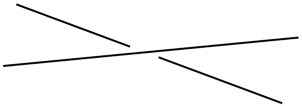
Három lehetőség:



metsző,



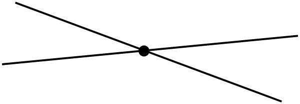
párhuzamos,



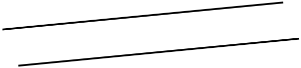
sem metsző, sem párhuzamos:
kitérő

Két egyenes kölcsönös helyzete a térben

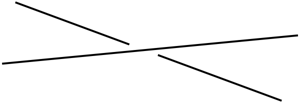
Három lehetőség:



metsző,



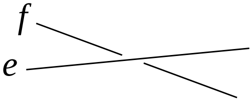
párhuzamos,



sem metsző, sem párhuzamos:
kitérő

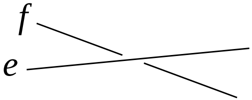
Két egyenes akkor és csak akkor kitérő, ha nincs egy síkban.

Kitérő egyenesek szöge

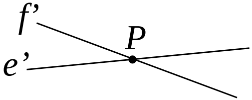


Adottak az e és f kitérő egyenesek.

Kitérő egyenesek szöge

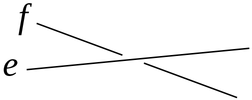


Adottak az e és f kitérő egyenesek.

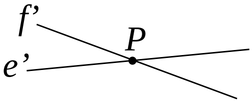


A tér egy tetszőleges P pontján át húzzunk velük párhuzamos egyeneseket: e' és f'.

Kitérő egyenesek szöge



Adottak az e és f kitérő egyenesek.



A tér egy tetszőleges P pontján át húzzunk velük párhuzamos egyeneseket: e' és f'.

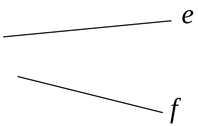
Az e és f egyenesek szögén az e' és f' metsző egyenesek hajlásszögét értjük.

A definíció korrektségéhez: e' és f' hajlásszöge nem függ a P pont megválasztásától (egyállású szögek).

Normáltranszverzális

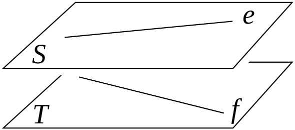
Normáltranszverzális

A kitérő egyenesek fontos illeszkedési tulajdonsága:



Normáltranszverzális

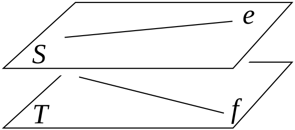
A kitérő egyenesek fontos illeszkedési tulajdonsága:



Ha e és f kitérő egyenesek, akkor egyértelműen találhatók őket tartalmazó párhuzamos síkok: $S \supset e$, $T \supset f$, $S \parallel T$.

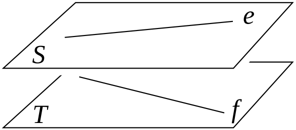
Normáltranszverzális

A kitérő egyenesek fontos illeszkedési tulajdonsága:



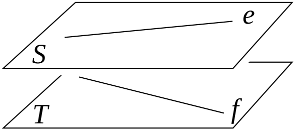
Ha e és f kitérő egyenesek, akkor egyértelműen találhatók őket tartalmazó párhuzamos síkok: $S \supset e$, $T \supset f$, $S \parallel T$.

Az S-re és T-re merőleges egyenesek közül pontosan egy metszi e-t is és f-et is:



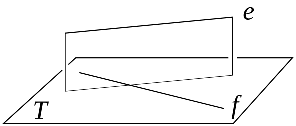
Normáltranszverzális

A kitérő egyenesek fontos illeszkedési tulajdonsága:



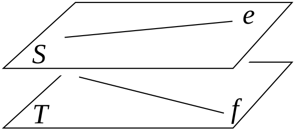
Ha e és f kitérő egyenesek, akkor egyértelműen találhatók őket tartalmazó párhuzamos síkok: $S \supset e$, $T \supset f$, $S \parallel T$.

Az S-re és T-re merőleges egyenesek közül pontosan egy metszi e-t is és f-et is:



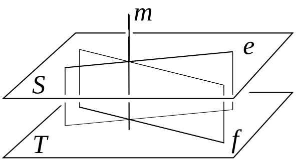
Normáltranszverzális

A kitérő egyenesek fontos illeszkedési tulajdonsága:



Ha e és f kitérő egyenesek, akkor egyértelműen találhatók őket tartalmazó párhuzamos síkok: $S \supset e$, $T \supset f$, $S \parallel T$.

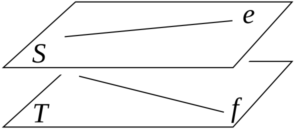
Az S-re és T-re merőleges egyenesek közül pontosan egy metszi e-t is és f-et is:



Ez az m egyenes az e-t tartalmazó, T-re merőleges sík és az f-et tartalmazó, S-re merőleges sík metszésvonala.

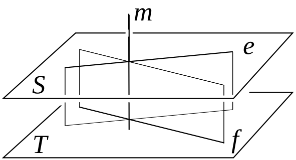
Normáltranszverzális

A kitérő egyenesek fontos illeszkedési tulajdonsága:



Ha e és f kitérő egyenesek, akkor egyértelműen találhatók őket tartalmazó párhuzamos síkok: $S \supset e$, $T \supset f$, $S \parallel T$.

Az S-re és T-re merőleges egyenesek közül pontosan egy metszi e-t is és f-et is:



Ez az m egyenes az e-t tartalmazó, T-re merőleges sík és az f-et tartalmazó, S-re merőleges sík metszésvonala.

Az m egyenes neve: e és f normáltranszverzálisa. Ez az egyetlen olyan egyenes, amely e-t is és f-et is merőlegesen metszi.

Térelemek távolsága

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:

- az egyik egyenes (sík) bármelyik pontjának a távolsága a másik egyenestől (síktól). Ez független a pont választásától.

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:

- az egyik egyenes (sík) bármelyik pontjának a távolsága a másik egyenestől (síktól). Ez független a pont választásától.

Sík és vele párhuzamos egyenes között:

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:

- az egyik egyenes (sík) bármelyik pontjának a távolsága a másik egyenestől (síktól). Ez független a pont választásától.

Sík és vele párhuzamos egyenes között:

- az egyenes bármelyik pontjának a távolsága a síktól. Ez független a pont választásától.

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:

- az egyik egyenes (sík) bármelyik pontjának a távolsága a másik egyenestől (síktól). Ez független a pont választásától.

Sík és vele párhuzamos egyenes között:

- az egyenes bármelyik pontjának a távolsága a síktól. Ez független a pont választásától.

Két kitérő egyenes között:

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:

- az egyik egyenes (sík) bármelyik pontjának a távolsága a másik egyenestől (síktól). Ez független a pont választásától.

Sík és vele párhuzamos egyenes között:

- az egyenes bármelyik pontjának a távolsága a síktól. Ez független a pont választásától.

Két kitérő egyenes között:

- a normáltranszverzális szakasz hossza.

Térelemek távolsága

Pont és egyenes, pont és sík között:

- a pontból az egyenesre (síkra) bocsátott merőleges szakasz hossza.

Két párhuzamos egyenes, két párhuzamos sík között:

- az egyik egyenes (sík) bármelyik pontjának a távolsága a másik egyenestől (síktól). Ez független a pont választásától.

Sík és vele párhuzamos egyenes között:

- az egyenes bármelyik pontjának a távolsága a síktól. Ez független a pont választásától.

Két kitérő egyenes között:

- a normáltranszverzális szakasz hossza.

Mindegyik esetben a távolság a két idom pontjai közt fellépő összes lehetséges távolság minimuma.

A félév anyaga

- A középiskolás előismeretek áttekintése
  - Alapfogalmak (térelemek és viszonyaik)
  - Transzformációk
  - Fontosabb geometriai alakzatok
- Vektorgeometria
  - Koordináták és vektorok
  - Vektorok szorzása
  - Vektorok alkalmazásai
- Sokszögek és poliéderek
  - Konvexitás
  - Sokszögek, konvex sokszögek, konvex poliéderek
  - Szabályos poliéderek

Eltolás és párhuzamosság

Eltolás és párhuzamosság

Bármely eltolás

- bármely egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz,
- bármely síkot vele párhuzamos síkba visz,
- bármely félegyenest vele egyirányú félegyenesbe visz.

Eltolás és párhuzamosság

Bármely eltolás

- bármely egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz,
- bármely síkot vele párhuzamos síkba visz,
- bármely félegyenest vele egyirányú félegyenesbe visz.

Ha A és B tetszőleges pontok és valamely eltolásnál az A pont képe az A' pont, a B pont képe a B'pont, akkor $d(A, A') = d(B, B')$, továbbá az AA' és BB' félegyenesek egyirányúak.

Eltolás és párhuzamosság

Bármely eltolás

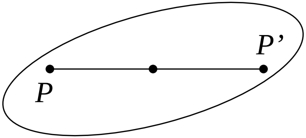
- bármely egyenest vele párhuzamos egyenesbe visz,
- bármely síkot vele párhuzamos síkba visz,
- bármely félegyenest vele egyirányú félegyenesbe visz.

Ha A és B tetszőleges pontok és valamely eltolásnál az A pont képe az A' pont, a B pont képe a B'pont, akkor $d(A, A') = d(B, B')$, továbbá az AA' és BB' félegyenesek egyirányúak.

A tér bármely P és P' pontjához egyértelműen létezik olyan eltolás, amely P-t P'-be viszi.

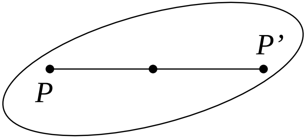
Szimmetriák: tükrözés

Szimmetriák: tükrözés

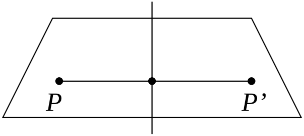


Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben): alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.

Szimmetriák: tükrözés

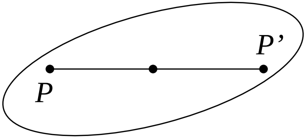


Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben): alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.

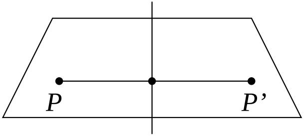


Tengelyesen szimmetrikus alakzat (síkban): alkalmas tengelyes tükrözés önmagába viszi.

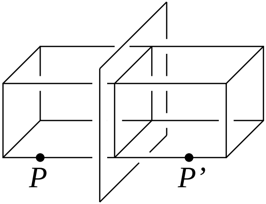
Szimmetriák: tükrözés



Középpontosan szimmetrikus alakzat (akár síkban, akár térben): alkalmas középpontos tükrözés önmagába viszi.



Tengelyesen szimmetrikus alakzat (síkban): alkalmas tengelyes tükrözés önmagába viszi.



Síkra szimmetrikus alakzat (térben): alkalmas síkra vonatkozó tükrözés önmagába viszi.

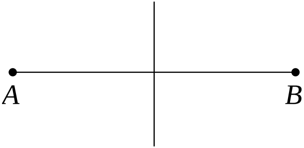
Megjegyzés: a síkra vonatkozó tükrözés nem mozgás.

Szimmetriák: tükrözés

Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P,A) = d(P,B)$ fennáll:

Szimmetriák: tükrözés

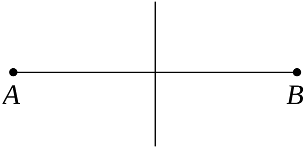
Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P, A) = d(P, B)$ fennáll:



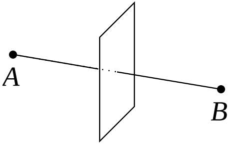
síkban: egyenes
(szakaszfelező merőleges),

Szimmetriák: tükrözés

Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P, A) = d(P, B)$ fennáll:



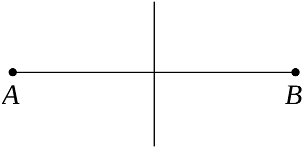
síkban: egyenes
(szakaszfelező merőleges),



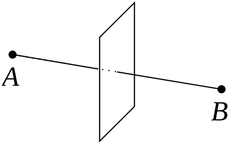
térben: sík
(szakaszfelező merőleges sík).

Szimmetriák: tükrözés

Rögzített $A \neq B$ pontokra azon P pontok mértani helye, amelyekre $d(P, A) = d(P, B)$ fennáll:



síkban: egyenes
(szakaszfelező merőleges),

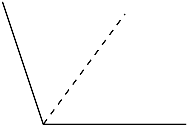


térben: sík
(szakaszfelező merőleges sík).

A szakaszfelező merőleges az egyetlen olyan egyenes, illetve sík, amelyre vonatkozó tükrözés A-t és B-t felcseréli.

Szimmetriák: tükrözés

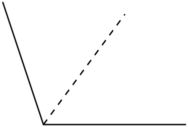
Síkban:



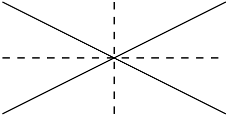
Adott konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félegyenes.

Szimmetriák: tükrözés

Síkban:



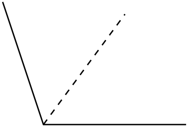
Adott konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félegyenes.



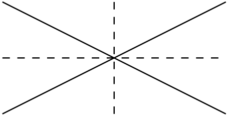
Két metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező egyenes egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két egyenest.

Szimmetriák: tükrözés

Síkban:



Adott konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félegyenes.



Két metsző egyenestől egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező egyenes egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két egyenest.

Térben:

Adott konvex lapszögtartományban a lapoktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a szögfelező félsík.

Két metsző síktól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a két szögfelező sík egyesítése. Az ezekre vonatkozó tükrözések felcserélik a két síkot.

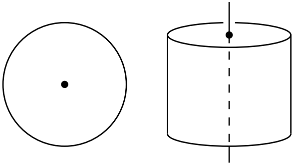
Szimmetriák: forgatás

Szimmetriák: forgatás

Forgásszimmetrikus egy alakzat, ha síkban alkalmas pont, illetve térben alkalmas tengely körüli összes forgatás önmagába viszi.

Szimmetriák: forgatás

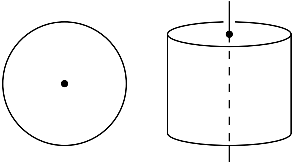
Forgásszimmetrikus egy alakzat, ha síkban alkalmas pont, illetve térben alkalmas tengely körüli összes forgatás önmagába viszi.



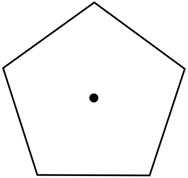
Pl. síkban a kör, térben a forgástestek forgásszimmetrikusak.

Szimmetriák: forgatás

Forgásszimmetrikus egy alakzat, ha síkban alkalmas pont, illetve térben alkalmas tengely körüli összes forgatás önmagába viszi.



Pl. síkban a kör, térben a forgástestek forgásszimmetrikusak.



Egy alakzat n-edrendben forgásszimmetrikus (síkban pont körül, térben egyenes körül), ha alkalmas pont (illetve tengely) körüli $2\pi/n$ szögű forgatás önmagába képezi.

Egybevágóság

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra, léteznek rajtuk kívül más egybevágósági transzformációk is.

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra, léteznek rajtuk kívül más egybevágósági transzformációk is.
(2) Bármely mozgás egybevágóság

Egybevágóság

Az eltolások, tükrözések, forgatások közös tulajdonsága:

- bármely szakaszt vele egyenlő hosszúságú szakaszba képeznek.

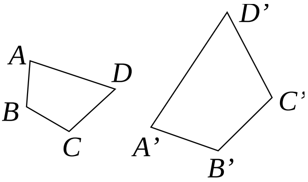
Egyenértékű megfogalmazással: ezek távolságtartó leképezések, más szóval: egybevágóságok.

Az egybevágóságok a távolságon kívül mindenféle egyéb mértékviszonyt is megőriznek: egyúttal szögtartók, területtartók, térfogattartók.

Megjegyzések: (1) Az eltolások, tükrözések és a forgatások csupán a leggyakoribb példák egybevágóságokra, léteznek rajtuk kívül más egybevágósági transzformációk is.
(2) Bármely mozgás egybevágóság, de nem minden egybevágóság mozgás.

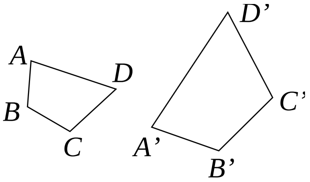
Hasonlóság, nagyítás

Hasonlóság, nagyítás

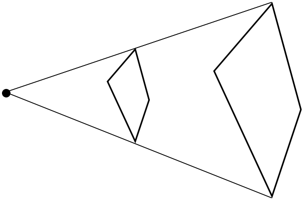


Hasonló alakzatok megfelelő távolságadatai arányosak, megfelelő szögei egyenlők. (Ha az arányossági tényező 1, akkor egybevágóságról van szó.)

Hasonlóság, nagyítás



Hasonló alakzatok megfelelő távolságadatai arányosak, megfelelő szögei egyenlők. (Ha az arányossági tényező 1, akkor egybevágóságról van szó.)



A középpontos nagyítás minden alakzatot hasonló alakzatba visz. Bármely egyenes képe vele párhuzamos egyenes, bármely szög képe egyállású szög. Tetszőleges pozitív valós szám előírható, mint nagyítási arány.