Konvex testek approximációja poliéderekkel

ifj. Böröczky Károly
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
carlos@renyi.hu

2005. március 9.

A kézirat témája, hogy sima határú konvex testek mennyire jól közelíthetőek korlátozott bonyolultságú poliéderekkel a d dimenziós euklidészi térben, $\mathbb{E}^d$–ben (tipikusan a csúcsok száma vagy a hiperlapok száma korlátozott). Ebben a témakörben az ún. „véletlen poliédereknek” óriási irodalma van. Miután a dolgozat az ún. „legjobban approximáló” poliédereket vizsgálja, a történeti áttekintés is csak rájuk koncentrál, és véletlen poliéderek csak annyiban lesznek megemlítve, amennyiben a legjobban közelítőkről adnak információt.

Poliéder approximációval kapcsolatban a kiinduló ötletekről Fejes Tóth László [20] a legjobb referencia, míg az elmélet fejlődését P.M. Gruber [27], [30], [36] és [37] cikkeiből lehet nyomon követni. Geometriai egyenlőtlenségek stabilitásáról H. Groemer [24] ad átfogó képet.

1. Kezdetek

Talán kevéssé ismert, hogy még a poliéderapproximáció elmélete is Fejes Tóth László munkásságából ered. Két dimenzióban könnyen látható, hogy az n–szögek közül bármely értelemben a szabályosak közelítik legjobban az egységkört. Tekintsük most azt a problémát, hogy három dimenzióban mely, az egységgömb köré írt n–lapú poliédernek a legkisebb a térfogata. Az ún. Steiner szimmetrizáció mutatja, hogy $n = 4$–re a szabályos tetraéder a megoldás, és E. Steinitz (lásd [52] és [53]) látta be, hogy $n = 6$–ra a kocka a legkisebb térfogatú. Bár a szabályos dodekaéder optimalitására $n = 12$ esetén M. Goldberg [23] adott egy nem teljes bizonyítást, az igazi áttörést Fejes Tóth László 1948–beli [18] cikke hozta. Ebben került a híres Momentum Tétel bizonyításra a gömbfelületen, mely egyrészről egységes és elegáns megoldást kínál a fenti problémára $n = 4, 6, 12$ esetén, másrészt nagyon jó alsó korlátot ad teszőleges n–re egy körülírt n–lapú poliédernek a térfogatára. Megjegyzem, hogy ez az alsó korlát megadja a legjobban közelítő körülírt n–lapú poliéder és az egységgömb térfogatainak különbségének aszimptotikáját is, amint n tart a végtelenbe.

Valamivel később Fejes Tóth László belátta a Momentum Tétel síkbeli változatát is (lásd [20]). Ezt most csak a később minket érdeklő esetben mondom ki: Tekintsünk n bázis pontot egy C konvex hatszögben. Adott bázis pont Dirichlet–Voronoi cellája a hatszög azon pontjaiból áll, melyek távolsága az adott bázis ponttól nem nagyobb, mint a többi bázis ponttól. Minden Dirichlet–Voronoi cellán integráljuk a bázisponttól vett távolság négyzetét, és tekintsük ezen integrálok összegét (azaz a „második momentumot”). A Momentum Tétel szerint ezen összeg értéke legalább akkora, mintha a Dirichlet–Voronoi cellák egybevágó, a bázis pont középpontú szabályos hatszögek volnának. Ebben az $n \geq 2$–re nem létező „optimális esetben” persze a szabályos hatszögek úniója nem konvex, de a cellák összterülete megegyezik C területével. Megjegyzem, ha $n \geq 10.000$, akkor ifj. Böröczky K. [8] módszerével az is belátható, hogy a Momentum Tétel tetszőleges C konvex síkidomra teljesül. Ha rögzítem C–t, és nagy n–re tetszőleges pont n–seket tekintek C–ben, akkor aszimptotikusan nyilván nem javítható a Momentum Tétel alsó becslése.

Kapcsolódó probléma, hogy adott $n \geq 4$–re, mely a háromdimenziós egységgömb köré írt n–lapú poliédernek a legkisebb a gömbtől vett Hausdorff távolsága, mely ebben az esetben a poliéder csúcsainak a gömbtől vett távolságainak a maximuma. Adott $n \geq 4$–re ez a probléma ekvivalens a gömbfelületet fedő n egyforma gömbi kör minimális sugarának meghatározásával. Fejes Tóth László [18]–beli Momentum Tétele a Hausdorff távolság problémáját is megoldja $n = 4, 6, 12$–re, mégpedig ugyanúgy az n–lapú szabályos poliéder az extremális poliéder. Hasonlóan mint az előbb, minden n–re adódik egy jó alsó korlát a Hausdorff távolságra, és ez a korlát aszimptotikusan optimális.

Körülbelül a fentiekkel egyidőben derült ki, hogy megfelelő értelemben a poliéderekkel legrosszabbul approximálható konvex test a gömb (konvex test alatt kompakt, konvex, nem–üres belsejű halmazt értek). Miután egy lineáris leképezés ugyan azzal a szorzóval változtatja bármely test térfogatát, adódik, hogy a térfogat approximáció affin invariáns, azaz például adott n–re bármely két ellipszoid térfogatapproximációja beírt n csúcsú poliéderekkel ekvivalens. Sas E. [49] bizonyította, hogy egy π területű konvex síkidomba mindig írható n–szög, melynek területe legalább akkora, mint az egységkörbe írható szabályos n–szögé, és ha a síkidom nem ellipszis, akkor szigorú egyenlőtlenség is elérhető. Az eredményt A.M. Macbeath [43] általánosította magasabb dimenziókra (sajnos az analóg állítás nem teljesül körülírt n–szögekre).

2. Aszimptotika görbülő határú testek esetén

Adott n-re adott konvext test n csúcsú vagy n hiperlapú poliéderekkel való approximációjáról valószínűleg nemigen lehet sokkal többet mondani az előző fejezetben leírtaknál. Fejes Tóth László [20] vetette fel a természetes problémát: Legyen adott egy sima határú K konvex test. Minden n–re tekintsük a minimális térfogatú körülírt P_n poliédert, és a feladat P_n és K térfogatkülönsége aszimptotikájának meghatározása, amint n megy a végtelenbe. Persze a feladat megfogalmazható beírt n csúcsú poliéderekkel is. Továbbá térfogatkülönbség helyett más metrikák is használhatóak a konvex testeken. Hogy a kapcsolódó eredményeket ismertetni tudjam, definiálom két $\mathbb{E}^d$–beli konvex test K és C távolságának szóbajövő fogalmait. A definíciók felhasználják egy M konvex test h_M támaszfüggvényét, mely tetszőleges u egységvektorhoz az u külső normálvektorú támaszhipersíknak az origótól vett előjeles távolságát rendeli. Megjegyzem, hogy M átlagszélessége $h_M(u) + h_M(-u)$ átlaga $u \in S^{d-1}$–re, ahol S^{d-1} az egységgömb határa, továbbá a síkban az átlagszélesség arányos a kerülettel.

Szimmetrikus differencia metrika: K és C szimmetrikus differenciájának térfogata.

Hausdorff metrika: $\|h_K - h_C\|_\infty$, azaz $|h_K - h_C|$ maximuma S^{d-1}–n. Geometriailag vesszük K pontjainak C–től vett távolságainak a maximumát, majd C pontjainak K–tól vett távolságainak a maximumát, és a Hausdorff távolság a két maximum közül a nem kisebb.

L_1 metrika: $\|h_K - h_C\|_1$, azaz $|h_K - h_C|$ integrálja S^{d-1}–n. Ha $K \subset C$, akkor arányos az átlagszélességek különbségével.

Banach–Mazur távolság: Teszőleges olyan T affin transzformációra, melyre $TK \subset C$, meghatározzuk a legkisebb λ–t, hogy $\lambda \cdot TK$ egy eltoltja tartalmazza C–t, és a Banach–Mazur távolság az ilyen λ–k minimuma. Persze, ha K és C az origóra szimmetrikus, akkor elég lineáris transzformációkat tekinteni, és nincs szükség eltolásra.

Az első három távolság valóban metrika a konvex testek terén. A Banach–Mazur távolság logaritmusa metrika azon a téren, melyet affin ekvivalens konvex testek azonosítása révén kapunk.

Az első három távolság esetén négyféle feladatot is tárgyal az irodalom aszerint, hogy a közelítő poliéder beírt n csúccsal, körülírt n hiperlappal, vagy pedig nincs az elhelyezkedés megkötve, és a poliédernek vagy legfeljebb n csúcsa, vagy legfeljebb n hiperlapja van.

Eddig nyitva hagytam, mit is értek „sima határon”. Ha K határán minden pontnak van környezete, mely egy C^k függvény (k–szor folytonosan differenciálható) gráfja, akkor K határát C^k–nak hívjuk. Mindig feltesszük, hogy $k \geq 2$, tehát a függvénynek beszélhetünk második derivált mátrixáról, mely pozitív szemidefinit. Ha K határa C^k, és a kapcsolódó függvények második derivált mátrixa mindig pozitív definit, akkor K határa C^k_+. Mivel K határa egy C^2 hiperfelület, minden határpontban beszélhetünk a Gauß–Kronecker–féle szorzatgörbületről, mely nem–negatív. Ismert, hogy K határa pontosan akkor C^2_+, ha a Gauß–Kronecker görbület minden pontban pozitív.

Adott sima határú K–ra Fejes Tóth László [20] nem csak felvetette a poliéderekkel való approximáció problematikáját, de több $\mathbb{E}^2$–beli és $\mathbb{E}^3$–beli probléma esetén le is írta a sejtett aszimptotikus formulát. Ha K síkbeli és határa C^2_+, akkor Fejes Tóth László [20] sejtései nyomán D.E. McClure és Richard A. Vitale [45] megoldotta a lehetséges approximáxiós problémák nagy többségét. Ha K határa C^3_+, Rolf Schneider [50] bizonyított aszimptotikus formulát a Hausdorff metrika esetén tetszőleges dimenzióban (igazából egyben általánosította is [20] $\mathbb{E}^3$–beli sejtését, és mind a négy probléma változatot tekintette). Térfogat approximáció esetén $\mathbb{E}^3$–ban Peter M. Gruber [25] (beírt poliéder n csúccsal) és [26] (körülírt poliéder n hiperlappal) igazolta Fejes Tóth László [20] $\mathbb{E}^3$–beli sejtéseit. Ezek után Peter M. Grubernek sikerült az $\mathbb{E}^d$–beli, $d \geq 3$, C^2_+ határú konvex testekre kiterjesztenie az eddigi eredményeket. Pontosabban [28] tekintette a Hausdorff metrika és a Banach–Mazur távolság eseteit (utóbbinál az origóra szimmetrikus testekre), és [29] oldotta meg a térfogat approximáció esetét beírt, illetve körülírt poliéderekre.

Az L_1–metrikát (avagy átlagszélesség különbséget) hosszú ideig nem tudták kezelni, míg Stefan Glasauer észre nem vette, hogy ha az ún. polárisra (vagy duálisra) térünk át, akkor L_1–metrikás problémából olyan probléma lesz, ahol valami súlyfüggvény szerinti térfogatkülönbségét kell becsülni. Ezt a trükköt felhasználva sikerült Stefan Glasauer és Peter M. Gruber [21] cikkjében az átlagszélesség különbségre aszimptotikus formulát adni mind beírt, mind körülírt poliéderekre, ha K határa C^2_+. Végül Monika Ludwig [41] oldotta meg a szimmetrikus differencia metrika és az L_1–metrikáról szóló feladatokat akkor, ha a poliéder elhelyezkedésére nem teszünk feltételt, és persze K határa C^2_+.

Az összes fentebb tárgyalt aszimptotikus formula a következő alakú: Ha $\mathbb{E}^d$–ben P_n a K–t legjobban közelítő n csúcsú (n hiperlapú) poliéder valamely fenti problémában, akkor P_n és K távolsága aszimptotikusan három tag, mégpedig $n^{\frac{-2}{d-1}}$, egy a K határától és a problémától függő integrálkifejezés, és egy a dimenziótól és a problémától függő konstans szorzata. Megjegyzem, hogy a Banach–Mazur távolság konstansai a Hausdorff metrika konstansaiból származtathatóak, míg az L_1–metrika konstansai a szimmetrikus differencia metrika konstansaiból származtathatóak. A Hausdorff metrika esetén a konstans az $\mathbb{E}^{d-1}$ egyforma gömbökkel való legkisebb fedési sűrűségéből adódik (lásd Rolf Schneider [50]), vagyis ismert $d = 3$–ra. Hasonlóan ismert a $d = 3$ esetben a konstans pontos értéke, ha szimmetrikus differencia metrikát tekintjük. Ez az érték a beírt vagy körülírt poliéderek esetén a Momentum Tétel változataiból adódik (lásd Peter M. Gruber [25] és [26]), ha pedig a poliéder elhelyezkedésére nem teszünk feltételt, akkor ifj. Böröczky K. és Monika Ludwig [14] határozta meg a konstansot. Ha rögzítjük az approximációs problémát (például térfogat approximáció körülírt poliéderekre), akkor a legtöbb problémában ismert a dimenziótól függő approximációs konstans viselkedése, amint a dimenzió tart a végtelenbe. Ezt viselkedést a Hausdorff metrika esetén Rolf Schneider [50] adja meg, a térfogat approximáció esetén pedig P.L. Zador [55] (körülírt poliéderek) és P. Mankiewicz és C. Schütt [44] (beírt poliéderek) írta le.

Megjegyzem, ha K térfogata adott, akkor térfogatapproximáció esetén a K határától függő kifejezés mindig ellipszoidok esetén maximális, tehát aszimptotikus értelemben körülírt poliéderekkel közelítve is a gömb legrosszabbul approximálható.

Most röviden vázolom a 80–as és 90–es években kikristályosodott módszert, hogy hogyan lehet sok esetben egy C^2_+ határú konvex K test poliéderrel történő approximálása esetén aszimptotikus formulát bizonyítani. Itt a minimális térfogatú, K–köré írt, n hiperlapú P_n poliédert tárgyalom. Elég azt megmutatni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$–ra a térfogat különbségét becsülni tudjuk egy $1 + O(\varepsilon)$ szorzó erejéig, ha n nagy. Először is K határát ε–tól függő (n–től független) „foltokra" darabolom szét, hogy majd a foltok poliéderes közelítését $\mathbb{E}^{d-1}$–beli „Momentum Tételszerű" feladatra tudjam redukálni. A foltok konstruálásához K köré írok egy ε–tól függő poliédert, melyek hiperlapjai $C_1, \dots, C_m$, és minden j–re K határának C_j–nél fekvő darabja egy olyan C^2 függvény gráfja C_j fölött, mely második deriváltja $1 + O(\varepsilon)$ szorzó erejéig közel van valamely q_j pozitív definit quadratikus alakhoz (itt használom, hogy K határa C^2_+). Feltehetem azt is, hogy K határán a külső normálegységvektor csak „ε–nyit változik" C_j mentén. Ezek után a K határán lévő foltok a C_j–k vetületei.

Ahhoz, hogy egy kiválasztott C_j mentén becsüljem a térfogatkülönbséget, feltehetem, hogy $C_j \subset \mathbb{E}^{d-1}$. Legyen F a P_n egy hiperlapja, mely C_j–hez „tartozik", és x–ben érinti K–t. Ha $z \in F$, akkor z–nek K határától vett „függőleges" távolsága $1 + O(\varepsilon)$ szorzó erejéig $\frac{1}{2}\,q_j(z' - x')$ a Taylor formula szerint, ahol z', x' a z, x pontok $\mathbb{E}^{d-1}$–beli vetületét jelöli. Egy $\mathbb{E}^{d-1}$–beli lineáris transzformáció után azt is feltehetem, hogy q_j a vektorhossz négyzete (hiszen j rögzített). Ekkor a P_n poliéder C_j menti hiperlapjainak vetületei $\mathbb{E}^{d-1}$–be nagyon közel vannak az érintési pontok vetületei által meghatározott Dirichlet–Voronoi cellákhoz. Ha $d = 3$, akkor Fejes Tóth László 1. Fejezetben ismertetett Momentum Tételéből adódik a poliéder approximációra vonatkozó aszimptotikus formula. Szerencsére elég a Momentum Tétel aszimptotikus verziója (adott C–re a pontok száma tart a végtelenbe), amit $d > 3$–ra sem olyan nehéz igazolni $\mathbb{E}^{d-1}$–ben. Ez a verzió magában foglal egy a dimenziótól függő ismeretlen konstansot, mely éppen a kapcsolódó poliéder approximáció aszimptotikus formulájának konstansa.

3. Az extremális poliéderről

Ebben a fejezetben végig felteszem, hogy egy C^2_+ határú K konvex testet approximálok.

Az 2. Fejezetben tárgyalt approximációs problémákban Stefan Glasauer és Rolf Schneider [22] látta be, hogy az extremális poliéderek csúcsai (vagy hiperlapjai) egyenletesen oszlanak el K határa mentén a megfelelő súlyfüggvényre. Itt a súlyfüggvény a kapcsolódó aszimptotikus formulából származik. Térfogatapproximáció esetén Peter M. Gruber [36] adott az extremális poliéderek lapjai körülírt és beírt gömbjei sugaraira olyan n–től és K–tól függő felső és alsó korlátot, hogy a korlátok hányadosa egy, csak a K–tól függő, konstans alatt marad.

A síkban Monika Ludwig [39] mutatta meg a területapproximáció, és [40] a Hausdorff metrika szerinti approximáció esetén, hogy az extremális polygon annyira szabályos (K–ra vonatkozóan), amennyire csak lehet.

A három dimenziós térben is még sok minden ismert az extremális poliéderekről a 2. Fejezetben tárgyalt approximációs problémákban. Peter M. Gruber látta be ([31]–ben a Haussdorff és a Banach–Mazur távolságra, és [34]–ben a térfogat és az átlagszélesség különbségre), hogy az extremális poliéder tipikus lapja a megfelelő értelemben közel szabályos hatszög a körülírt esetben, és közel szabályos háromszög a beírt esetben. Itt nem részletezem, mit is jelent „megfelelő értelemben”. Alapgondolata, hogy K valamely x határpontja szomszédságában lévő lapok egy olyan skaláris szorzat szerint közel szabályosak, mely függ az approximációs problémától és x–től. Természetesen, ha K gömb, akkor a „szabályos” a tér Euklidészi metrikája szerint értendő. Megjegyzem, hogy Peter M. Gruber [34] az 1. Fejezetbeli Momentum Tétel stabilitását is megmutatta, azaz ha nagy n–re az ott leírt integrálkifejezés közel van a Momentum Tétel alsó korlátjához, akkor a tipikus Dirichlet–Voronoi cella közel van egy szabályos hatszöghöz. Erre az eredményre Fejes Tóth Gábor [17] adott elegáns bizonyítást.

Peter M. Gruber a három dimenziós térre vonatkozó eredményei után természetesen vetődik fel a következő kérdés n lapú körülírt extremális poliéderekről: Adott $\varepsilon > 0$–ra vajon lehet–e minden lap ε–közel a megfelelő szabályos hatszöghöz nagy n–re (bármit is jelentsen az „ε–közel”)? Ha K gömb, akkor ifj. Böröczky K. [7] mutatta meg egy olyan $\varepsilon > 0$ létezését, hogy azon lapok száma, melyek nincsenek ε–közel valamely szabályos hatszöghöz, n–nel tart a végtelenbe. Sajnos itt még akár $\log n$–nes alsó korlát sem ismert a kivételes lapok számára.

Fejes Tóth László [18] bizonyította (lásd 1. Fejezet), hogy $n = 4, 6, 12$–re a háromdimenziós egységömb tartalmazó minimális térfogatú n–lapú poliéder szabályos. A szférikus Momentum Tétel és a vegyestérfogatokra vonatkozó Lindelöf tétel stabilitásának vizsgálatának segítségével ifj. Böröczky K. és Fejes Tóth Gábor [12] leírta Fejes Tóth László [18] eredményének stabilitását, mégpedig az optimális rendű hibataggal.

4. Az aszimptotikus formulák hibatagjáról

Ha egy C^3_+ határú K konvex testet approximálunk n csúcsú beírt, vagy n hiperlapú körülírt poliéderrel, akkor még az aszimptotikus formula hibatagját is lehet becsülni.

A síkban nagyon szép ilyen irányú eredmények születtek. Monika Ludwig [39] mutatta meg a területapproximáció, és [40] a Hausdorff metrika szerinti approximáció esetén, hogy ha K határa C^5_+, akkor az extremális n–szög távolságára olyan sorfejtés adható, mely főtagja persze $\frac{1}{n^2}$ rendű, második tagja $\frac{1}{n^4}$ rendű, és hibája $\frac{1}{n^5}$ rendű. Ha K határa C^∞_+, és a minimális területű körülírt n–szöget tekintem, akkor a periódikus duális biliárdok elméletét felhasználva S. Tabachnikov [54] adott végtelen sorfejtést a területkülönbségre

$\frac{1}{n^2}$ függvényeként.

Ha K határa C^3_+, akkor magasabb dimenziókban ifj. Böröczky K. adott először becslést az aszimptotikus formula hibatagjára, mégpedig [6] a térfogat és az L_1 approximáció esetén, és [7] a Hausdorff metrika és a Banach–Mazur távolság esetén. Míg [7] becslése a jelenleg ismert módszerekkel valószínűleg nem javítható, Peter M. Gruber [36] jelentősen javítani tudott [6] hibatag becslésén a térfogat approximáció esetén.

A síkbeli sorfejtések létezése felveti, hogy ha a konvex test határa elég sima, akkor a háromdimenziós térben is megadható sorfejtés az extremális poliéder távolságára, persze most $\frac{1}{n}$ függvényeként. Ezt a sejtést Peter M. Gruber több helyen is megfogalmazta. A kvázikonform leképezések elméletének felhasználásával ifj. Böröczky K. [7] bizonyította, hogy a sejtett sorfejtés nem létezik körülírt n–lapú poliéderekre még a gömb approximálása esetén sem a Hausdorff metrikára vonatkozóan. Pontosabban [7] azt látta be, hogy a hibatag legalább $\frac{f(n)}{n^2}$ alakú, ahol $f(n)$ tart a végtelenbe n–nel. Ezen cikk módszerének és a szférikus Momentum Tételre adott stabilitási becslés kombinálásával ifj. Böröczky K. és Fejes Tóth Gábor [12] bizonyította a hasonló eredményt, ha a gömb köré írt minimális térfogatú n–lapú poliédert tekintjük. Ez utóbbi eredmény azért is meglepő, mert ifj. Böröczky K. és Matthias Reitzner [15] szerint, ha K határa C^5_+ teszőleges d dimenzióban, akkor a K köré írt véletlen n–lapú poliéder és K térfogatkülönbségének várható értékére olyan sorfejtés adódik, mely főtagja persze $n^{\frac{-2}{d-1}}$ rendű, második tagja $n^{\frac{-4}{d-1}}$ rendű, és hibája $n^{\frac{-5}{d-1}}$ rendű.

5. Általánosabb poliéder approximációs problémák

Természetes kérdés, hogy a poliéderrel való approximációnál fellépő aszimptotikus formulákhoz szükséges feltétel-e, hogy K határa C^2_+. Igazából már Fejes Tóth László problémafelvetésében sem játszott szerepet a pozitív görbület. Peter M. Gruber és P. Kenderov [38] megmutatták, hogy K határára nem elég azt feltenni, hogy C^1. Peter M. Gruber sejtését igazolva ifj. Böröczky K. [4] bizonyította, hogy minden, a C^2_+ határú konvex testekre belátott formula igaz C^2 határúakra. Továbbá [4]–nek azt is sikerült belátni, hogy ha K határa C^2, akkor az extremális poliéderek csúcsai (vagy hiperlapjai) egyenletesen oszlanak el K határa mentén a megfelelő súlyfüggvényre. Ifj.

Böröczky K. egy még nem publikált eredménye, hogy $\mathbb{E}^3$–ban a C^2 határú konvex testek approximálása esetén is teljesül, hogy az extremális poliéder tipikus lapja a megfelelő értelemben közel van egy szabályos hatszöghöz (körülírt poliéder), illetve egy szabályos háromszöghöz (beírt poliéder). Ha a síkban tekintjük a beírt maximális vagy körülírt minimális területű n-szöget, akkor a fenti eredményeket (igazából valamivel többet) Monika Ludwig [42] is belátta [4]–tól függetlenül.

Az a kérdés is természetesen vetődik fel, hogy mi történik, ha P_n–nek nem a csúcsai vagy a hiperlapjai számára adunk korlátot, hanem a k–lapok száma legfeljebb n, ahol $0 < k < d-1$. Ebben a problémakörben még nem jelent meg aszimptotikus eredmény. C^2_+ határú konvex testek és bármely metrika esetén ifj. Böröczky K. [5] ad P_n és K távolságára olyan felső és alsó becslést, hogy a becslések hányadosa egy, csak a dimenziótól függő, konstans. Ha maximális térfogatú beírt poliédereket tekintünk legfeljebb n darab k–lappal, akkor további eredmények is ismertek. Ha a K konvex test C^2_+ határú, akkor a konstrukció megvalósítható rácspoliéderekkel, vagyis az egészrácsot a megfelelő arányban lekicsinyítjük, majd vesszük a K–ba eső rácspontok konvex burkát (lásd Bárány Imre és ifj. Böröczky K. még nem publikált [3] kéziratát). Ezen kívül Bárány Imre [2] konstrukciója véletlen poliéderekkel és ifj. Böröczky K. [5] becslése együtt kiterjeszti az eredményt a C^2 határú konvex testekre is.

Ha nem a csúcsok vagy a hiperlapok számára adunk korlátot, akkor az első megoldandó probléma, hogy $\mathbb{E}^3$–ban az élek számát korlátozzuk. Erre a problémára sikerült Tick Péterrel és Salvatore Gomez-zel közösen a leírás alatt álló [13] dolgozatban megoldást találni. Érdekesség, hogy míg a csúcsok vagy lapok számának korlátozása esetén az extremális poliéder tipikus lapjai mindig közel szabályos háromszögek vagy közel szabályos hatszögek (a megfelelő értelemben), a beírt, legfeljebb n élű, maximális térfogatú poliéder tipikus lapjai közel négyzetek (a megfelelő értelemben).

Ha a poliéder és a sima konvex test távolságát a térfogatok különbségeként vagy az átlagszélességek különbségeként mérjük, akkor minden alapvető kérdés meg lett már oldva. Ha a felületek különbségét tekintjük, véletlen poliéderek esetén ismertek az analóg eredmények (lásd Matthias Reitzner [46] a beírt, és ifj. Böröczky K. és Matthias Reitzner [15] a körülírt esetben), viszont a legjobban approximáló poliéderekre nem létezett aszimptotikus formula egészen mostanáig. Az első ilyen eredmény ifj. Böröczky K. [10] dolgozata. Egy C^2 határú K konvex test köré írt minimális felületű n–lapú P_n poliédert tekintünk, és mindaz bizonyításra kerül, ami térfogatapproximáció esetén tudott magas dimenzióban. Azaz [10] megadja az aszimptotikus formulát K és P_n felületének különbségére, belátja, hogy P_n lapjai egyenletesen oszlanak el K határa mentén a megfelelő súlyfüggvénnyel, és hogy P_n csúcsai mind „közel vannak" K–hoz. Továbbá, ha K határa C^3_+, akkor az aszimptotikus formula hibatagjára is adódik elfogadható becslés.

Hivatkozások

[1] F. Aurenhammer: Power diagrams: properties, algorithms and applications. SIAM J. Comput., 16 (1987), 78–96.

[2] I. Bárány: Approximation of random polytopes has low complexity. Supplemento Rend. Circ. Mat. Palermo, 70 (2002), 53–56.

[3] I. Bárány, K. Böröczky, Jr.: Lattice points in large smooth convex bodies, preprint

[4] K. Böröczky Jr.: Approximation of smooth convex bodies. Adv. Math., 153 (2000), 325–341.

[5] K. Böröczky, Jr.: Polytopal approximation bounding the number of k–faces. J. Approximation Th., 102 (2000), 263–285.

[6] K. Böröczky, Jr.: The error of polytopal approximation with respect to the symmetric difference metric and the L_p metric. Isr. J. Math., 117 (2000), 1–28.

[7] K. Böröczky, Jr.: About the error term for best approximation with respect to the Hausdorff related metrics. Disc. Comp. Geom., 25 (2001), 293–309.

[8] K. Böröczky, Jr.: Finite packing and covering by congruent convex domains, Disc. Comp. Geom., 30 (2003), 185–193.

[9] K. Böröczky, Jr.: Finite packing and covering. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[10] K. Böröczky, Jr.: Approximation of smooth convex bodies by circumscribed polytopes with respect to the surface area. www.renyi.hu/~carlos/surfapprox.ps.gz

[11] K. Böröczky, Jr.: Faces of 3-polytopes best approximating a smooth convex body. megírás alatt.

[12] K. Böröczky, Jr., G. Fejes Tóth: Stability of some inequalities for three–polyhedra. Rend. Circ. Mat. Palermo, 70 (2002), 93–108.

[13] K. Böröczky, Jr., P. Tick, S. Gomez: Volume approximation of smooth convex bodies by polytopes whose number of edges is limited. megírás alatt.

[14] K. Böröczky, Jr., M. Ludwig: Approximation of convex bodies and a momentum lemma for power diagrams. Monats. Math., 127 (1999), 101–110.

[15] K. Böröczky, Jr., M. Reitzner: Approximation of Smooth Convex Bodies by Random Circumscribed Polytopes. Annals of Applied Prob., 14 (2004), 239–273.

[16] E.M. Bronšteĭn, L.D. Ivanov: The approximation of convex sets by polyhedra. (Russian) Siberian Math. J., 16 (1975), 852–853.

[17] G. Fejes Tóth: A stability criterion to the moment theorem. Studia Sci. Math. Hungar., 38 (2001), 209–224.

[18] L. Fejes Tóth. The isepiphan problem for n-hedra. Amer. J. Math. 70:174–180, 1948.

[19] L. Fejes Tóth: Regular Figures. Pergamon Press, 1964.

[20] L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1972.

[21] S. Glasauer, P.M. Gruber: Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies III. Forum Math., 9 (1997), 383–404.

[22] S. Glasauer, R. Schneider: Asymptotic approximation of smooth convex bodies by polytopes. Forum Math., 8 (1996), 363–377.

[23] M. Goldberg: The isoperimetric problem for polyhedra. Tohoku Math. J., 40 (1935), 226–236.

[24] H. Groemer: Stability of geometric inequalities. Handbook of convex geometry, North-Holland, Amsterdam, 1993, 125–150.

[25] P.M. Gruber: Volume approximation of convex bodies by inscribed polytopes. Math. Ann., 281 (1988), 229–245.

[26] P. M. Gruber: Volume approximation of convex bodies by circumscribed polytopes. In: Applied geometry and discrete mathematics, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 4, Amer. Math. Soc., 1991, 309–317.

[27] P.M. Gruber: Aspects of approximation of convex bodies. In: Handbook of convex geometry A, North-Holland, 1993, 319–345.

[28] P.M. Gruber: Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies I. Forum Math., 5 (1993), 281–297.

[29] P.M. Gruber: Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies II. Forum Math., 5 (1993), 521–538.

[30] P.M. Gruber: Comparisons of best and random approximation of convex bodies by polytopes. Rend. Circ. Mat. Palermo, 50 (1997), 189–216.

[31] P.M. Gruber: Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies IV. Forum Math., 10 (1998), 665-686.

[32] P.M. Gruber: Optimal Arrangement of Finite Point Sets in Riemannian 2-Manifolds. Proc. Steklov Math. Inst., 225 (1999), 148–155.

[33] P.M. Gruber: In many cases optimal configurations are almost regular hexagonal. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 65, part II, (2000), 121–145.

[34] P.M. Gruber: Optimal configurations of finite sets in Riemannian 2-manifolds. Geom. Dedicata, 84 (2001), 271–320.

[35] P.M. Gruber: Optimale Quantisierung. Math. Semesterber., 49 (2002), 227–251.

[36] P.M. Gruber: Error of asymptotic formulae for volume approximation of convex bodies in $\mathbb{E}^d$. Monatsh. Math., 135 (2002), 279–304.

[37] P.M. Gruber: Optimum quantization and its applications. Adv. Math., 186 (2004), 456–497.

[38] P.M. Gruber, P. Kenderov: Approximation of convex bodies by polytopes. Rend. Circ. Mat. Palermo, 31 (1982), 195–225.

[39] M. Ludwig: Asymptotic approximation of convex curves. Arch. Math., 63 (1994), 377–384.

[40] M. Ludwig: Asymptotic approximation of convex curves: the Hausdorff metric case. Arch. Math., 70 (1998), 331–336.

[41] M. Ludwig: Asymptotic approximation of smooth convex bodies by general polytopes. Mathematika, 46 (1999), 103–125.

[42] M. Ludwig: A characterization of affine length and asymptotic approximation of convex discs. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 69 (1999), 75–88.

[43] A.M. Macbeath: An extremal property of the hypersphere. Proc. Cambridge Philos. Soc., 47 (1951), 245–247.

[44] P. Mankiewicz, C. Schütt: On the Delone triangulation numbers. J. Approx. Theory, 111 (2001), 139–142.

[45] D.E. McClure, R.A. Vitale: Polygonal approximation of plane convex bodies. J. Math. Anal. Appl., 51 (1975), 326–358.

[46] M. Reitzner: Random points on the boundary of smooth convex bodies. Trans. Amer. Math. Soc., 354 (2002), 2243–2278.

[47] C.A. Rogers: Packing and Covering. Cambridge Univ. Press, 1964.

[48] C.A. Rogers, G.C. Shephard: The difference body of a convex body. Arch. Math., 8 (1957), 220–233.

[49] E. Sas: On a certain extremum-property of the ellipse. Compositio Math., 6 (1939), 468–470.

[50] R. Schneider: Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder. Math. Ann., 256 (1981), 289–301.

[51] R. Schneider: Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge University Press, 1993.

[52] E. Steinitz: Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern, I. J. reine angew. Math., 158 (1927), 129–153.

[53] E. Steinitz: Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern, II. J. reine angew. Math., 159 (1928), 133–143.

[54] S. Tabachnikov: On the dual billiard problem. Adv. Math., 115 (1995), 221–249.

[55] P.L. Zador: Asymptotic quantization error of continuous signals and their quantization dimension. Trans. Inform. Theory., 28 (1982), 139–149.

[56] G. Zhang: Restricted chord projection and affine inequalities. Geom. Dedicata, 39 (1991), 213–222.