Metrikus és topologikus terek

1. Metrikus terek

A valós számegyenesen vagy általánosabban a több dimenziós Euklideszi térben két pontot összekötő egyenes szakasz hosszát használjuk a távolság mérésére. Ezt általánosítja a metrikus terek elmélete. Legyen X egy tetszőleges halmaz. Bármely két $p, q \in X$ pontra szeretnénk a közöttük lévő "távolságot" definiálni, valami olyasmit, ami úgy viselkedik, mint a "közöttük lévő legrövidebb út hossza", még akkor is, ha esetleg nincs túl sok értelme az X halmaz pontjai közötti utak hosszáról beszélni. Ez motiválja a következő definíciót.

Definíció 1.1 (Metrikus tér és metrika). Az X halmaz egy rögzített

$$d\colon X \times X \to [0, \infty)$$

függvénnyel egy *metrikus tér* (rövidebb jelöléssel az (X, d) egy metrikus tér), ha

(1) bármely $x, y \in X$ pontokra $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor ha $x = y$,
(2) bármely $x, y \in X$ pontokra $d(x, y) = d(y, x)$ és
(3) bármely $x, y, z \in X$ pontokra $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ekkor d egy *metrika* az X-en.

A definícióban (1) és (2) olyan alapvető dolgokat fejez ki, mint hogy egy pont önmagától vett távolsága 0 és más esetben nem lehet 0 a távolság, meg hogy mindegy, hogy két adott pont esetén az elsőtől a másodikig, vagy a másodiktól az elsőig mérjük a távolságot. A (3)-as azt írja le, hogy ez a d függvény tényleg olyan, mint a "legrövidebb" távolság, azaz két pont távolsága egy harmadik pont közbeiktatásával csak nőhet.

Egy gyakran használt következménye a (2)-esnek és (3)-asnak, hogy

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$$

bármely $x, y, z \in X$-re.

Példa 1.2. Nagyon sok struktúra valójában metrikus tér, például

(1) ha valamilyen rögzített $n \in \mathbb{N}$-re $X = \mathbb{R}^n$ és minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2},$$

akkor az (X, d) egy metrikus tér, amit Euklideszi térnek nevezünk,

(2) ha valamilyen rögzített $n \in \mathbb{N}$-re $X = \mathbb{R}^n$ és minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$d(x,y) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\},$$

akkor (X, d) szintén egy metrikus tér,

(3) ha valamilyen rögzített $n \in \mathbb{N}$-re és $p \ge 1$-re $X = \mathbb{R}^n$ és bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

(4) valamilyen rögzített $n \in \mathbb{N}$-re és $0 < p \le 1$-re az $X = \mathbb{R}^n$ és minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p,$$

(5) valamilyen rögzített $p \ge 1$-re ha X az $[a, b]$-n folytonos függvények halmaza és minden $f, g \in X$-re

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$

(6) ha X az $[a, b]$-n folytonos függvények halmaza és minden $f, g \in X$-re

$$d(f,g) = \max_{a \le x \le b} \{|f(x) - g(x)|\},$$

(7) ha X az olyan (a_n) sorozatok halmaza, amikre az $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor minden $(a_n), (b_n) \in X$ esetén a

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i - b_i|$$

definícióval (X, d) szintén egy metrikus tér,

(8) ha X a korlátos sorozatok halmaza és $(a_n), (b_n) \in X$ esetén

$$d((a_n), (b_n)) = \sup_{n \ge 0} \{|a_n - b_n|\},$$

(9) ha X tetszőleges halmaz és $x, y \in X$ esetén $d(x, y) = 0$ ha $x = y$ és $d(x, y) = 1$ ha $x \ne y$,

(10) ha (Y, d) egy metrikus tér és $X \subset Y$ egy tetszőleges részhalmaz, akkor az X halmaz a $d|_{X \times X}$ megszorítással is egy metrikus tér,

(11) ha (X_1, d_1) és (X_2, d_2) metrikus terek, akkor az $X_1 \times X_2$ halmaz

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$$

esetén a

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \alpha d_1(x_1, y_1) + \beta d_2(x_2, y_2)$$

függvénnyel, ahol $\alpha, \beta > 0$ rögzített számok, szintén metrikus tér,

(12) ha (X,d) egy metrikus tér, akkor az X halmaz a

$$d(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

metrikával, ahol $x,y \in X$,

(13) ha (X,d) egy metrikus tér, akkor az X halmaz a

$$d(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

metrikával, ahol $x,y \in X$,

(14) ha (X,d) egy metrikus tér és $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ egy olyan monoton növekedő függvény, hogy $f(x)=0$ akkor és csak akkor ha $x=0$ és minden $s,t \in [0,\infty)$-re $f(s+t) \le f(s)+f(t)$, akkor az X halmaz a

$$d(x,y) = f(d(x,y))$$

metrikával, ahol $x,y \in X$, szintén egy metrikus tér.

Ha a metrikus terek legfontosabb tulajdonságait akarjuk megérteni, akkor először halmazok távolságát és környezeteit kezdhetjük el vizsgálni.

Definíció 1.3 (Pont és halmaz távolsága). Legyen (X,d) egy metrikus tér, $A \subset X$ egy részhalmaz és $x \in X$. Az x pont és az A halmaz távolsága az

$$\inf_{y \in A}\{d(x,y)\}$$

szám, amit $\varrho(x,A)$-val jelölünk.

Definíció 1.4 (r sugarú nyílt környezet). Ha (X,d) egy metrikus tér, $a \in X$ egy rögzített pont és $r > 0$, akkor a

$$D_r(a) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

halmazt az *a pont r sugarú nyílt környezetének* (vagy csak az *a pont r sugarú környezetének*) nevezzük.

A definícióból rögtön következik, hogy $D_r(a) \neq \emptyset$. Fontos lesz azt megvizsgálni, hogy egy halmaz és a benne lévő nyílt környezetek hogyan viszonyulnak egymáshoz.

Definíció 1.5 (Halmaz belseje és lezárása). Ha (X,d) egy metrikus tér és $A \subset X$, akkor az

$$\bigcup\{D_r(x) : x \in A, r > 0, D_r(x) \subset A\}$$

halmazt az A halmaz *belsejének* nevezzük és $\operatorname{int} A$-val jelöljük. Az

$$\{x \in X : \varrho(x,A) = 0\}$$

halmazt pedig az A halmaz *lezárásának* nevezzük és $\operatorname{cl} A$-val jelöljük.

Néhány alapvető tulajdonság a következő.

Állítás 1.6. *Ha (X,d) egy metrikus tér, akkor*

(1) $\operatorname{int}\emptyset = \operatorname{cl}\emptyset = \emptyset$ *és* $\operatorname{int} X = \operatorname{cl} X = X$,
(2) *ha* $A \subset X$ *tetszőleges halmaz, akkor*

$$\operatorname{int} A \subset A \subset \operatorname{cl} A,$$

(3) *ha* $A, B \subset X$ *tetszőleges halmazok, akkor*

$$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$$

és

$$\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B,$$

(4) *ha* $A \subset X$ *tetszőleges halmaz, akkor*

$$\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$$

és

$$\operatorname{cl}\operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A.$$

Bizonyítás. Az (1)-es, (2)-es és a (3)-asból az $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ a definíció alapján nyilvánvaló. A $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$ egyenlőséghez ha $\varrho(x, A) = 0$ vagy $\varrho(x, B) = 0$, akkor nyilván $\varrho(x, A \cup B) = 0$. Ha pedig $x \in X$ olyan, hogy van olyan $(x_n) \in A \cup B$ sorozat, hogy $d(x, x_n) \to 0$, akkor (x_n)-nek van olyan $(x_{n_k}) \in A$ vagy $(x_{n_k}) \in B$ részsorozata, hogy $d(x, x_{n_k}) \to 0$. Tehát ha $\varrho(x, A \cup B) = 0$, akkor $\varrho(x, A) = 0$ vagy $\varrho(x, B) = 0$. A (4)-esben a (2)-es miatt $\operatorname{int}\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} A$ és $\operatorname{cl}\operatorname{cl} A \supset \operatorname{cl} A$ nyilvánvaló. Ha $y \in \operatorname{int} A$, akkor $y \in D_r(x)$ valamilyen $D_r(x) \subset \operatorname{int} A$-ra, de akkor $D_r(x) \subset \operatorname{int}\operatorname{int} A$ is teljesül. Tehát $\operatorname{int}\operatorname{int} A \supset \operatorname{int} A$. Ha pedig $x \notin \operatorname{cl} A$, akkor a definícióból könnyen láthatóan valamilyen $r > 0$-ra $D_r(x) \cap A = \emptyset$, de akkor $D_{r/2}(x) \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$, mert $\operatorname{cl} A$-beli pontok nem lehetnek $r/2$-nél nagyobb távolságra A-tól. Tehát $x \notin \operatorname{cl}\operatorname{cl} A$ és így $\operatorname{cl}\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} A$ is teljesül. $\square$

Egy olyan tetszőleges $A \subset X$ halmazt, amire $a \in A$ és $D_r(a) \subset A$ is teljesül valamilyen $r > 0$-ra, szintén szokás az a pont egy környezetének hívni. Később ebben a jegyzetben nem fogunk ilyen típusú környezetekkel foglalkozni, de most még nevezzük ezeket "általános környezeteknek" megkülönböztetve őket az 1.4 definícióbeli környezetektől.

Azokon a nyilvánvaló állításokon kívül, hogy egy általános környezet tartalmaz valamilyen $r > 0$ sugarú nyílt környezetet és hogy minden $r > 0$ sugarú nyílt környezet egyben általános környezet is, három fontos tulajdonság a következő.

Állítás 1.7. *Legyen* (X, d) *egy metrikus tér és minden* $p \in X$*-re jelölje* $\mathcal{N}_p$ *a* p *pont összes általános környezetéből álló halmazrendszert. Ekkor*

(1) *ha* $A, B \in \mathcal{N}_p$, *akkor* $A \cap B \in \mathcal{N}_p$,
(2) *ha* $A \in \mathcal{N}_p$ *és valamilyen* $B \subset X$ *halmazra* $A \subset B$ *teljesül, akkor* $B \in \mathcal{N}_p$,
(3) *legyen* $r > 0$ *tetszőleges rögzített szám, ekkor* $D_r(p) \in \mathcal{N}_q$ *minden* $q \in D_r(p)$*-re.*

Bizonyítás. Ha A tartalmazza p-nek egy r_A sugarú környezetét és B tartalmazza p-nek egy r_B sugarú környezetét, akkor $A \cap B$ tartalmazza p-nek egy $\min\{r_A, r_B\}$ sugarú környezetét is, amiből (1) nyilván következik. A (2)-es is nyilvánvaló, hiszen ha $D_r(p) \subset A \subset B$, akkor $D_r(p) \subset B$. Végül pedig ha $q \in D_r(p)$, akkor $D_{r'}(q) \subset D_r(p)$ teljesül $r' = r - d(p,q)$-val. Emiatt $D_r(p) \in \mathcal{N}_q$, amiből (3) következik. □

Próbáljuk most egy metrikus térben lévő pontok általános környezetei helyett az 1.4 definícióbeli $r > 0$ sugarú nyílt környezetek unióiból felépíthető halmazokat megvizsgálni. Legyen (X, d) egy metrikus tér és álljon $\mathcal{U}$ az összes olyan részhalmazából X-nek, amik valamilyen pontok valamilyen sugarú nyílt környezeteinek uniói. Tehát ha $Y \subset X$ tetszőleges részhalmaz és $R\colon Y \to (0, \infty)$ tetszőleges függvény, akkor az

$$U = \bigcup_{p \in Y} D_{R(p)}(p)$$

halmaz egy eleme $\mathcal{U}$-nak.

Állítás 1.8. *Az $\mathcal{U}$ a következő alapvető tulajdonságokkal rendelkezik.*

(1) *Ha $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, akkor $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{U}$. Tehát $\mathcal{U}$ uniózárt.*
(2) *Ha $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, akkor $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}$. Tehát $\mathcal{U}$ zárt a véges metszetre.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{V}$ minden eleme pontok valamilyen sugarú nyílt környezeteinek uniója, ezért $\mathcal{V}$ elemeinek uniója is pontok valamilyen sugarú nyílt környezeteinek uniója. Ezért (1) nyilvánvaló. A (2)-eshez pedig elég csak azt megmutatni, hogy két $D_{r_1}(p_1)$ és $D_{r_2}(p_2)$ nyílt környezet metszete is $\mathcal{U}$-beli. De ha $x \in D_{r_1}(p_1) \cap D_{r_2}(p_2)$, akkor $d(x, p_1) < r_1$ és $d(x, p_2) < r_2$, és ezért $D_{r_1 - d(x,p_1)}(x) \subset D_{r_1}(p_1)$ és $D_{r_2 - d(x,p_2)}(x) \subset D_{r_2}(p_2)$. De akkor

$$D_{\min\{r_1 - d(x,p_1), r_2 - d(x,p_2)\}} \subset D_{r_1}(p_1) \cap D_{r_2}(p_2),$$

ami azt mutatja, hogy $D_{r_1}(p_1) \cap D_{r_2}(p_2)$ is valamilyen sugarú nyílt környezetek uniója, tehát $\mathcal{U}$-beli. Ezzel a (2)-est is bizonyítottuk. □

Meglepő módon sok állítást metrikus terekről már csak ezeknek a tulajdonságoknak a felhasználásával, elfelejtkezve magáról a metrikáról is bizonyítani lehet. Ez azt mutatja, hogy a metrikus terek elmélete mögött valamilyen absztraktabb és mélyebb struktúra húzódik meg. Ugyanakkor sokszor könnyebb is megérteni egy komolyabb problémát ha absztraktabb szinten közelítünk hozzá, ez vezet el minket a topologikus terek definíciójához.

2. Topologikus terek

2.1. A topologikus tér definíciója.

Definíció 2.1 (Topologikus tér). Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz. Ha

$$f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

egy olyan leképezés, hogy minden $A \subset X$ részhalmazra

(1) $A \subset f(A)$,
(2) $f(f(A)) = f(A)$,
(3) bármely $B \subset X$ esetén $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ és
(4) $f(\emptyset) = \emptyset$,

akkor az (X, f) párt *topologikus térnek* nevezzük.

Az 1.6 állítás alapján minden (X, d) metrikus tér az

$$f(A) = \operatorname{cl} A$$

leképezéssel meghatároz egy topologikus teret. Ezt hívjuk az (X, d) metrikus tér által *indukált topologikus térnek*. Tetszőleges (X, f) topologikus tér esetén az f leképezést is cl -el szokás jelölni, még akkor is, ha a topologikus teret nem metrikus tér indukálja.

Állítás 2.2. *Ha (X, cl) egy topologikus tér, akkor minden $A \subset B \subset X$-re $\operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$.*

Bizonyítás. $B = A \cup (B - A)$, ezért $\operatorname{cl} B = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl}(B - A)$, tehát $\operatorname{cl} B \supset \operatorname{cl} A$. $\square$

Definíció 2.3 (Nyílt halmaz, zárt halmaz). Legyen (X, cl) egy topologikus tér és $A \subset X$ egy tetszőleges halmaz. Ha $A \cap \operatorname{cl}(X - A) = \emptyset$, akkor A-t *nyílt* halmaznak nevezzük. Ha $\operatorname{cl}(A) = A$, akkor A-t *zárt* halmaznak nevezzük.

Ha A zárt, akkor könnyen láthatóan $X - A$ nyílt és fordítva.

Állítás 2.4. *Ha (X, cl) egy topologikus tér és $\mathcal{U}$ jelöli a nyílt halmazok rendszerét, akkor*

(1) *$\emptyset \in \mathcal{U}$,*
(2) *$X \in \mathcal{U}$,*
(3) *ha $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, akkor $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{U}$, tehát $\mathcal{U}$ uniózárt és*
(4) *ha $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, akkor $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}$, tehát $\mathcal{U}$ zárt a véges metszetre.*

Ha $\mathcal{F}$ jelöli X összes zárt halmazainak rendszerét, akkor minden $A \subset X$-re

$$\operatorname{cl} A = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : A \subset F\}$$

az A-t tartalmazó legszűkebb zárt halmaz.

Bizonyítás. Az (1)-es és (2)-es triviális. A (3)-ashoz

$$(\bigcup\mathcal{V})\cap\mathrm{cl}\,(X-\bigcup\mathcal{V})=\bigcup_{V\in\mathcal{V}}(V\cap\mathrm{cl}\,(X-\bigcup\mathcal{V}))\subset\bigcup_{V\in\mathcal{V}}(V\cap\mathrm{cl}\,(X-V))=\emptyset.$$

A (4)-eshez pedig

$$(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)\cap\mathrm{cl}\,(X-\bigcap_{j=1}^{n}U_j)=(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)\cap\mathrm{cl}\,(\bigcup_{j=1}^{n}X-U_j))=(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)\cap\bigcup_{j=1}^{n}\mathrm{cl}\,(X-U_j)=$$

$$\bigcup_{j=1}^{n}(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)\cap\mathrm{cl}\,(X-U_j)\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_j\cap\mathrm{cl}\,(X-U_j)=\emptyset.$$

Ha $\mathcal{F}$ jelöli X összes zárt halmazainak rendszerét, akkor nyilván $\mathrm{cl}\,A\subset\bigcap\{F\in\mathcal{F}: A\subset F\}$, mert ha $A\subset F$, akkor $\mathrm{cl}\,A\subset\mathrm{cl}\,F=F$. És mivel $\mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\,A=\mathrm{cl}\,A$, ezért $\mathrm{cl}\,A$ zárt, tehát $A\subset\mathrm{cl}\,A$ miatt $\mathrm{cl}\,A\in\{F\in\mathcal{F}:A\subset F\}$ is teljesül. □

Azt sem nehéz belátni, hogy a zárt halmazok rendszere metszetzárt és zárt a véges unióra.

Egy $(X,\mathrm{cl}\,)$ topologikus teret az előző állítás alapján gyakran az X nyílt vagy zárt halmazainak rendszerével adunk meg. Ha $\mathcal{U}$ jelöli X összes nyílt részhalmazának rendszerét, akkor a továbbiakban $(X,\mathrm{cl}\,)$ helyett az

$$(X,\mathcal{U})$$

jelölést is használni fogjuk.

Állítás 2.5. *Ha $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(X)$ olyan halmazrendszer, amire az előző állításbeli* (1)-(4) *teljesül, akkor az*

$$f(A)=\bigcap\{X-U:U\in\mathcal{U},A\subset X-U\}$$

leképezéssel (X,f) egy topologikus tér, amiben a nyílt halmazok rendszere megegyezik $\mathcal{U}$-val.

Bizonyítás. Mivel a feltétel szerint A része minden $X-U$-nak, ezért $A\subset f(A)$ teljesül. Ebből nyilván $f(A)\subset f(f(A))$ is következik. A rövidség kedvéért jelölje $\mathcal{F}$ az $\mathcal{U}$-beli halmazok komplementereit. Ekkor könnyen láthatóan $\emptyset,X\in\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}$ zárt a metszetképzésre és a véges unióra. Az $f(f(A))\subset f(A)$ bizonyításához elég azt megmutatni, hogy $f(A)\in\mathcal{F}$, mert akkor az $f(f(A))=\bigcap\{F\in\mathcal{F}:f(A)\subset F\}$ metszetben $f(A)$ is szerepel. De $\mathcal{F}$ metszetzártsága miatt az $f(A)=\bigcap\{F\in\mathcal{F}: A\subset F\}$ is $\mathcal{F}$-beli. Az $f(A\cup B)\supset f(A)\cup f(B)$ tartalmazáshoz csak azt kell meggondolni, hogy ha $f(A\cup B)=\bigcap\{F\in\mathcal{F}:A\cup B\subset F\}$, akkor $A,B\subset A\cup B$ miatt $f(A),f(B)\subset f(A\cup B)$. A fordított $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$-hez pedig elég azt látni, hogy

$$f(A) \cup f(B) = \bigcap\{F' \in \mathcal{F} : A \subset F'\} \cup \bigcap\{F'' \in \mathcal{F} : B \subset F''\} = \bigcap\{F' \cup F'' : F', F'' \in \mathcal{F}, A \subset F', B \subset F''\}$$

és ez utóbbi metszetben mindig $A \cup B \subset F' \cup F'' \in \mathcal{F}$, így az $f(A \cup B) = \bigcap\{F \in \mathcal{F} : A \cup B \subset F\}$ metszetben is szerepel minden olyan $F' \cup F''$, amire $F', F'' \in \mathcal{F}, A \subset F', B \subset F''$. Végül $f(\emptyset) = \emptyset$, mert $\emptyset \in \mathcal{F}$ miatt $f(\emptyset) = \bigcap\{F \in \mathcal{F} : \emptyset \subset F\} = \emptyset$. Még azt kell megmutatni, hogy az (X, f) topologikus térben a nyílt halmazok rendszere megegyezik $\mathcal{U}$-val, de ehhez elég azt, hogy a zárt halmazok, tehát azok az $A \subset X$ halmazok, amikre $f(A) = A$, megegyeznek $\mathcal{F}$-el. Ha $A \in \mathcal{F}$, akkor $A = \bigcap\{F \in \mathcal{F} : A \subset F\} = f(A)$, tehát A zárt. Ha pedig A zárt, akkor $A = f(A) = \bigcap\{F \in \mathcal{F} : A \subset F\}$, de mivel $\mathcal{F}$ metszetzárt, ezért $A \in \mathcal{F}$. $\square$

Ezek szerint egy X alaphalmazon a 2.1 definícióbeli (1)-(4) feltételeket kielégítő $f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ leképezések és a 2.4 állításbeli (1)-(4) feltételeket kielégítő $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszerek kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Megjegyzés 2.6. Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz és minden $p \in X$-hez legyen $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{P}(X)$ egy olyan rögzített nemüres halmazrendszer, hogy

(1) a p pont benne van az összes $\mathcal{N}_p$-beli halmazban,
(2) ha $A, B \in \mathcal{N}_p$, akkor $A \cap B \in \mathcal{N}_p$,
(3) ha $A \in \mathcal{N}_p$ és valamilyen $B \subset X$ halmazra $A \subset B$ teljesül, akkor $B \in \mathcal{N}_p$ és
(4) minden $A \in \mathcal{N}_p$ tartalmaz olyan $B \in \mathcal{N}_p$ halmazt, amire $B \in \mathcal{N}_q$ minden $q \in B$-re.

Ha $\nu\colon X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ jelöli azt a függvényt, amire $\nu(p) = \mathcal{N}_p$, akkor az (X, ν) párt szintén szokás topologikus térnek nevezni. Ilyenkor az $\mathcal{N}_p$-beli halmazokat a p pont *általános környezeteinek* nevezzük. Az 1.7 állítás szerint minden (X, d) metrikus tér meghatároz egy topologikus teret ebben az értelemben is, egyszerűen minden $p \in X$-re legyen $\nu(p)$ a p pont általános környezeteinek családja. Ekkor azt mondjuk, hogy egy $p \in X$ pont egy B halmaz *belső pontja*, ha $B \in \nu(p)$. Meg hogy egy $B \subset X$ halmaz *nyílt*, ha $B \in \nu(q)$ minden $q \in B$-re, tehát ha B-nek minden $q \in B$ belső pontja. A későbbiekben általános környezetekkel nem foglalkozunk.

Definíció 2.7 (Nyílt környezet). Ha (X, cl) egy topologikus tér és $p \in X$, akkor bármely U nyílt halmazt amire $p \in U$, a p egy *nyílt környezetének* (vagy röviden csak *környezetének*) nevezünk. Ha $A \subset X$, akkor bármely V nyílt halmazt amire $A \subset V$, az A egy *(nyílt) környezetének* nevezünk.

Egy metrikus térben a $D_r(p)$ alakú nyílt környezeteket r sugarú nyílt környezeteknek vagy röviden csak r sugarú környezeteknek fogjuk nevezni.

Állítás 2.8. *Legyen (X, d) egy metrikus tér.*

(1) *Az indukált topologikus térben az $r > 0$ sugarú környezetek nyílt halmazok.*

(2) *Az indukált topologikus térben egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha előáll valamilyen sugarú környezetek uniójaként.*

Bizonyítás. Az (1)-eshez legyen $r > 0$, $x \in X$ és tekintsük a $D_r(x)$ környezetet. Azt kell megmutatni, hogy $D_r(x) \cap \mathrm{cl}\,(X - D_r(x)) = \emptyset$, ehhez pedig elég azt, hogy $\mathrm{cl}\,(X - D_r(x)) \subset X - D_r(x)$. Könnyen láthatóan ha $p \in \mathrm{cl}\,(X - D_r(x))$, akkor

$$0 = \inf_{y \in X - D_r(x)} \{d(p, y)\} = \lim_n d(p, y_n)$$

valamilyen $(y_n) \in X - D_r(x)$ sorozatra, de akkor $d(x, y_n) \geq r$ és így

$$d(p, x) \geq d(x, y_n) - d(p, y_n) \geq r - \varepsilon$$

tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$-ra ha n elég nagy. Tehát $d(p, x) \geq r$ és ezért $p \in X - D_r(x)$. A (2)-eshez elég azt meggondolni, hogy valamilyen sugarú környezetek uniója az (1)-es alapján biztosan nyílt halmaz, és hogy tetszőleges olyan $A \subset X$-re, amire $A \cap \mathrm{cl}\,(X - A) = \emptyset$, az A előáll valamilyen sugarú környezetek uniójaként. Ez utóbbi azért igaz, mert ha $x \in A$, akkor

$$x \notin \mathrm{cl}\,(X - A) = \{y \in X : \varrho(y, X - A) = 0\},$$

tehát

$$0 < \varrho(x, X - A) = \inf_{y \in X - A} \{d(x, y)\},$$

ezért ha $d(x, y)$ elég kicsi, akkor $y \in A$. □

Állítás 2.9. *Legyen $(X, \mathrm{cl}\,)$ egy topologikus tér, $A \subset X$ és $p \in X$. Ekkor $p \in \mathrm{cl}\,A$ akkor és csak akkor, ha p minden U környezetére $U \cap A \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $p \in \mathrm{cl}\,A$. Belátjuk, hogy ha U egy környezete p-nek, akkor $A - U$ valódi része A-nak. Ha $A - U = A$ teljesülne, akkor $A \cap (X - U) = A$ miatt $\mathrm{cl}\,(A \cap (X - U)) = \mathrm{cl}\,A$ is igaz lenne, de $p \notin \mathrm{cl}\,(X - U)$ és $\mathrm{cl}\,(A \cap (X - U)) \subset \mathrm{cl}\,(X - U)$ miatt $p \notin \mathrm{cl}\,(A \cap (X - U))$, ami viszont $p \in \mathrm{cl}\,A$ miatt azt jelenti, hogy $A - U \neq A$. Ha pedig p minden U környezetére $U \cap A \neq \emptyset$, de $p \in X - \mathrm{cl}\,A$, akkor válasszuk U-nak $X - \mathrm{cl}\,A$-t. Ez valóban környezete p-nek, mert $\mathrm{cl}\,(X - U) = \mathrm{cl}\,(X - (X - \mathrm{cl}\,A)) = \mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\,A = \mathrm{cl}\,A$ miatt $U \cap \mathrm{cl}\,(X - U) = \emptyset$. Ekkor $U \cap A = (X - \mathrm{cl}\,A) \cap A = \emptyset$, mert $A \subset \mathrm{cl}\,A$, de ez ellentmond a feltevésnek, miszerint $U \cap A \neq \emptyset$. □

Általában amikor két matematikai struktúrát azonosnak tekintünk, létezik köztük egy bijekció, ami a két struktúrát is megfelelteti egymásnak.

Definíció 2.10 (Homeomorfizmus). Két (X, cl_X) és (Y, cl_Y) topologikus teret akkor tekintünk azonosnak, ha létezik olyan $\varphi \colon X \to Y$ bijekció, hogy

$$\mathrm{cl}_Y\, \varphi(A) = \varphi(\mathrm{cl}_X\, A)$$

minden $A \subset X$-re és

$$\mathrm{cl}_X\, \varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(\mathrm{cl}_Y\, B)$$

minden $B \subset Y$-ra. Ekkor az (X, cl_X) és (Y, cl_Y) topologikus terek *homeomorfak* és φ egy *homeomorfizmus* közöttük.

Állítás 2.11. *Két $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ topologikus tér akkor és csak akkor homeomorf, ha létezik olyan*

$$\varphi\colon X \to Y$$

bijekció, ami minden $U \in \mathcal{U}$ nyílt halmazt valamilyen $\varphi(U) \in \mathcal{V}$ nyílt halmazba visz és aminek a φ^{-1} inverze szintén minden $V \in \mathcal{V}$ nyílt halmazt valamilyen $\varphi^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ nyílt halmazba visz.

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{F}_X$ és $\mathcal{F}_Y$ az X és Y-beli zárt halmazok rendszerét. Tegyük fel, hogy létezik a feltételeket kielégítő φ bijekció. A 2.4 állítás alapján ha $A \subset X$, akkor

$$\varphi(\mathrm{cl}_X A) = \bigcap\{\varphi(F) \in \mathcal{F}_Y : A \subset F\} = \bigcap\{\varphi(F) \in \mathcal{F}_Y : \varphi(A) \subset \varphi(F)\} = \mathrm{cl}_Y(\varphi(A))$$

és hasonlóan φ^{-1}-re és $B \subset Y$-ra. Ha pedig $\varphi\colon X \to Y$ olyan bijekció, hogy

$$\mathrm{cl}_Y \varphi(A) = \varphi(\mathrm{cl}_X A)$$

minden $A \subset X$-re, akkor minden $A \in \mathcal{F}_X$-re

$$\varphi(A) = \varphi(\mathrm{cl}_X A) = \mathrm{cl}_Y \varphi(A) \in \mathcal{F}_Y$$

és hasonlóan φ^{-1}-re és $B \in \mathcal{F}_Y$-ra. $\square$

2.2. Topologikus tér bázisa.

Az r sugarú nyílt környezetek metrikus terekben annyira fontosak voltak, hogy a topologikus terek absztrakt elméletében egy ennek megfelelő külön fogalmat is bevezetünk.

Definíció 2.12 (Bázis). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér. Egy $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ halmazrendszer *bázisa* $(X,\mathcal{U})$-nak, ha az $\mathcal{U}$ halmazrendszer minden $\neq \emptyset$ eleme előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként.

Például ebből rögtön következik, hogy egy (X, d) metrikus tér által indukált topológiának egy bázisát adja az összes lehetséges r sugarú környezeteknek a családja. Egy bázis azért hasznos, mert általában csak egyszerűbb szerkezetű halmazokból áll, mint az összes lehetséges nyílt halmaz, ugyanakkor egyértelműen meghatározza a topológiát.

Legyen X egy halmaz és $(X,\mathcal{U})$ és $(X,\mathcal{V})$ két topologikus tér. Legyen $\mathcal{B}$ az $(X,\mathcal{U})$ egy bázisa, $\mathcal{C}$ az $(X,\mathcal{V})$ egy bázisa.

Állítás 2.13. *Az $(X,\mathcal{U})$ és $(X,\mathcal{V})$ topologikus terek homeomorfak akkor és csak akkor, ha minden $U \in \mathcal{B}$ előáll $\mathcal{C}$-beli halmazok uniójaként és minden $V \in \mathcal{C}$ előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként.*

Bizonyítás. Az állításban szereplő feltétel ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ és $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$. De ekkor $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ és $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, tehát $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. $\square$

Legyen X, Y két halmaz és $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ két topologikus tér. Legyen $\mathcal{B}$ az $(X,\mathcal{U})$ egy bázisa, $\mathcal{C}$ az $(Y,\mathcal{V})$ egy bázisa.

Állítás 2.14. *Az $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ topologikus terek homeomorfak akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\varphi\colon X \to Y$ bijekció, hogy minden $U \in \mathcal{B}$-re $\varphi(U)$ előáll $\mathcal{C}$-beli halmazok uniójaként és minden $V \in \mathcal{C}$-re $\varphi^{-1}(V)$ előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként.*

Bizonyítás. Hasonlóan az előző állítás bizonyításához, a feltétel azzal ekvivalens, hogy $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ és $\varphi^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. Tehát $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. $\square$

Használni fogjuk a következő állítást.

Állítás 2.15. *Legyen (X,d) egy metrikus tér és $(X,\mathcal{V})$ egy topologikus tér. A d által indukált topologikus tér homeomorf $(X,\mathcal{V})$-vel akkor és csak akkor, ha minden $x \in X$-re minden $D_r(x)$ alakú r sugarú környezet tartalmazza valamilyen $V \in \mathcal{V}$ környezetét x-nek és minden $x \in X$-nek minden $V \in \mathcal{V}$ környezete tartalmaz valamilyen $D_r(x)$ környezetet.*

Bizonyítás. Minden $y \in D_r(x)$-re létezik valamilyen $D_\varepsilon(y) \subset D_r(x)$, de akkor $y \in V \subset D_\varepsilon(y)$ is valamilyen $V \in \mathcal{V}$-re. Fordítva is minden $V \in \mathcal{V}$ előáll a metrika által indukált topológia báziselemeinek uniójaként. Ezért 2.13-ból következik az állítás. $\square$

Láttuk, hogy egy $\mathcal{B}$ bázis egy olyan halmazrendszer kell legyen, hogy a $\mathcal{B}$-beli halmazok uniói, tehát azok a halmazok, amiket nyíltaknak tekintünk, kielégítsék a 2.4 állításban szereplő (1)-(4) feltételt. Felmerül a kérdés, hogy egyáltalán milyen halmazrendszer lehet valamilyen topologikus tér bázisa.

Állítás 2.16. *Legyen X egy halmaz és $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. A $\mathcal{B}$ halmazrendszer valamilyen $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér bázisa akkor és csak akkor, ha bármely véges sok $\mathcal{B}$-beli halmaz metszete előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{B}$ egy bázis, akkor a $\mathcal{B}$-beli halmazok nyíltak, tehát véges metszeteik is nyíltak, amik akkor tényleg előállnak $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként, mert minden nyílt halmaz előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként. (Az üres halmazt az "üres unióval" kaphatjuk meg.) Ha meg bármely véges sok $\mathcal{B}$-beli halmaz metszete előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként, akkor a $\mathcal{B}$-beli halmazok tetszőleges unióiból álló halmazrendszer egy $\mathcal{B}$ által generált topológia lesz. Azaz

(1) a $\emptyset$ üres halmaz az "üres unióval" kapható,
(2) az X az "üres metszettel", mint véges metszettel kapható és akkor ezek szerint $\mathcal{B}$-beliek uniója,

(3) $\mathcal{B}$-beli halmazok unióinak uniói nyilván $\mathcal{B}$-beliek uniói, és
(4) $\mathcal{B}$-beli halmazok unióinak véges metszetei előállnak véges metszeteknek (így $\mathcal{B}$-beliek unióinak) az uniójaként.

□

Állítás 2.17. *Legyen X egy halmaz és $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. A $\mathcal{B}$ halmazrendszer valamilyen $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér bázisa akkor és csak akkor, ha az X előáll $\mathcal{B}$-beli halmazok uniójaként és minden $U, V \in \mathcal{B}$-re és minden $b \in U \cap V$-re létezik olyan $W \in \mathcal{B}$, hogy $b \in W$ és $W \subset U \cap V$.*

Bizonyítás. Az állításban szereplő feltétel azt jelenti, hogy bármely két (és akkor véges sok) $\mathcal{B}$-beli halmaz metszete $\mathcal{B}$-beli halmazok uniója. (Illetve az üres metszet, azaz X is.) Így ez az előző állításból következik. □

Példa 2.18. Nézzünk meg néhány példát topologikus terekre.

(1) Legyen $X = \mathbb{R}^n$ és legyen $(\mathbb{R}^n,\mathcal{U})$ a $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ metrika által indukált topologikus tér. Ekkor az $(\mathbb{R}^n,\mathcal{U})$ bázisának nem csak ezzel a d metrikával kapott $r > 0$ sugarú nyílt környezetek családja választható, hanem például az $1/k$ sugarú nyílt környezetek családja, ahol k a természetes számokon fut végig. Sőt, az is feltehető, hogy az $1/k$ sugarú nyílt környezetek középpontjai csak racionális koordinátájú pontok $\mathbb{R}^n$-ben és ráadásul k mindig nagyobb, mint valamilyen előre rögzített $K \in \mathbb{N}$. Ebből rögtön következik, hogy ennek az $(\mathbb{R}^n,\mathcal{U})$ topologikus térnek van olyan bázisa, ami csak megszámlálhatóan végtelen sok halmazt tartalmaz.
(2) Ugyanezt az $(\mathbb{R}^n,\mathcal{U})$ topologikus teret indukálja az 1.2-es példában a (2)-ben, (3)-ban és (4)-ben definiált metrika is.
(3) Az 1.2 (9)-es példának megfelelően legyen $\mathbb{R}^n$-en d az a metrika, amire $d(x,y) = 0$ ha $x = y$ és $d(x,y) = 1$ ha $x \neq y$. Ekkor az indukált topológiában $\mathbb{R}^n$-nek minden részhalmaza nyílt lesz. Tehát $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$, ezt hívjuk diszkrét topologikus térnek. Ennek a topologikus térnek az X egyelemű részhalmazainak rendszere egy bázisa.
(4) Ha X tetszőleges halmaz, akkor a másik legegyszerűbb topológiát úgy kaphatjuk, hogy $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$, ezt hívjuk antidiszkrét topologikus térnek.
(5) Legyen X egy tetszőleges halmaz és $p \in X$ egy rögzített pont. Egy részhalmaz $U \subset X$ legyen nyílt, azaz legyen $U \in \mathcal{U}$, ha $U = \emptyset$ vagy $p \in U$. Ekkor $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér. Egy érdekes tulajdonsága ennek a térnek az, hogy nincsenek nemüres diszjunkt nyílt halmazok benne, hiszen minden nemüres nyílt halmaz tartalmazza p-t.
(6) Legyen X egy tetszőleges végtelen halmaz és legyen $U \in \mathcal{U}$ ha $U = \emptyset$ vagy U véges sok X-beli pont komplementere. Ebben a topologikus térben sincsenek diszjunkt nemüres nyílt halmazok. De a nyílt halmazok struktúrája már változatosabb, mint az előző példában, mert ebben a térben tetszőleges pontnak van másik tetszőleges pontot nem tartalmazó nyílt környezete.

(7) Ha $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér és $Y \subset X$ egy részhalmaz, akkor az $U \cap Y$ nyíltnak definiált halmazokkal, ahol U végigfut az $\mathcal{U}$ elemein, az Y egy topologikus tér és úgy nevezzük, hogy az $(X,\mathcal{U})$ megszorítása Y-ra. Úgy jelöljük, hogy $(Y,\mathcal{U}|_Y)$. Sőt, ha $\mathcal{B}$ egy bázisa $(X,\mathcal{U})$-nak, akkor a $B \cap Y$ halmazok családja, ahol B végigfut a $\mathcal{B}$ elemein, egy bázisa $(Y,\mathcal{U}|_Y)$-nak.

(8) Legyen például $X = \mathbb{R}^2$ a $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ metrika által indukált topologikus tér. Ha Y az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

felső félsík, akkor X-nek az Y-ra való megszorítása egy topologikus tér, aminek egy bázisa az összes Y-ba eső valamilyen $r > 0$ sugarú nyílt körlap és az összes olyan

$$Y \cap D_r((x,0)) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v \geq 0, (u-x)^2+v^2 < r^2\right\}$$

fél nyílt körlap, ahol $(x,0)$ az x koordináta tengely egy pontja és $r > 0$.

(9) Változtassuk meg kicsit az előző példában lévő Y felső félsík topológiáját. Most legyen egy bázis majdnem ugyanaz, mint előbb, de minden egyes $Y \cap D_r((x,0))$ fél nyílt körlapból hagyjuk el azokat a pontokat, amiknek az y-koordinátája 0, de a körlap $(x,0)$ középpontját tartsuk meg. Ez a 2.17 állítás alapján tényleg bázisa lesz valamilyen topológiának. Később látni fogjuk, hogy az így kapott topologikus tér nem homeomorf az előző példában levővel.

3. Műveletek halmazokkal

Állítás 3.1. *Legyen* $(X,\mathrm{cl}\,)$ *egy topologikus tér és* $Y \subset X$. *A*

$$\mathrm{cl}_Y : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}\,(A) \cap Y$$

leképezéssel (Y,cl_Y) *egy topologikus tér.*

Bizonyítás. $A \subset \mathrm{cl}\,(A) \cap Y$ nyilván igaz, mert $A \subset \mathrm{cl}\,A$ és $A \subset Y$.

$$\mathrm{cl}_Y\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_Y(A)$$

azért teljesül, mert $\mathrm{cl}\,(A) \cap Y \subset \mathrm{cl}\,(\mathrm{cl}\,(A) \cap Y)$ és akkor nyilván $\mathrm{cl}\,(A) \cap Y \subset (\mathrm{cl}\,(\mathrm{cl}\,(A) \cap Y)) \cap Y$ is igaz. Ugyanakkor $Y \cap \mathrm{cl}\,A \subset \mathrm{cl}\,A$ miatt $\mathrm{cl}\,(Y \cap \mathrm{cl}\,A) \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\,A = \mathrm{cl}\,A$ és így $Y \cap \mathrm{cl}\,(Y \cap \mathrm{cl}\,A) \subset Y \cap \mathrm{cl}\,A$ is teljesül. $\mathrm{cl}_Y(A \cup B) = \mathrm{cl}_Y(A) \cup \mathrm{cl}_Y(B)$ pedig azért igaz, mert ha $A, B \subset Y$, akkor

$$\mathrm{cl}_Y(A \cup B) = Y \cap \mathrm{cl}\,(A \cup B) = Y \cap (\mathrm{cl}\,A \cup \mathrm{cl}\,B) = (Y \cap \mathrm{cl}\,A) \cup (Y \cap \mathrm{cl}\,B) = \mathrm{cl}_Y A \cup \mathrm{cl}_Y B.$$

$\mathrm{cl}_Y \emptyset = \emptyset$ nyilvánvaló. □

Definíció 3.2 (Megszorítás és altér). Legyen $(X,\mathrm{cl}\,)$ egy topologikus tér és $Y \subset X$. Az (Y,cl_Y) teret az $(X,\mathrm{cl}\,)$ tér Y-ra való *megszorításának* nevezzük és azt mondjuk, hogy (Y,cl_Y) az $(X,\mathrm{cl}\,)$ egy *altere*.

Állítás 3.3. *Ha* $(X, \mathrm{cl}\,)$ *egy topologikus tér és* $\mathcal{U}$ *a nyílt halmazok rendszere, akkor az* (Y, cl_Y) *altér nyílt halmazai az* $U \cap Y$ *halmazok, ahol* $U \in \mathcal{U}$.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy (Y, cl_Y) zárt halmazai az $F \cap Y$ alakú halmazok, ahol $X - F \in \mathcal{U}$. Ha $A \subset Y$ és A zárt Y-ban tehát $A = \mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}\,(A) \cap Y$, akkor mivel $\mathrm{cl}\,(A)$ zárt, nyilván $A = F \cap Y$ valamilyen F zárt halmazra. Ha pedig $A = F \cap Y$ valamilyen F zárt halmazra, akkor $\mathrm{cl}_Y(A) = (\mathrm{cl}\,A) \cap Y = \bigcap\{F' \cap Y : A \subset F', X - F' \in \mathcal{U}\}$, de ebben a metszetben $F \cap Y = A$ is szerepel, ezért $\mathrm{cl}_Y(A) = A$. □

Tehát ha U nyílt X-ben, akkor $U \cap Y$ nyílt Y-ban. Ha pedig A zárt X-ben, akkor $A \cap Y$ zárt Y-ban. Az (Y, cl_Y) alteret $(Y, \mathcal{U}|_Y)$-al is szokás jelölni.

Állítás 3.4. *Legyen* $(X, \mathcal{U})$ *egy topologikus tér és* $Y \subset X$.

(1) *Ha* Y *nyílt* X*-ben, akkor* $(Y, \mathcal{U}|_Y)$ *minden nyílt halmaza nyílt* X*-ben is.*
(2) *Ha* Y *zárt* X*-ben, akkor* $(Y, \mathcal{U}|_Y)$ *minden zárt halmaza zárt* X*-ben is.*

Bizonyítás. Az (1)-eshez ha $A \subset Y$ nyílt Y-ban, akkor definíció szerint $A = Y \cap U$, ahol U nyílt X-ben. De ha Y is nyílt X-ben, akkor A is nyílt X-ben. A (2)-eshez hasonlóan ha $A \subset Y$ zárt Y-ban, akkor $A = Y \cap F$, ahol F zárt X-ben. Tehát ha Y zárt, akkor A is az X-ben. □

Definíció 3.5 (Halmaz lezárása, külseje, belseje, határa). Legyen $(X, \mathrm{cl}\,)$ egy topologikus tér és jelölje $\mathcal{U}$ a nyílt halmazok rendszerét. Ha $Y \subset X$ egy tetszőleges részhalmaz, akkor $\mathrm{cl}\,Y$ az Y *lezárása*. Az $X - \mathrm{cl}\,Y$ egy nyílt halmaz, ezt $\mathrm{ext}\,Y$ jelöli és az Y *külsejének* nevezzük. Hasonlóan $\mathrm{int}\,Y$ jelöli az Y *belsejét*, ami a legbővebb nyílt részhalmaza Y-nak, tehát

$$\mathrm{int}\,Y = \bigcup_{U \subset Y, U \in \mathcal{U}} U.$$

Végül

$$\mathrm{fr}\,Y = X - (\mathrm{int}\,Y \cup \mathrm{ext}\,Y)$$

az Y *határa*.

Sokat fogjuk használni a *diszjunkt unió* fogalmát.

Definíció 3.6 (Diszjunkt unió).

(1) Ha X és Y két halmaz, akkor az X és Y *diszjunkt uniója* az

$$(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

halmaz, amit $X \sqcup Y$-nal jelölünk.

(2) Ha $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ topologikus terek, akkor az $X \sqcup Y$ is topologikus tér a
$$\mathcal{W} = \{U \sqcup V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$
nyílt halmazokkal. Az $(X \sqcup Y, \mathcal{W})$ az $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ topologikus terek *diszjunkt uniója.*

Az előző fejezet alapján
$$\operatorname{cl} Y = \bigcap_{Y \subset F, X-F \in \mathcal{U}} F$$
a legszűkebb Y-t tartalmazó zárt halmaz és $p \in \operatorname{cl} Y$ akkor és csak akkor, ha p minden környezete metszi Y-t.

Állítás 3.7. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér, $A \subset X$ tetszőleges és $p \in X$. Ekkor*

(1) $p \in \operatorname{int} A \iff$ *létezik p-nek olyan környezete, ami benne van A-ban,*
(2) $p \in \operatorname{ext} A \iff$ *létezik p-nek olyan környezete, ami benne van $X - A$-ban,*
(3) $p \in \operatorname{fr} A \iff$ *p-nek minden környezete belemetsz A-ba is és $X - A$-ba is,*
(4) $\operatorname{int}(X - A) = \operatorname{ext} A$,
(5) $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$ *és* $\operatorname{fr} A$ *diszjunktak és* $X = \operatorname{int} A \sqcup \operatorname{fr} A \sqcup \operatorname{ext} A$,
(6) $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{fr} A = \operatorname{int} A \sqcup \operatorname{fr} A$.

Bizonyítás.

(1): Az, hogy p-nek létezik olyan környezete, ami benne van az A-ban pont azt jelenti, hogy valamilyen U nyílt halmazra $p \in U \subset A$. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy $p \in \bigcup_{U \subset A, U \in \mathcal{U}} U$.
(2): Definíció szerint $p \in \operatorname{ext} A$ pontosan akkor, ha $p \in X - \operatorname{cl} A$, tehát valamilyen A-t tartalmazó F zárt halmazban nincs benne p. Ez azzal ekvivalens, hogy $p \in X - F$, tehát hogy p benne van egy $X - A$-beli nyílt halmazban.
(3): Definíció szerint p benne van $\operatorname{fr} A$-ban, tehát p nincs benne $\operatorname{int} A$-ban és $\operatorname{ext} A$-ban pontosan akkor, ha p-nek minden környezete belemetsz $X-A$-ba is és A-ba is.
(4):
$$\operatorname{ext} A = X - \operatorname{cl} A = X - \bigcap_{A \subset F, X-F \in \mathcal{U}} F = \bigcup_{A \subset F, X-F \in \mathcal{U}} X - F = \operatorname{int} X - A,$$
mert $A \subset F$ ekvivalens azzal, hogy $X - F \subset X - A$ és persze $X - F$ végigmegy az összes nyílt halmazon.
(5): A definíció miatt $\operatorname{fr} A$ diszjunkt $\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A$-tól, és mivel $\operatorname{int} A \subset \operatorname{cl} A$, ezért $\operatorname{int} A$ is diszjunkt $X - \operatorname{cl} A$-tól, tehát $\operatorname{ext} A$-tól.
(6): Az (5)-ös alapján $\operatorname{cl} A = X - \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A \sqcup \operatorname{fr} A$. Az $\operatorname{int} A \sqcup \operatorname{fr} A \subset A \cup \operatorname{fr} A$ tartalmazás nyilvánvaló és
$$A \cup \operatorname{fr} A \subset \operatorname{cl} A \cup \operatorname{fr} A = (X - \operatorname{ext} A) \cup \operatorname{fr} A = (\operatorname{int} A \sqcup \operatorname{fr} A) \cup \operatorname{fr} A = \operatorname{int} A \sqcup \operatorname{fr} A.$$

□

Felmerül a kérdés, hogy egy (X,d) metrikus térben egy p középpontú $r>0$ sugarú nyílt környezet lezárása nem-e az

$$\{x \in X : d(x,p) \leq r\}$$

halmaz. Először persze azt kéne megvizsgálni, hogy ez a halmaz zárt-e egyáltalán.

Állítás 3.8. *Az $\{x \in X : d(x,p) \leq r\}$ halmaz zárt és tartalmazza $D_r(p)$ lezárását.*

Bizonyítás. Először azt kell megmutatni, hogy az $A = \{x \in X : d(x,p) > r\}$ komplementer halmaz nyílt. De ha valamilyen $x \in X$-re $d(x,p) > r$, akkor $D_{d(x,p)-r}(x) \subset A$, mert ha $d(x,y) < d(x,p)-r$, akkor $r < d(x,p)-d(x,y) \leq d(y,p)$. Tehát A nyílt.

Végül mivel $D_r(p) \subset \{x \in X : d(x,p) \leq r\}$ nyilván teljesül, ezért $\operatorname{cl} D_r(p) \subset \{x \in X : d(x,p) \leq r\}$ is, hiszen az utóbbi zárt halmaz. □

Létezik olyan (X,d) metrikus tér, amiben általában az $\{x \in X : d(x,p) \leq r\}$ halmaz nem egyenlő $D_r(p)$ lezárásával. Például legyen X egy legalább kételemű halmaz és a d legyen olyan metrika, hogy $x,y \in X$ esetén $d(x,y)=1$ akkor és csak akkor ha $x \neq y$. Ebben a metrikus térben ha $x \in X$, akkor $D_1(x) = \{x\}$, ami zárt halmaz, tehát $\operatorname{cl} D_1(x) = \{x\}$. Ugyanakkor az $\{y \in X : d(y,x) \leq 1\}$ halmaz az egész X.

Ha (X,d) egy metrikus tér, $A \subset X$ egy részhalmaz és $x \in X$, akkor az x pont és az A halmaz távolságát a

$$\varrho(x,A) = \inf_{y \in A}\{d(x,y)\}$$

jelölte. Az indukált (X, cl) topologikus térben pedig $p \in \operatorname{cl} A$ akkor és csak akkor, ha p minden környezete metszi A-t.

Állítás 3.9. *Legyen (X, cl) az X halmazon egy d metrika által indukált topologikus tér, $A \subset X$ egy részhalmaz és $p \in X$. Ekkor*

(1) $p \in \operatorname{cl} A \iff \varrho(p,A) = 0$,
(2) $p \in \operatorname{ext} A \iff \varrho(p,A) > 0$,
(3) $p \in \operatorname{int} A \iff \varrho(p, X-A) > 0$,
(4) $p \in \operatorname{fr} A \iff \varrho(p,A) = 0$ *és* $\varrho(p, X-A) = 0$.

Bizonyítás.

(1): Rögtön következik cl definíciójából.

(2): Ha $\varrho(p, A) > 0$, akkor p-nek valamilyen sugarú környezete nem metsz bele A-ba, tehát $p \in \operatorname{ext} A$. Ha pedig valamilyen $r > 0$-ra $D_r(p) \subset X - A$, akkor $\varrho(p, A) \geq r$.
(3): $p \in \operatorname{int} A \iff p \in \operatorname{ext}(X - A)$ és a (2)-es miatt teljesül az állítás.
(4): Végül a (4)-es a $p \in \operatorname{fr} A \iff p \in X - (\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A)$ és a (2)-es és (3)-as miatt teljesül.

□

Állítás 3.10. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Ekkor*

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Ha $\mathcal{A}$ véges sok halmazból áll, akkor $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$.

Bizonyítás. Ha egy $F \subset X$ zárt halmazra $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \subset F$, akkor minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subset F$ és így $\operatorname{cl} A \subset F$, de akkor $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A \subset F$ is igaz. Emiatt az összes $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$-t tartalmazó zárt halmaz metszetében $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A$ is benne van.

Ha $\mathcal{A}$ véges sok halmazból áll, akkor egy $x \in X$-re, amire $x \in \operatorname{cl} \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, az is teljesül, hogy

$$x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A,$$

különben $x \notin \operatorname{cl} A$ lenne minden $A \in \mathcal{A}$-ra, de akkor x véges sok környezetének metszete, ami egy nyílt halmaz, diszjunkt lenne $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$-tól. □

Definíció 3.11 (Topologikus terek véges direkt szorzata). Legyenek

$$(X_1,\mathcal{U}_1), \ldots, (X_n,\mathcal{U}_n)$$

topologikus terek. Legyen $\mathcal{U}$ az $U_1 \times \cdots \times U_n$ alakú halmazokból álló halmazrendszer, ahol $U_i \subset X_i$ tetszőleges nyílt halmazok. Ekkor az $\mathcal{U}$ halmazrendszer a 2.16 állítás alapján bázisa valamilyen topológiának, ezért az $\mathcal{U}$-beli halmazok unióiból álló $\mathcal{V}$ halmazrendszer egy topológiát definiál $X_1 \times \cdots \times X_n$-en. Az

$$(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{V})$$

topologikus teret az $(X_1,\mathcal{U}_1), \ldots, (X_n,\mathcal{U}_n)$ terek *direkt szorzatának* nevezzük.

Hasonlóan definiálhatjuk metrikus terek direkt szorzatát is.

Definíció 3.12 (Metrikus terek véges direkt szorzata). Legyenek

$$(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$$

metrikus terek. A

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

leképezés egy metrikát definiál az $X_1 \times \cdots \times X_n$ halmazon, az

$$(X_1 \times \cdots \times X_n, d)$$

metrikus teret az $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrikus terek *direkt szorzatának* nevezzük.

Állítás 3.13. *Legyenek*

$$(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$$

metrikus terek és

$$(X_1, \mathcal{U}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{U}_n)$$

az indukált topologikus terek. Ekkor az $(X_1 \times \cdots \times X_n, d)$ direkt szorzat által indukált topologikus tér megegyezik az $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{V})$ direkt szorzattal.

Bizonyítás. Jelölje X az $X_1 \times \cdots \times X_n$ halmazt. Egy $x \in X$ bármilyen $V \in \mathcal{V}$ környezete tartalmazza valamilyen $U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{V}$ bázis környezetét x-nek, tehát

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n.$$

Mivel minden $1 \leq i \leq n$-re U_i a d_i metrika által indukált topológiában nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\varepsilon_i > 0$, hogy $x_i \in D_{\varepsilon_i}(x_i) \subset U_i$. Legyen $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Ekkor ha $y \in X$ olyan, hogy $d(x, y) < \varepsilon$, akkor minden $1 \leq i \leq n$-re $d_i(x_i, y_i) \leq d(x, y) < \varepsilon \leq \varepsilon_i$, amiből következik, hogy $y \in V$. Tehát x-nek az (X, d)-beli ε sugarú környezete benne van V-ben.

Még azt is be kell látnunk, hogy ha $x \in X$, akkor minden $D_r(x)$ környezet tartalmaz olyan $V \in \mathcal{V}$ nyílt halmazt, amire $x \in V$. Ha $r > 0$, akkor $y \in D_r(x)$ azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) < r$. Ha minden $1 \leq i \leq n$-re $\varepsilon_i > 0$ olyan, hogy $\varepsilon_i < r/n$, akkor $d_i(x_i, y_i) < \varepsilon_i$-ből $d(x, y) < r$ következik. Legyen a V halmaz a

$$D_{\varepsilon_1}(x_1) \times \cdots \times D_{\varepsilon_n}(x_n) \in \mathcal{V}$$

környezete x-nek, akkor az előbbiek szerint $x \in V \subset D_r(x)$. $\square$

Még egy gyakran használt konstrukció a következő. Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér és legyen $\mathcal{Q}$ egy partíciója (más néven diszjunkt halmazokra bontása) X-nek, tehát $\mathcal{Q}$ egy olyan halmaza X részhalmazainak, amire teljesül, hogy a $\mathcal{Q}$-ban lévő halmazok diszjunktak és uniójuk az egész X. Jelölje $X/\mathcal{Q}$ az osztályok halmazát és $p\colon X \to X/\mathcal{Q}$ azt a leképezést, ami egy $x \in X$-hez hozzárendeli azt az osztályt, ami tartalmazza x-et.

Definíció 3.14 (Hányados topológia). Egy $U \subset X/\mathcal{Q}$ részhalmaz legyen pontosan akkor nyílt, ha $p^{-1}(U)$ nyílt. Ez egy topológiát határoz meg az $X/\mathcal{Q}$ halmazon és az így kapott topologikus teret az $(X, \mathcal{U})$ *hányadosterének* (vagy $\mathcal{Q}$-val vett hányadosterének) nevezzük.

4. Szétválaszthatósági axiómák és megszámlálhatóság

4.1. Szétválaszthatósági axiómák.

Vizsgáljuk meg most azt, hogy egy topologikus térben bizonyos halmazok mennyire "közel" vannak egymáshoz. Ha A, B két részhalmaza egy topologikus térnek, akkor még ha diszjunktak is elképzelhető, hogy valamilyen "legszűkebb" őket tartalmazó halmazok már metszik egymást. Ezt értelmezhetnénk úgy, hogy ilyenkor A és B lényegében egymás mellett vannak. Ezeknek az A-t és B-t tartalmazó legszűkebb halmazoknak a szerepét a topológiában tipikusan a $\mathrm{cl}\,A$ és $\mathrm{cl}\,B$ lezárások játszák. Tehát mondhatnánk azt, hogy A és B távol esnek egymástól, vagy "elválaszthatóak", ha $\mathrm{cl}\,A \cap \mathrm{cl}\,B = \emptyset$. Ezek szerint ha azt akarjuk mérni, hogy egy topologikus térben két elválasztható halmaz általában mégis mennyire van távol egymástól, kézenfekvőnek tűnik azt megvizsgálni, hogy a diszjunkt zárt halmazok "mennyire" diszjunktak. Ez motiválja a következő definíciót.

Definíció 4.1 (Szétválaszthatósági axiómák). Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér.

(1) Ha tetszőleges két különböző $p, q \in X$-re létezik p-nek vagy q-nak olyan U környezete ami diszjunkt a másik ponttól, akkor az $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér egy T_0 *tér*.
(2) Ha tetszőleges két különböző $p, q \in X$-re létezik p-nek olyan U környezete és q-nak is olyan V környezete ami diszjunkt a másik ponttól, akkor az $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér egy T_1 *tér*.
(3) Ha tetszőleges két különböző $p, q \in X$-re létezik p-nek olyan U környezete és q-nak is olyan V környezete amikre $U \cap V = \emptyset$, akkor az $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér egy T_2 *tér*, vagy más néven *Hausdorff tér*.
(4) Ha tetszőleges $p \in X$-re és olyan zárt $A \subset X$-re, amire $p \notin A$ létezik p-nek olyan U környezete és A-nak olyan V környezete amikre $U \cap V = \emptyset$ akkor az $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér *reguláris*.
(5) Ha tetszőleges diszjunkt zárt $A, B \subset X$-re létezik A-nak olyan U környezete és B-nek olyan V környezete amikre $U \cap V = \emptyset$ akkor az $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér *normális*.

Ha egy topologikus tér reguláris és T_1, akkor az egy T_3 *tér*. Ha meg normális és T_1, akkor T_4 *tér*.

Nyilvánvaló a definícióból, hogy a T_4 tulajdonságból következik a T_3 tulajdonság, abból a T_2 és abból pedig a T_1 és végül a T_0 tulajdonság.

A reguláris és normális terek definíciójában zárt halmazokról van szó, ezért kell a T_3 és T_4 terek definíciójában feltenni, hogy a megfelelő tér T_1 is ahhoz hogy a T_1 tulajdonság (ami pontokra vonatkozott) egyáltalán következzen. Ehelyett azt is feltehetnénk, hogy a pontok zárt halmazok, de ez ekvivalens a T_1 tulajdonsággal, ahogy a következő állítás mutatja.

Állítás 4.2. *Egy topologikus tér T_1 tér akkor és csak akkor ha minden egyelemű halmaz zárt halmaz.*

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik abból, hogy egy topologikus térben egy egyelemű halmaz pontosan akkor zárt, ha a komplementerének minden pontja belső pontja. □

Definíció 4.3 (Konvergens sorozat). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér. Egy $a\colon \mathbb{N} \to X$ függvényt X-beli *sorozatnak* nevezünk és (a_n)-nel jelöljük. Az (a_n) sorozat *konvergál* a $p \in X$ ponthoz, ha p-nek minden U környezetéhez létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ korlát, hogy minden $n > K$-ra $a_n \in U$. Ekkor a p pont az (a_n) sorozat *határértéke*.

Állítás 4.4. *Legyen (X,d) egy metrikus tér. Egy (a_n) sorozat konvergál $p \in X$-hez az indukált topologikus térben akkor és csak akkor ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ korlát, hogy minden $n > L$-re $d(a_n,p) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha egy (a_n) sorozat konvergál $p \in X$-hez az indukált topologikus térben, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén a $D_\varepsilon(p)$ környezethez is létezik egy megfelelő L korlát. Fordítva, ha adott p-nek egy U környezete, akkor valamilyen $\varepsilon > 0$-ra $D_\varepsilon(p) \subset U$, és akkor ha ehhez az ε-hoz létezik megfelelő L, akkor az szintén jó lesz az U-hoz is. □

A valós analízisben megszoktuk, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor a határértéke egyértelműen létezik. Mégis van olyan topologikus tér és benne olyan konvergens sorozat, aminek több határértéke is van. Legyen $X = \mathbb{R}$ és egy nemüres halmaz legyen nyílt, ha véges sok pont komplementuma. Legyen az a_n sorozat úgy definiálva, hogy $a_n = n$. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ pontra igaz, hogy határértéke az (a_n) sorozatnak. A következő állítás azt mutatja, hogy ez a topologikus tér nem T_2.

Állítás 4.5. *Egy T_2 topologikus térben minden sorozatnak legfeljebb csak egy határértéke lehet.*

Bizonyítás. Ha egy konvergens (a_n) sorozatnak egy p és egy q is határértéke lenne, ahol $p \neq q$, akkor egy indextől kezdve a sorozat összes tagja benne lenne p-nek is és q-nak is a T_2 tulajdonság miatt létező diszjunkt környezeteiben, ami ellentmondás. □

Állítás 4.6. *Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér*

(1) *reguláris akkor és csak akkor ha minden $p \in X$ pont minden U környezetéhez létezik a p-nek olyan V környezete is, hogy $\operatorname{cl} V \subset U$ és*
(2) *normális akkor és csak akkor ha minden A zárt halmaz minden U környezetéhez létezik az A-nak olyan V környezete is, hogy $\operatorname{cl} V \subset U$.*

Bizonyítás. (1): Ha U egy $p \in X$ környezete, akkor $X - U$ egy p-től diszjunkt zárt halmaz. Tehát ha létezik p-t és $X - U$-t elválasztó V és W két diszjunkt nyílt halmaz, akkor $\operatorname{cl} V \subset X - W$, mert $X - W$ olyan zárt halmaz, ami tartalmazza V-t. De mivel $X - W \subset U$ ezért $\operatorname{cl} V \subset U$. Fordítva, ha $p \in X$ és $A \subset X$ egy p-től diszjunkt zárt halmaz, akkor $X - A$ egy környezete A-nak, és ha létezik olyan V környezete p-nek, hogy $\operatorname{cl} V \subset X - A$, akkor V és $X - \operatorname{cl} V$ diszjunkt, p-t és A-t elválasztó nyílt halmazok lesznek. A (2)-es bizonyítása ugyanígy megy p helyett az A zárt halmazzal. □

A fenti állításokból azt látjuk, hogy a T_4 terek azok, amik rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal, amiket általában természetesnek tekintünk. A következőkben megmutatjuk, hogy minden metrikus tér T_4 tér.

Lemma 4.7. *Legyen (X, d) egy metrikus tér és $A \subset X$ egy részhalmaz.*

(1) *Minden $x, y \in X$-re*
$$|\varrho(x, A) - \varrho(y, A)| \leq d(x, y).$$
(2) *Ha $B \subset X$, akkor jelölje $\varrho(A, B)$ az $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ számot. Ekkor minden $x \in X$-re*
$$\varrho(A, B) \leq \varrho(x, A) + \varrho(x, B).$$

Bizonyítás. (1): Mivel minden $a \in A$-ra
$$d(x, a) - d(x, y) \leq d(y, a) \leq d(x, a) + d(x, y),$$
ezért infimumra áttérve
$$\varrho(x, A) - d(x, y) \leq \varrho(y, A) \leq \varrho(x, A) + d(x, y).$$
(2): Minden $a \in A$-ra és $b \in B$-re $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b)$, ezért $\varrho(A, B) \leq \varrho(x, A) + \varrho(x, B)$ is teljesül. □

Állítás 4.8. *Minden (X, d) metrikus tér T_4 tér.*

Bizonyítás. Ha $p, q \in X$ és $p \neq q$, akkor a $D_{d(p,q)/2}(p)$ és $D_{d(p,q)/2}(q)$ diszjunkt környezetei p-nek és q-nak, tehát könnyen látszik, hogy a tér T_2 tér. Legyen A és B két diszjunkt zárt halmaz. Definiáljuk az $f \colon X \to [0, 1]$ függvényt a következő módon:
$$f(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)}.$$
Ekkor $f(A) = 0$ és $f(B) = 1$, tehát $f^{-1}([0, 1/2))$ és $f^{-1}((1/2, 1])$ diszjunkt, A-t és B-t tartalmazó halmazok. Megmutatjuk, hogy ezek nyílt halmazok is. Ehhez elég megmutatni, hogy ha $f(x) < 1/2$, akkor x-nek egy kis környezetébe eső minden y-ra $f(y) < 1/2$ (és hasonlóan ha $f(x) > 1/2$, akkor $f(y) > 1/2$). Ehhez viszont elég azt megmutatni, hogy $|f(x) - f(y)| \leq K d(x, y)$ valamilyen $K \in \mathbb{R}$-re, ha $d(x, y)$ elég kicsi. Tegyük fel, hogy $y \in D_\varepsilon(x)$ valamilyen $\varepsilon > 0$-ra. Ekkor
$$\sup\{\varrho(z, A) + \varrho(z, B) : z \in D_\varepsilon(x)\} = L,$$

ahol $L \in \mathbb{R}$.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{\varrho(x,A)}{\varrho(x,A) + \varrho(x,B)} - \frac{\varrho(y,A)}{\varrho(y,A) + \varrho(y,B)} \right| =$$
$$\left| \frac{\varrho(x,A)\left(\varrho(y,A) + \varrho(y,B)\right) - \varrho(y,A)\left(\varrho(x,A) + \varrho(x,B)\right)}{\left(\varrho(x,A) + \varrho(x,B)\right)\left(\varrho(y,A) + \varrho(y,B)\right)} \right| \leq$$
$$\frac{|\varrho(x,A) - \varrho(y,A)|}{\varrho(A,B)^2} \max\{\varrho(x,A) + \varrho(x,B), \varrho(y,A) + \varrho(y,B)\} \leq$$
$$|\varrho(x,A) - \varrho(y,A)| \frac{L}{\varrho(A,B)^2} \leq d(x,y) \frac{L}{\varrho(A,B)^2}.$$

Ha $0 < \delta < \varepsilon$ és $y \in D_\delta(x)$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq \delta \frac{L}{\varrho(A,B)^2},$$

és mivel δ tetszőlegesen kicsi lehet, kapjuk az állítást. □

Példa 4.9. A 2.18 (4)-es és (5)-ös példában ha $X = \mathbb{R}$, akkor az így kapott topologikus tér a (4)-es példában nem T_0, az (5)-ösben pedig T_0 de nem T_1. A 2.18 (6)-os példában lévő topologikus tér T_1, de nem T_2. A 2.18 (9)-es példában lévő topologikus tér pedig nyilván T_2, de nem T_3, mert ha $x \in \mathbb{R}$, akkor az $(x,0)$ pont valamilyen U bázis környezetének komplementuma egy olyan zárt halmaz, aminek tetszőleges környezete belemetsz U-ba.

Állítás 4.10. *Ha az* $(X,\mathcal{U})$ *és* $(Y,\mathcal{V})$ *topologikus terek* T_0, T_1, T_2, *vagy* T_3 *terek, akkor a direkt szorzatuk is ennek megfelelően* T_0, T_1, T_2, *illetve* T_3 *tér.* □

De T_4 terek direkt szorzata nem feltétlenül T_4 tér. Egy nevezetes példa a következő. Legyen $X = \mathbb{R}$, de a nyílt halmazok nem a szokásos metrika által meghatározott nyílt halmazok lesznek, hanem az

$$\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

halmazrendszer, mint bázis által meghatározott topológiát tekintjük. Ez tényleg bázis, mert véges sok balról zárt, jobbról nyílt intervallum metszete előáll szintén ilyen típusú intervallumok uniójaként. Az így kapott topologikus teret Sorgenfrei egyenesnek nevezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Sorgenfrei egyenes T_4 tér.

Állítás 4.11. *A Sorgenfrei egyenes önmagával vett direkt szorzata nem* T_4. □

Fontos kérdés, hogy milyen topologikus terek állnak elő valamilyen metrikus tér által indukált topologikus térként, tehát hogy milyen topologikus terek *metrizálhatóak*. Az előbbiek alapján a Sorgenfrei egyenes nem metrizálható, hiszen ha metrizálható lenne, akkor az önmagával vett direkt szorzata is az lenne, ami akkor T_4 tér lenne. De mivel nem T_4, ezért a Sorgenfrei egyenes sem metrizálható. Később azt is megmutatjuk, hogy egy olyan T_4 tér, aminek van olyan bázisa, ami legfeljebb csak megszámlálhatóan végtelen sok halmazból áll, mindig metrizálható. Tehát a Sorgenfrei egyenesnek nincsen megszámlálható bázisa.

4.2. Megszámlálhatóság.

Az, hogy egy topologikus térnek van-e megszámlálható bázisa, olyan fontos tulajdonság, hogy egy külön elnevezést is bevezetünk.

Definíció 4.12 (M_2 topologikus tér). Egy topologikus tér M_2 *tér*, ha létezik legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok halmazból álló bázisa.

Állítás 4.13.

(1) *Ha* $(X,\mathcal{U})$ *egy* M_2 *topologikus tér és* $Y \subset X$, *akkor az* $(Y,\mathcal{U}|_Y)$ *megszorítás is* M_2.
(2) *Ha* $(X,\mathcal{U})$ *és* $(Y,\mathcal{V})$ *két* M_2 *topologikus tér, akkor a direkt szorzatuk is* M_2.

□

Állítás 4.14. *Minden* T_3 *és* M_2 *tér* T_4 *tér is.*

Bizonyítás. Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy T_3 és M_2 topologikus tér. Ekkor egy $\mathcal{B}$ bázisa előáll

$$\mathcal{B} = \{U_1, \dots, U_n, \dots\}$$

alakban, ahol U_n nem üres és nyílt halmazok. Legyen $A, B \subset X$ két diszjunkt zárt halmaz. Legyen

$$\mathcal{U}_A = \{U_n : \operatorname{cl} U_n \cap B = \emptyset\} = \{U'_1, \dots, U'_n, \dots\}$$

és

$$\mathcal{U}_B = \{U_n : \operatorname{cl} U_n \cap A = \emptyset\} = \{U''_1, \dots, U''_n, \dots\}.$$

Legyen

$$V_A = \bigcup \mathcal{U}_A \quad \text{és} \quad V_B = \bigcup \mathcal{U}_B.$$

Ekkor $X - B = V_A$, mert egyrészt V_A olyan halmazok uniója, amik diszjunktak B-től és így $V_A \subset X - B$. Másrészt $X - B \subset V_A$, mert ha $x \in X - B$, akkor mivel az X topologikus tér T_3, létezik olyan $U_n \in \mathcal{B}$ környezete x-nek, hogy $\operatorname{cl} U_n \subset X - B$. Ekkor $\operatorname{cl} U_n \cap B = \emptyset$ és emiatt $U_n \subset V_A$, tehát $x \in V_A$. Hasonlóan kapjuk, hogy $X - A = V_B$.

Tehát V_A és V_B környezetei A-nak és B-nek, de nem biztos, hogy diszjunktak. Legyenek

$$H_n^A = U'_n - (\operatorname{cl} U''_1 \cup \dots \cup \operatorname{cl} U''_n)$$

és

$$H_n^B = U''_n - (\operatorname{cl} U'_1 \cup \dots \cup \operatorname{cl} U'_n),$$

ezek nyilván nyílt halmazok. Ha

$$H^A = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^A \quad \text{és} \quad H^B = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^B,$$

akkor $A \subset H^A$ és $B \subset H^B$. Végül $H^A \cap H^B = \emptyset$ is teljesül, mert $H_n^A \subset U_n'$ de $H_m^B \cap U_n' = \emptyset$ ha $m \geq n$, tehát $H_n^A \cap H_m^B = \emptyset$ ha $m \geq n$, és hasonlóan $H_n^A \cap H_m^B = \emptyset$ ha $m \leq n$. □

Gyakran az M_2 tulajdonságnál egyszerűbb ellenőrizni a következőt.

Definíció 4.15 (Szeparábilis tér). Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér *szeparábilis*, ha létezik olyan, legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok pontból álló részhalmaza, aminek a lezárása X.

Ezt kicsit egyszerűbben is meg lehet fogalmazni, ha bevezetjük a következő definíciót.

Definíció 4.16 (Sűrű részhalmaz). Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér Y részhalmaza *sűrű* az X-ben, ha $\operatorname{cl} Y = X$.

Állítás 4.17. *Egy topologikus tér Y részhalmaza sűrű akkor és csak akkor, ha minden nem üres U nyílt halmazra $Y \cap U \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Ha $\operatorname{cl} Y = X$ és $U \neq \emptyset$ egy nyílt halmaz, akkor az U környezete valamilyen $x \in U$-nak, és akkor mivel $x \in \operatorname{cl} Y$, az x minden környezete, így U is belemetsz Y-ba. Fordítva, ha $x \in X$, akkor mivel x-nek minden környezete belemetsz Y-ba, $x \in \operatorname{cl} Y$. □

Tehát egy topologikus tér szeparábilis, ha van legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok pontból álló sűrű részhalmaza.

Állítás 4.18. *Minden M_2 topologikus tér szeparábilis.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy megszámlálható bázis. Ekkor ha minden $U \in \mathcal{B}$-ből kiválasztunk egy pontot, az így kapott halmaz sűrű lesz. □

Egy példa szeparábilis, de nem M_2 topologikus térre a következő. Legyen X egy nem megszámlálhatóan végtelen halmaz (például $X = \mathbb{R}$) és egy nemüres részhalmaz legyen pontosan akkor zárt, ha véges sok pontból áll, vagy ha megegyezik X-el. Ebben a topologikus térben minden végtelen részhalmaz sűrű, hiszen az azt tartalmazó legszűkebb zárt halmaz csak az X lehet. Ez a topologikus tér nem M_2, mert ha létezne egy

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$$

megszámlálható bázisa, ahol $\sigma_i \neq \emptyset$, akkor az

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X - \sigma_i$$

halmaz megszámlálható lenne, mivel mindegyik $X - \sigma_i$ zárt és így véges vagy üres halmaz. De mivel

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X - \sigma_i = X - \bigcap_{i=1}^{\infty} \sigma_i$$

és X megszámlálhatóan végtelennél több pontot tartalmaz, ezért biztosan van valamilyen

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \sigma_i.$$

De ekkor $X - \{x\}$ nyílt halmaz, így elő kell állnia valamilyen uniójaként valahány σ_i báziselemnek, ami lehetetlen, ha mindegyik σ_i tartalmazza x-et. Tehát ez a topologikus tér nem M_2.

Állítás 4.19. *Minden szeparábilis metrikus tér* M_2.

BIZONYÍTÁS. Legyen (X, d) egy szeparábilis metrikus tér. Legyen $Y \subset X$ egy megszámlálható sűrű részhalmaz és legyen $\mathcal{B}$ az Y pontjai körüli $1/n$ sugarú környezetekből álló halmazrendszer, ahol n végigmegy $\mathbb{N}$-en. Ekkor $\mathcal{B}$ megszámlálható. Még azt kell megmutatni, hogy $\mathcal{B}$ bázis, de ehhez meg elég azt, hogy ha U egy nyílt halmaz és $x \in U$, akkor van olyan $V \in \mathcal{B}$, hogy

$$x \in V \subset U.$$

Ha $x \in U$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $D_{\frac{1}{n}}(x) \subset U$, és mivel Y sűrű, van olyan $y \in Y$, hogy $y \in D_{\frac{1}{2n}}(x)$. Ekkor

$$x \in D_{\frac{1}{2n}}(y)$$

is teljesül, és $D_{\frac{1}{2n}}(y) \subset D_{\frac{1}{n}}(x)$ is, mert ha valamilyen p-re $d(p, y) < \frac{1}{2n}$, akkor $d(p, x) \leq d(p, y) + d(y, x) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = 1/n$. Tehát

$$x \in D_{\frac{1}{2n}}(y) \subset U.$$

□

Elképzelhető, hogy egy topologikus tér nem M_2, de minden pont közelében úgy viselkedik, mint egy M_2 tér.

Definíció 4.20 (Környezetbázis). Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér és $x \in X$. Az x pont egy *környezetbázisa* az x környezeteinek olyan $\mathcal{B}_x$ halmazrendszere, amire teljesül, hogy az x minden V környezetéhez létezik olyan $U \in \mathcal{B}_x$, hogy $U \subset V$.

Például egy metrikus tér által indukált topologikus térben a $D_r(x)$ halmazok, ahol $r > 0$ tetszőleges, a rögzített x pont egy környezetbázisát adják. Sőt, a $D_{1/n}(x)$ halmazok is, ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges.

Definíció 4.21 (M_1 topologikus tér). Egy topologikus tér M_1 *tér*, ha minden pontnak létezik megszámlálható környezetbázisa.

Állítás 4.22. *Egy M_2 topologikus tér M_1 tér is.* □

Állítás 4.23. *Minden metrikus tér M_1 tér.* □

5. Folytonos leképezések

Egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak nevezünk, ha minden $x \in \mathbb{R}$-re teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (Vagy egyszerűbben fogalmazva, ha y elég közel van x-hez, akkor $f(y)$ is elég közel van $f(x)$-hez, csak sajnos ez nem egy matematikailag precíz állítás.) Először metrikus terekre általánosítjuk a folytonosság fogalmát, majd topologikus terekre is. Ennek az lesz a nagy előnye, hogy matematikailag intuitívan gondolkodhatunk a folytonosságról (tehát az "ε-δ-ás" állítások helyett az "elég közel" fogalmát fogjuk inkább használni).

A leggyakrabban használt definíció a következő.

Definíció 5.1 (Folytonosság metrikus terekben). Legyen (X, d_1) és (Y, d_2) két metrikus tér és $f\colon X \to Y$ egy leképezés. Az f leképezés *folytonos*, ha minden $x \in X$-re teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x' \in X$ és $d_1(x, x') < \delta$, akkor $d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

A definícióbeli feltétel nyilván ekvivalens azzal, hogy minden $x \in X$-re és minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(D_\delta(x)) \subset D_\varepsilon(f(x))$, vagy másképp fogalmazva $D_\delta(x) \subset f^{-1}(D_\varepsilon(f(x)))$.

Ha $X = Y = \mathbb{R}$ és a metrika mindkét esetben a szokásos Euklideszi metrika, akkor egy $f\colon X \to Y$ leképezés pontosan akkor folytonos a szokásos értelemben, ha folytonos a 5.1 definíció értelmében. Ez a definíció azt akarja kifejezni, hogy ha x és x' elég közel vannak, akkor $f(x)$ és $f(x')$ is elég közel vannak.

Állítás 5.2. *Legyen (X, d_1) és (Y, d_2) két metrikus tér és $f\colon X \to Y$ egy leképezés. A következők ekvivalensek.*

(1) *Az f folytonos,*
(2) *minden $A \subset X$-re $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$,*
(3) *minden $x \in X$-re ha az (x_n) sorozat konvergál x-hez, akkor az $f(x_n)$ sorozat konvergál $f(x)$-hez.*

BIZONYÍTÁS. (1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $x \in X$ és $y \in Y$, akkor legyen $\varrho_1(x,A) = \inf_{x' \in A}\{d_1(x,x')\}$ és $\varrho_2(y,B) = \inf_{y' \in B}\{d_2(y,y')\}$, ahol $A \subset X$ és $B \subset Y$ tetszőleges halmazok. Azt kell belátni, hogy ha f folytonos, $x \in X$ és $\varrho_1(x,A) = 0$, akkor

$$\varrho_2(f(x), f(A)) = 0.$$

Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy $x' \in A$ és $d_1(x,x') < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Ekkor

$$\varrho_2(f(x), f(A)) = \inf_{x' \in A}\{d_2(f(x), f(x'))\} \leq \varepsilon$$

ha van olyan $x' \in A$, hogy $d_1(x,x') < \delta$. De mivel $\varrho_1(x,A) = 0$, valamilyen $x' \in A$-ra $d_1(x,x') < \delta$. Ha $\varepsilon > 0$ tart a 0-hoz, akkor ebből az következik, hogy $\inf_{x' \in A}\{d_2(f(x), f(x'))\} = 0$. (2) $\Longrightarrow$ (3): Ha az $(x_n) \in X$ sorozat konvergál $x \in X$-hez, akkor $\mathbb{N}$ minden végtelen $\mathcal{N}$ részhalmazára $x \in \operatorname{cl}\{x_n : n \in \mathcal{N}\}$. Ekkor f folytonossága miatt $f(x) \in \operatorname{cl}\{f(x_n) : n \in \mathcal{N}\}$, tehát $\mathbb{N}$ minden végtelen $\mathcal{N}$ részhalmazára

$$0 = \varrho_2(f(x), \{f(x_n) : n \in \mathcal{N}\}) = \inf_{n \in \mathcal{N}}\{d_2(f(x), f(x_n))\},$$

tehát $f(x)$ határértéke $f(x_n)$ minden részsorozatának. (3) $\Longrightarrow$ (1): Ha valamilyen $x \in X$-re lenne olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $f(D_{1/n}(x))$ nincs benne $D_\varepsilon(f(x))$-ben, akkor valamilyen $(x_n) \in D_{1/n}(x)$ sorozatra $(f(x_n)) \notin D_\varepsilon(f(x))$, tehát $f(x_n)$ nem konvergálna $f(x)$-hez. □

Állítás 5.3. *Ha (X,d) egy metrikus tér és $A \subset X$, akkor az*

$$x \mapsto \varrho(x,A) = \inf_{y \in A}\{d(x,y)\}$$

függvény, ami X-ből $[0,\infty)$-be képez, folytonos.

BIZONYÍTÁS. Egyszerűen következik a 4.7 lemmából. □

Egy másik példa az előzőekben már látott folytonos leképezésre a 4.8 állítás bizonyításában használt

$$f(x) = \frac{\varrho(x,A)}{\varrho(x,A) + \varrho(x,B)}$$

leképezés, hiszen a bizonyításban pont azt mutattuk meg, hogy folytonos.

Az 5.2 állítás segítségével a folytonosságot topologikus terek közötti leképezésekre is általánosíthatjuk.

Definíció 5.4 (Folytonosság topologikus terekben). Legyen (X, cl_X) és (Y, cl_Y) két topologikus tér. Egy $f\colon X \to Y$ leképezés *folytonos*, ha minden $A \subset X$-re $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$.

Állítás 5.5. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ két topologikus tér és $f\colon X \to Y$ egy leképezés. A következők ekvivalensek.*

(1) *Az f folytonos.*

(2) *Minden* $V \in \mathcal{V}$*-re* $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$*, tehát minden nyílt halmaz őse nyílt.*
(3) *Minden zárt halmaz őse is zárt halmaz.*
(4) *Létezik* $(Y, \mathcal{V})$*-nek olyan bázisa, aminek minden elemének az őse nyílt halmaz.*

Bizonyítás. (1) $\Longrightarrow$ (3): Legyen $B \subset Y$ tetszőleges zárt halmaz. Ekkor
$$f(\operatorname{cl} f^{-1}(B)) \subset \operatorname{cl} f(f^{-1}(B)) = \operatorname{cl} B = B,$$
tehát $\operatorname{cl} f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B)$, így $f^{-1}(B)$ zárt. (3) $\Longrightarrow$ (1): Legyen $A \subset X$ tetszőleges halmaz. Ekkor $f^{-1}(\operatorname{cl} f(A))$ zárt halmaz és tartalmazza A-t, mert $f(A)$-nál bővebb halmaz őse. Ezért $\operatorname{cl} A \subset f^{-1}(\operatorname{cl} f(A))$ is teljesül. (2) $\Longleftrightarrow$ (3): Egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha a komplementere zárt, ebből könnyen adódik az állítás. (2) $\Longrightarrow$ (4): Nyilvánvaló. (4) $\Longrightarrow$ (2): Ha $V = \bigcup_\alpha B_\alpha$ valamilyen $(Y, \mathcal{V})$-beli báziselemek uniója, akkor $f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$ is nyílt halmaz. □

A 5.1 definícióban igazából egy $x \in X$ pontban való folytonosságot definiáltunk, és akkor volt folytonos egy $f\colon X \to Y$ leképezés, ha minden $x \in X$ pontban folytonos volt. Érdemes ezt topologikus terekre külön definiálni.

Definíció 5.6 (Pontbeli folytonosság). Legyen $(X,\mathcal{U})$ és $(Y, \mathcal{V})$ két topologikus tér, $f\colon X \to Y$ egy leképezés és $x \in X$. Az f leképezés *folytonos az x pontban*, ha $f(x)$ minden $V_{f(x)}$ környezetéhez létezik x-nek olyan U_x környezete, hogy $f(U_x) \subset V_{f(x)}$.

Állítás 5.7. *Legyen* $(X,\mathcal{U})$ *és* $(Y, \mathcal{V})$ *két topologikus tér és* $f\colon X \to Y$ *egy leképezés. Az* f *folytonos akkor és csak akkor, ha minden* $x \in X$*-ben folytonos.*

Bizonyítás. Ha f folytonos, $x \in X$ és $V_{f(x)}$ egy környezete $f(x)$-nek, akkor $f^{-1}(V_{f(x)})$ egy olyan U_x környezete x-nek, amit f a $V_{f(x)}$-be képez. Ha pedig f folytonos minden $x \in X$-ben és $V \in \mathcal{V}$, akkor ha x olyan, hogy $f(x) \in V$, akkor van olyan U_x környezete x-nek, hogy $U_x \subset f^{-1}(V)$, tehát minden $x \in f^{-1}(V)$ belső pontja $f^{-1}(V)$-nek, ami azt jelenti, hogy $f^{-1}(V)$ nyílt. □

Állítás 5.8. *Folytonos leképezések kompozíciója is folytonos.* □

Állítás 5.9. *Legyen* $(X,\mathcal{U})$ *egy topologikus tér és* f *és* g *két* X*-en értelmezett* $\mathbb{R}$*-be képező folytonos függvény, ahol* $\mathbb{R}$*-et az Euklideszi topológiával tekintjük. Ekkor az* $f+g$*,* fg *és* f/g *függvények is folytonosak.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$ és $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik x-nek olyan U környezete, hogy ha $y \in U$, akkor $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Szintén létezik x-nek olyan V környezete, hogy ha $y \in V$, akkor $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. De ekkor ha $y \in U \cap V$, akkor
$$|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| \leq 2\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |(f(x) - f(y))g(x) + (g(x) - g(y))(f(y) - f(x) + f(x))| \leq \\ |(f(x) - f(y))||g(x)| + |(g(x) - g(y))||f(y) - f(x)| + |(g(x) - g(y))||f(x)| \leq \\ \varepsilon|g(x)| + \varepsilon^2 + \varepsilon|f(x)|, \end{aligned}$$

és
$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| = \left|\frac{g(y)-g(x)}{g(x)g(y)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|g(x)g(y)|} \leq \frac{2\varepsilon}{|g(x)|^2}$$
ha ez utóbbi esetben $g(x) \neq 0$ és $y \in V \cap g^{-1}((g(x) - \frac{|g(x)|}{2}, g(x) + \frac{|g(x)|}{2}))$, ami persze egy környezete x-nek. Ezekből már rögtön következik az állítás. □

Állítás 5.10. *Legyen (X, d_1) és (Y, d_2) két metrikus tér és $f\colon X \to Y$ egy leképezés. Az f folytonos akkor és csak akkor, ha az f folytonos az indukált topológiában.* □

Sokszor nem könnyű ellenőrizni, hogy például egy bázis minden elemének az őse nyílt-e, mert esetleg a bázis elemei bonyolult halmazok. Ezért lesz hasznos a következő.

Definíció 5.11 (Előbázis). Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér. Egy $\mathcal{B}' \subset \mathcal{U}$ halmazrendszer egy *előbázisa* $(X, \mathcal{U})$-nak, ha a $\mathcal{B}'$ elemeinek véges nem üres metszeteiből álló halmazrendszer bázisa $(X, \mathcal{U})$-nak.

Nyilván egy előbázis elemei is nyílt halmazok.

Állítás 5.12. *Legyen X egy tetszőleges halmaz. Ekkor tetszőleges $\mathcal{B}' \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer előbázisa valamilyen topológiának X-en.* □

Állítás 5.13. *Legyen $(X, \mathcal{U})$ és $(Y, \mathcal{V})$ két topologikus tér és $f\colon X \to Y$ egy leképezés. Az f folytonos akkor és csak akkor, ha $(Y, \mathcal{V})$ valamilyen előbázisának minden elemének az őse nyílt halmaz.* □

Gyakran a folytonos leképezések a "természetes" leképezéseknek felelnek meg. Például egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér és annak egy $\mathcal{Q}$ partíciója esetén a $p\colon X \to X/\mathcal{Q}$ hányadosleképezés folytonos. Az $(X_1, \mathcal{U}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{U}_n)$ topologikus terek direkt szorzatán értelmezett
$$\pi_i\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$$
koordináta projekciók, ahol $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, könnyen ellenőrizhető módon szintén folytonosak.

Állítás 5.14. *Legyen $(Y, \mathcal{V})$ egy topologikus tér. Egy $f\colon Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$ leképezés folytonos akkor és csak akkor, ha minden $1 \leq i \leq n$-re a $\pi_i \circ f$ kompozíció folytonos.* □

Definíció 5.15 (Sorozatfolytonos leképezés). Legyen $(X, \mathcal{U})$ és $(Y, \mathcal{V})$ két topologikus tér, $f\colon X \to Y$ egy leképezés és $x \in X$. Ha minden (x_n) sorozatra, aminek határértéke x, teljesül, hogy az $(f(x_n))$ sorozat határértéke $f(x)$, akkor az f leképezés *sorozatfolytonos*.

Állítás 5.16. *Legyen $(X, \mathcal{U})$ és $(Y, \mathcal{V})$ két topologikus tér, $f\colon X \to Y$ egy leképezés és $x \in X$.*

(1) *Ha az f folytonos x-ben, akkor f sorozatfolytonos x-ben.*

(2) *Ha* $(X,\mathcal{U})$ *egy* M_1 *tér és* f *sorozatfolytonos* x*-ben, akkor* f *folytonos* x*-ben.*

Bizonyítás. Az (1)-eshez ha $(x_n) \in X$ egy x-hez konvergáló sorozat és $V_{f(x)} \subset Y$ egy környezete $f(x)$-nek, akkor valamilyen $U_x \subset X$ környezetére x-nek, ami biztosan tartalmazza x_n-et ha n elég nagy, $f(U_x) \subset V_{f(x)}$. Tehát $V_{f(x)}$ is tartalmazza $f(x_n)$-et ha n elég nagy. A (2)-eshez ha f nem lenne folytonos x-ben, akkor valamilyen $V_{f(x)}$ környezethez létezne olyan megszámlálható $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ környezetbázisa x-nek, hogy $f(U_i)$ nincsen benne $V_{f(x)}$-ben. De ekkor van olyan $x_n \in U_n$ sorozat, hogy $f(x_n) \notin V_{f(x)}$, ami ellentmond annak, hogy $f(x_n)$ konvergál $f(x)$-hez, ha x_n konvergál x-hez. □

Folytonos leképezésekkel azt is megfogalmazhatjuk, hogy mikor tekintünk két topologikus teret azonosnak.

Állítás 5.17. *Az* (X, cl_X) *és* (Y, cl_Y) *topologikus terek homeomorfak akkor és csak akkor, ha léteznek köztük olyan folytonos* $f\colon X \to Y$ *és* $g\colon Y \to X$ *leképezések, hogy* $f \circ g$ *és* $g \circ f$ *az identitás leképezések. Ilyenkor* f *és* g *is bijekciók.* □

Ha két topologikus tér homeomorf egymással, akkor minden topologikus tulajdonságuk meg kell hogy egyezzen, mert ha az egyik térben bizonyítani tudunk valamit csak a nyílt halmazokból kiindulva, akkor az f és g bijekciók miatt a másik térben is bizonyítani tudjuk azt. Például a 2.18 (8)-as és (9)-es példában lévő topologikus terek nem homeomorfak egymással, mert a (8)-as példában lévő T_3 tér, de a (9)-es példában lévő nem.

Egy másik példa olyan topologikus terekre, amiknél a folytonosság fontos szerepet játszik, a topologikus csoportok.

Definíció 5.18 (Topologikus csoport). Egy (X, cl) topologikus tér *topologikus csoport*, ha X egy csoport is és az $X \times X \to X$ szorzás a direkt szorzat téren és az $X \to X$ inverz képzés műveletek folytonosak.

Állítás 5.19. *Legyen* (X, cl) *egy topologikus csoport.*

(1) *Tetszőleges részcsoport lezárása részcsoport.*
(2) *Normálosztó lezárása normálosztó.*

Bizonyítás. Az (1)-eshez először megjegyezzük, hogy az

$$f\colon X \times X \to X$$

$$(a,b) \mapsto ab^{-1}$$

leképezés is folytonos és hogy $f(Y \times Y) \subset Y$ ekvivalens azzal, hogy Y egy részcsoport. Tehát f folytonossága miatt

$$f(\mathrm{cl}\,(Y \times Y)) \subset \mathrm{cl}\, f(Y \times Y),$$

amiből $f(Y\times Y)\subset Y$ figyelembe vételével $\mathrm{cl}\,(Y\times Y)=\mathrm{cl}\,Y\times\mathrm{cl}\,Y$ miatt egyszerűen adódik, hogy

$$f(\mathrm{cl}\,Y\times\mathrm{cl}\,Y)\subset\mathrm{cl}\,Y.$$

A (2)-eshez azt használjuk, hogy Y pontosan akkor normálosztó, ha minden $x\in X$-re $xYx^{-1}\subset Y$. Az $f_x\colon X\to X$

$$y\mapsto xyx^{-1}$$

leképezés folytonos, ezért

$$f_x(\mathrm{cl}\,Y)\subset\mathrm{cl}\,f_x(Y),$$

amiből $f_x(Y)\subset Y$ miatt

$$f_x(\mathrm{cl}\,Y)\subset\mathrm{cl}\,Y$$

rögtön következik. □

6. Összefüggőség

Az egyik legszembeszökőbb topologikus tulajdonság az összefüggőség. Azt várjuk, hogy egy topologikus tér nem homeomorf az önmagával vett diszjunkt uniójával, például $\mathbb{R}$ a szokásos topológiával nem homeomorf $\mathbb{R}\sqcup\mathbb{R}$-el. Ez nem minden topologikus térre igaz, például $\mathbb{N}$, mint az $\mathbb{R}$ megszorítása $\mathbb{N}$-re, homeomorf $\mathbb{N}\sqcup\mathbb{N}$-el.

Definíció 6.1 (Összefüggő tér). Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér *összefüggő*, ha X nem áll elő két nemüres diszjunkt nyílt részhalmazának az uniójaként. Az $(X,\mathcal{U})$ topologikus térben egy $Y\subset X$ részhalmaz összefüggő, ha az $(Y,\mathcal{U}|_Y)$ altér összefüggő.

Állítás 6.2. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér. A következők ekvivalensek.*

(1) *$(X,\mathcal{U})$ összefüggő.*
(2) *Csak az X és $\emptyset$ olyan részhalmazok, amik nyíltak és zártak is egyszerre.*
(3) *X nem áll elő két nemüres diszjunkt zárt részhalmazának az uniójaként.*

□

Legyen $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ a szokásos Euklideszi topológiával ellátott valós számegyenes.

Állítás 6.3. *Legyen $Y\subset\mathbb{R}$. Ekkor Y az $(\mathbb{R},\mathcal{R})$-nek egy összefüggő részhalmaza akkor és csak akkor, ha Y egy intervallum, vagy egy pont.* □

Bizonyítás. Egy pont nyilván összefüggő. Ha Y összefüggő és nem pont, akkor intervallum, mert ha nem intervallum, akkor van olyan $a,b\in Y$, $c\in\mathbb{R}-Y$, hogy $(-\infty,c)\cap Y$ és $(c,\infty)\cap Y$ nyíltak Y-ban, diszjunktak, nem üresek és uniójuk az Y, tehát Y nem összefüggő. Ha pedig Y intervallum, akkor összefüggő a következők miatt. Először tegyük fel, hogy Y egy korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum. Azt bizonyítjuk be, hogy Y-ban nem létezik nem üres, egyszerre nyílt és zárt valódi részhalmaz. Ha $a \in A \subset Y$, ahol A nyílt és zárt Y-ban, akkor legyen

$$\alpha = \sup\{x \in \mathbb{R} : x \geq a, [a, x] \subset A\}.$$

Az Y zárt, ezért A zárt $\mathbb{R}$-ben is, tehát $\alpha \in A$. Ha $\alpha = b$, akkor $Y = A$. Tegyük fel, hogy $\alpha < b$, ekkor $b \notin A$. Mivel A nyílt Y-ban, $A \cap (\mathbb{R} - \{a, b\}) = A - \{a, b\}$ is nyílt Y-ban, és ezért $A - \{a, b\}$ nyílt a nyílt $Y - \{a, b\}$-ben is, tehát $\mathbb{R}$-ben is. Nyilván A minden pontjának egy kis jobb vagy bal oldali környezete is benne van Y-ban, különben A biztosan nem nyílt Y-ban. De ekkor mivel $\alpha \in A$, valamilyen kicsi $\varepsilon > 0$-ra $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$ is benne van $A - \{a, b\}$-ben, ami miatt α nem lehetne szuprémum. Azt kapjuk tehát, hogy $A = Y$ kell legyen. Végül ha Y akármilyen intervallum, akkor előáll korlátos és zárt intervallumok növekvő uniójaként, és így a 6.7 állítás szerint összefüggő. $\square$

Mivel $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, a $(\mathbb{Q}, \mathcal{R}|_{\mathbb{Q}})$ topologikus tér egy altere $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$-nek.

Állítás 6.4. *Legyen $Y \subset \mathbb{Q}$. Ekkor Y a $(\mathbb{Q}, \mathcal{R}|_{\mathbb{Q}})$-nak egy összefüggő részhalmaza akkor és csak akkor, ha Y egy pont.* $\square$

Definíció 6.5 (Totálisan összefüggéstelen tér). Az olyan topologikus teret, amiben csak az egy pontot tartalmazó részhalmazok összefüggőek, *totálisan összefüggéstelennek* nevezzük.

Tehát $(\mathbb{Q}, \mathcal{R}|_{\mathbb{Q}})$ egy példa totálisan összefüggéstelen topologikus térre. Egy másik példa valamilyen X alaphalmazon a

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \neq y \\ 0 & \text{ha } x = y \end{cases}$$

metrika által indukált topologikus tér, mert ebben az egyelemű halmazok nem csak zártak (mint minden metrikus térben), hanem nyíltak is, ezért a több pontot tartalmazó halmazok nem összefüggőek. Ha az X megszámlálhatóan végtelen, akkor az (X, d) metrikus tér által indukált topologikus térrel homeomorf az $(\mathbb{N}, \mathcal{R}|_{\mathbb{N}})$ topologikus tér.

Definíció 6.6 (Összefüggőségi komponens). Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér. Ha $x \in X$, akkor az x *összefüggőségi komponense* a legnagyobb, x-et tartalmazó összefüggő részhalmaza X-nek.

Persze csak akkor lesz értelmes a definíció, ha megmutatjuk a következő állítást.

Állítás 6.7. *Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér. Ha Y_α, ahol α végigfut valamilyen A halmaz elemein, összefüggő részhalmazai X-nek és létezik olyan $x \in X$, hogy minden $\alpha \in A$-ra $x \in Y_\alpha$, akkor*

$$\bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$$

is összefüggő.

Bizonyítás. Jelölje Y az $\bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha$ halmazt. Tegyük fel, hogy Y nem összefüggő. Ekkor léteznek olyan U és V nem üres diszjunkt Y-ban nyílt halmazok, hogy

$$Y = U \cup V.$$

Ekkor minden $\alpha \in A$-ra

$$Y_\alpha = (Y_\alpha \cap U) \cup (Y_\alpha \cap V),$$

ami összefüggő halmaz, ezért $Y_\alpha \cap U$ vagy $Y_\alpha \cap V$ egyenlő az üres halmazzal. Ha például $Y_\alpha \cap U = \emptyset$, akkor $x \in Y_\alpha \cap V$ és így $x \in V$, ezért minden $\alpha \in A$-ra $Y_\alpha \cap U = \emptyset$. Emiatt

$$\emptyset = \bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha \cap U = Y \cap U = U,$$

ami ellentmondás. □

Ennél kicsivel több is igaz. Ha Y_α összefüggő minden $\alpha \in A$-ra és $Y_\alpha \cap Y_\beta \neq \emptyset$ minden $\alpha, \beta \in A$-ra, akkor $\bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha$ is összefüggő. De az előbbi definícióhoz nincs szükségünk erre.

Állítás 6.8. *A következők teljesülnek.*

(1) *Két összefüggőségi komponens vagy diszjunkt, vagy egybeesik.*
(2) *Ha egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus térben létezik összefüggő és sűrű részhalmaz, akkor $(X,\mathcal{U})$ összefüggő.*
(3) *Összefüggő részhalmaz lezárása is összefüggő.*
(4) *Az összefüggőségi komponensek mindig zárt részhalmazai a topologikus térnek.*
(5) *Ha csak véges sok összefüggőségi komponens van egy topologikus térben, akkor azok nyíltak is.*
(6) *Legyenek $(X,\mathcal{U})$ és $(Y,\mathcal{V})$ topologikus terek és $f\colon X \to Y$ egy folytonos leképezés. Ha $(X,\mathcal{U})$ összefüggő, akkor $f(X)$ is összefüggő részhalmaza $(Y,\mathcal{V})$-nek.*

Bizonyítás.

(1): Ha két összefüggőségi komponensnek van közös pontja, akkor az uniójuk is összefüggő, de ekkor a két kompenens egyenlő egymással, mert legnagyobb összefüggő halmazok voltak.
(2): Legyen Y egy összefüggő és sűrű részhalmaz. Tegyük fel, hogy $X = U \cup V$, ahol U és V nem üres diszjunkt X-beli nyílt halmazok. Ekkor $Y = (Y \cap U) \cup (Y \cap V)$, ahol az $Y \cap U$ és $Y \cap V$ halmazok nyíltak Y-ban és nem üresek, mert Y sűrű. De ez ellentmondás, mert feltettük, hogy Y összefüggő.
(3): Ha Y összefüggő, akkor mivel Y sűrű $\operatorname{cl} Y$-ban, $\operatorname{cl} Y$ is összefüggő.
(4): Egy összefüggőségi komponens lezárása is összefüggő, de mivel az összefüggőségi komponens legnagyobb összefüggő halmaz volt, egyenlő a lezárásával.
(5): Véges sok zárt halmaz uniója is zárt, ezért egy összefüggőségi komponens komplementere zárt.
(6): Ha léteznének $f(X)$-ben U és V nem üres diszjunkt nyílt halmazok úgy, hogy $U \cup V = f(X)$, akkor $f^{-1}(U)$ és $f^{-1}(V)$ szintén ilyenek lennének X-ben.

□

Állítás 6.9. *Legyen* (X, cl) *egy topologikus csoport. Ekkor az egységelem* Y *összefüggőségi komponense normálosztó és az* X/Y *hányados csoport az* $x \mapsto xY$ *leképezés által indukált topológiával totálisan összefüggéstelen.*

Bizonyítás. Először azt kell látni, hogy minden $x \in X$-re $xYx^{-1} = Y$, mert folytonos leképezés összefüggő halmazt összefüggő halmazba visz. Emiatt Y normálosztó, ha részcsoport. Ugyanakkor Y részcsoport, mert $x \mapsto x^{-1}$ folytonossága miatt $Y = Y^{-1}$, tehát $x \in Y$ esetén $x^{-1} \in Y$, és az is igaz, hogy ha $x, y \in Y$, akkor $xy \in Y$, a következők miatt. Ha $x \in Y$, akkor $Y = x^{-1}Y$, mert az egységelem benne van $x^{-1}Y$-ban is. Tehát ha y is Y-ban van, akkor $y^{-1}x^{-1}Y = (xy)^{-1}Y = Y$, ami azt jelenti, hogy $(xy)^{-1} \in Y$ és így $xy \in Y$. Az is igaz, hogy X/Y totálisan összefüggéstelen, a következők miatt. Először megmutatjuk, hogy ha

$$q\colon X \to X/Y$$

$$x \mapsto xY$$

a hányados leképezés és $A \subset X/Y$ egy összefüggő halmaz, akkor $q^{-1}(A)$ is összefüggő. Ha $q^{-1}(A) = U \cup V$ nem üres diszjunkt nyílt halmazok uniója, akkor U és V is pontok őseiből kell álljon, mert ha valamilyen $q^{-1}(p) = xY$ belemetsz U-ba és V-be is, akkor xY nem lenne összefüggő. Ez viszont azt jelenti, hogy $q(U)$ és $q(V)$ diszjunkt, nem üres halmazok. Nyíltak is, mert a q leképezés nyílt halmazt nyíltba visz: ha $U \subset X$ nyílt, akkor $q(U)$ pontosan akkor nyílt ha $q^{-1}(q(U))$ nyílt. De

$$q^{-1}(q(U)) = UY = \cup_{x \in Y} Ux,$$

ami nyílt halmazok uniója, mert az $y \mapsto xy$ leképezés egy homeomorfizmus. Ezért csak az egypontú H halmazok az összefüggőek X/Y-ban, ellenkező esetben egynél több mellékosztályból áll $q^{-1}(H)$, ami már nem összefüggő. □

Definíció 6.10 (Út). Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér. Egy $s\colon [0,1] \to X$ folytonos leképezést *útnak* nevezünk. Az s út *kezdőpontja* $s(0)$, a *végpontja* pedig $s(1)$. Az s út egy *hurok*, ha $s(0) = s(1)$.

Definíció 6.11 (Útösszefüggő tér). Egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér *útösszefüggő*, ha minden $x, y \in X$-hez létezik olyan $s\colon [0,1] \to X$ út, hogy $s(0) = x$ és $s(1) = y$.

Állítás 6.12. *Egy útösszefüggő topologikus tér folytonos képe is útösszefüggő.*

Bizonyítás. Ha $f\colon X \to Y$ egy folytonos leképezés és az X topologikus tér útösszefüggő, akkor két $f(p)$ és $f(q)$ pont közti út az $f \circ s$ út, ahol s egy p és q közti út X-ben. □

Definíció 6.13 (Útösszefüggőségi komponens). Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér és $x, y \in X$. Ha létezik valamilyen $s\colon [0,1] \to X$ út x kezdőponttal és y végponttal, akkor x és y egy *útösszefüggőségi komponensben* vannak.

Hasonlóan az összefüggőségi komponensekhez, az útösszefüggőségi komponensek is egy ekvivalencia relációt határoznak meg. Ennek bizonyításához szükségünk van a következőkre.

Definíció 6.14 (Utak szorzata). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér és s_1, s_2 két olyan út, hogy $s_1(1) = s_2(0)$. Az s_1 és s_2 utak *szorzata* az $s_1 s_2\colon [0,1] \to X$ út, amit úgy definiálunk, hogy
$$s_1 s_2(t) = s_1(2t)$$
ha $0 \le t \le 1/2$ és
$$s_1 s_2(t) = s_2(2t-1)$$
ha $1/2 \le t \le 1$.

Persze két út szorzata is folytonos, például a következő miatt.

Lemma 6.15. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér és tegyük fel, hogy*
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$
valamilyen $F_i \subset X$ zárt halmazokra. Legyen $(Y,\mathcal{V})$ is egy topologikus tér és $f\colon X \to Y$ egy tetszőleges leképezés. Ekkor ha az $f|_{F_i}$ megszorítások folytonosak, akkor f is folytonos.

Bizonyítás. Legyen $A \subset Y$ egy zárt halmaz. Ekkor
$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f|_{F_i}^{-1}(A)$$
miatt $f^{-1}(A)$ is zárt X-ben, hiszen minden $1 \le i \le n$-re F_i zárt X-ben és $f|_{F_i}^{-1}(A)$ zárt F_i-ben, ezért X-ben is. $\square$

Egy fontos következmény, hogy két út szorzata is folytonos. Ebből könnyen adódik a következő.

Állítás 6.16. *Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér útösszefüggőségi komponensei az X-en egy ekvivalencia relációt határoznak meg.*

Bizonyítás. Legyen $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha x és y egy útösszefüggőségi komponensben vannak. Ekkor a $\sim$ reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív. $\square$

Állítás 6.17. *Az összefüggőségi komponenseknek egy finomítása az útösszefüggőségi komponensekre bontás.*

Bizonyítás. Mivel $[0,1]$ az Euklideszi topológiával összefüggő tér, egy út képe is összefüggő. Tehát ha x és y egy útösszefüggőségi komponensben vannak, akkor egy összefüggőségi komponensben is vannak. $\square$

Ebből rögtön következik, hogy egy útösszefüggő topologikus tér összefüggő is. Ez fordítva nem igaz, nem minden összefüggő topologikus tér útösszefüggő. Az egyik legnevezetesebb példa a $\sin\frac{1}{x}$ függvény grafikonja a $(0,1]$ intervallumon kiegészítve a $(0,0)$ ponttal. Tehát legyen

$$X = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) : x \in (0,1] \right\} \cup \{(0,0)\},$$

ami $\mathbb{R}^2$-nek egy részhalmaza és ha $(\mathbb{R}^2,\mathcal{U})$ jelöli a szokásos Euklideszi topológiát, akkor $(X,\mathcal{U}|_X)$ egy topologikus tér. Ez egy összefüggő topologikus tér, mert az $\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in (0,1]\right\}$ grafikon sűrű $(X,\mathcal{U}|_X)$-ben és mivel ez a grafikon összefüggő is (mert az összefüggő $(0,1]$ folytonos képe), ezért $(X,\mathcal{U}|_X)$ is összefüggő. De $(X,\mathcal{U}|_X)$ nem útösszefüggő, mert ha az lenne, akkor létezne egy olyan $s\colon [0,1] \to X$ út, hogy $s(0) = (0,0)$ és $s(1) = (1, \sin 1)$, de akkor s sorozatfolytonos is lenne, viszont akkor a pozitív tagú $(a_n) = \frac{2}{n\pi}$ sorozat tart a 0-hoz $[0,1]$-ben, de az $(s(a_n))$ sorozat nem tart $s(0)$-hoz X-ben.

Felmerül a kérdés, hogy milyen topologikus terekben egyezik meg az összefüggőségi és az útösszefüggőségi komponensekre bontás.

Definíció 6.18 (Lokálisan útösszefüggő tér). Egy topologikus tér *lokálisan útösszefüggő*, ha minden pontnak létezik útösszefüggő környezete.

Állítás 6.19. *Lokálisan útösszefüggő terekben az összefüggőségi és az útösszefüggőségi komponensekre bontás megegyezik.*

Bizonyítás. Egy lokálisan útösszefüggő térben egy útösszefüggőségi komponensben benne kell legyen minden pontjának valamilyen környezete is, ezért az útösszefüggőségi komponensek nyíltak. Ugyanakkor egy összefüggőségi komponens egyenlő bizonyos útösszefüggőségi komponensek uniójával és ez egy diszjunkt nyílt halmazokra bontást határoz meg. De ez csak úgy lehetséges, ha ez az unió csak egytagú, mert minden összefüggőségi komponens összefüggő. □

Tehát például az előbbi $(X,\mathcal{U}|_X)$ topologikus tér nem lokálisan útösszefüggő, a $(0,0)$ pontnak nincsen útösszefüggő környezete.

7. Kompaktság

Definíció 7.1 (Nyílt fedés, Lindelöf tér, kompakt tér). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér. Egy $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ halmazrendszer, ahol minden $\alpha \in A$-ra $X_\alpha \subset X$, egy *nyílt fedése* (röviden csak *fedése*) X-nek, ha minden X_α nyílt halmaz és

$$X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha.$$

Az $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér *Lindelöf tér*, ha minden fedéséből kiválasztható megszámlálható fedés, tehát ha $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ egy tetszőleges fedése X-nek, akkor létezik $\mathcal{F} \subset \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ úgy, hogy $\mathcal{F}$ legfeljebb csak megszámlálható sok halmazt tartalmaz és még mindig fedése X-nek. Az $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér *kompakt*, ha minden fedéséből kiválasztható véges fedés. Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér $A \subset X$ részhalmaza kompakt, ha az $(A,\mathcal{U}|_A)$ altér kompakt.

Állítás 7.2. *Minden M_2 topologikus tér Lindelöf tér.*

Bizonyítás. Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy M_2 topologikus tér és legyen $\mathcal{B}$ egy megszámlálható bázis. Legyen $\mathcal{F}$ egy fedése X-nek. Ekkor minden $U \in \mathcal{F}$ nyílt halmaz előáll valamilyen $\bigcup_{\alpha\in I_U} V_{U,\alpha}$ alakban, ahol α végigmegy a megfelelő I_U indexhalmaz elemein és $V_{U,\alpha} \in \mathcal{B}$. Legyen

$$\{V_1, V_2, \dots, V_n, \dots\}$$

egy sorozatba rendezése az összes $V_{U,\alpha}$ halmaznak, ahol $U \in \mathcal{F}$, $\alpha \in I_U$. Legyenek $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ olyan $\mathcal{F}$-beli halmazok, amelyekre

$$V_1 \subset U_1, \quad V_2 \subset U_2, \dots, \quad V_n \subset U_n, \dots .$$

Ekkor $X = \bigcup_{i=1}^\infty U_i$, mert

$$X = \bigcup_{U\in\mathcal{F}} U = \bigcup_{U\in\mathcal{F}} \bigcup_{\alpha\in I_U} V_{U,\alpha} = \bigcup_{i=1}^\infty V_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i.$$

□

Definíció 7.3 (Centrált halmazrendszer). Legyen X egy tetszőleges halmaz. Egy $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer *centrált*, ha minden véges sok $\mathcal{A}$-beli halmaz metszete nem üres.

Definíció 7.4 (Torlódási pont). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér és $A \subset X$. Egy $x \in X$ az A halmaz *torlódási pontja*, ha az x minden környezetében végtelen sok eleme van A-nak.

Állítás 7.5. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy T_1 topologikus tér és $A \subset X$. Ekkor egy $x \in X$ torlódási pontja A-nak akkor és csak akkor, ha x-nek minden U környezetére igaz, hogy $U - \{x\}$ tartalmaz A-beli pontot.* □

Felsoroljuk a kompaktság néhány legfontosabb változatát és utána megvizsgáljuk, hogy melyikből melyik következik.

(1) Minden fedésnek létezik véges részfedése (ez volt a definíció).
(2) Zárt halmazok centrált rendszerének metszete nem üres.
(3) Minden megszámlálható fedésnek létezik véges részfedése.
(4) Megszámlálható sok zárt halmaz centrált rendszerének metszete nem üres.
(5) Cantor tulajdonság: ha $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ nem üres zárt halmazok egymásba ágyazott sorozata, akkor $\bigcap_{i=1}^\infty F_i \neq \emptyset$.
(6) A topologikus tér minden végtelen részhalmazának van a térben torlódási pontja.

(7) Sorozatkompakt (vagy szekvenciálisan kompakt) tulajdonság: a topologikus térben minden sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Tétel 7.6. *A következő logikai összefüggések teljesülnek.*

(a) *Minden topologikus térre*

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & (2) & & \\
(3) \arrow[r, equal] & (4) \arrow[r, equal] & (5) \arrow[r, equal] & (6) \\
(7) \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

(b) *Minden M_1 topologikus térre*

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & (2) & & & \\
(3) \arrow[r, equal] & (4) \arrow[r, equal] & (5) \arrow[r, equal] & (6) \arrow[r, equal] & (7)
\end{tikzcd}$$

(c) *Minden M_2 topologikus térben* $(3) \longrightarrow (1)$ *is teljesül, tehát M_2 topologikus térben az összes tulajdonság ekvivalens.*

Bizonyítás.

$(1) \iff (2)$: Az, hogy $\{F_\alpha\}_\alpha$ egy X-beli zártakból álló centrált halmazrendszer, ekvivalens azzal, hogy $\{X - F_\alpha\}_\alpha$ olyan nyílt halmazokból áll, amiknek semmilyen véges uniójuk sem fedi X-et. És $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$ meg ekvivalens azzal, hogy $\{X - F_\alpha\}_\alpha$ egy fedése X-nek. Tehát van olyan zárt halmazokból álló centrált rendszer, aminek metszete üres pontosan akkor, ha létezik olyan nyílt fedése X-nek, amiből nem választható ki véges részfedés.

$(1) \Longrightarrow (3)$: Nyilvánvaló.

$(3) \iff (4)$: Hasonlóan bizonyítható, csak megszámlálható halmazrendszerekkel.

$(4) \Longrightarrow (5)$: Mivel $\{F_i\}_{i\geq 1}$ megszámlálható sok zártból álló centrált halmazrendszer, a metszetük nem üres.

$(5) \Longrightarrow (4)$: Legyenek $F_1, F_2, \dots$ zártak. Ha a véges metszeteik nem üresek, akkor az $F_i' = \bigcap_{j=1}^i F_j$ zárt halmazok sem üresek. De $F_i' \supset F_{i+1}'$, és $\bigcap_{i=1}^\infty F_i = \bigcap_{i=1}^\infty F_i'$-ből következik az állítás.

$(6) \Longrightarrow (3)$: Ha $\{U_i\}_{i\geq 1}$ egy megszámlálható fedés aminek nincsen véges részfedése, akkor van olyan x_1, hogy $x_1 \notin U_1$. Legyen U_{x_1} egy olyan U_i, amire $x_1 \in U_i$. Ekkor van olyan x_2, hogy $x_2 \notin U_1 \cup U_2 \cup U_{x_1}$ és legyen U_{x_2} egy olyan U_i, amire $x_2 \in U_i$. Ezt az eljárást folytatva tehát van olyan (x_n) sorozat, hogy $x_n \notin \bigcup_{i=1}^n U_i \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} U_{x_i}$. Ebből az is következik, hogy az $\{x_n\}_{n\geq 1}$ halmaz végtelen. Ekkor minden $x \in X$-hez van olyan U_i, hogy $x \in U_i$, de az (x_n)

sorozat véges sok tagtól eltekintve biztosan nincsen benne U_i-ben. Tehát az $\{x_n\}_{n\geq 1}$ végtelen halmaznak nincsen torlódási pontja.

(3)$\Longrightarrow$(6): Ha $S \subset X$ egy olyan végtelen halmaz, aminek nincsen torlódási pontja, akkor S bármely $\{x_n\}_{n\geq 1}$ megszámlálhatóan végtelen részhalmazának sincsen torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in X$-nek létezik olyan U_x környezete, ami csak véges sok $\{x_n\}_{n\geq 1}$-beli pontot tartalmaz. Legyen $A \subset \{x_n\}_{n\geq 1}$ egy véges részhalmaz. Ekkor ha

$$\mathcal{V}_A = \{U_x : x \in X,\, U_x \text{ környezete } x\text{-nek és } U_x \cap \{x_n\}_{n\geq 1} = A\}\,,$$

akkor a

$$V_A = \bigcup \mathcal{V}_A$$

halmaz nyílt és a

$$\mathcal{V} = \{V_A : A \subset \{x_n\}_{n\geq 1} \text{ egy véges részhalmaz}\}$$

egy megszámlálható halmazrendszer. De a $\mathcal{V}$ fedés is, mert minden $x \in X$ benne van valamilyen V_A-ban. Ugyanakkor $\mathcal{V}$ minden véges részhalmaza csak véges sok pontot tartalmaz $\{x_n\}_{n\geq 1}$-ből, tehát $\mathcal{V}$-nek nincsen véges részfedése.

(7)$\Longrightarrow$(5): Legyen $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ nem üres zárt halmazok sorozata. Ha minden $n \in \mathbb{N}$-re $x_n \in F_n$ tetszőleges pont, akkor az (x_n) sorozatnak létezik konvergens részsorozata, tehát egy (x_{n_k}) részsorozat, ami tart valamilyen $p \in X$-hez. Minden F_i tartalmazza x_{n_k}-t ha k elég nagy, tehát $p \in F_i$, mert F_i zárt. Ebből viszont $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ következik.

Egy M_1 topologikus térben (6)$\Longrightarrow$(7) is teljesül, mert ha $x\colon \mathbb{N} \to X$ egy sorozat, akkor az $x(\mathbb{N})$ véges esetben nyilván (x_n) konvergens, és az $x(\mathbb{N})$ végtelen esetben $x(\mathbb{N})$-nek van valamilyen x_0 torlódási pontja. Ilyenkor (x_n)-nek van konvergens részsorozata, mert ha $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ egy szűkülő környezetbázisa x_0-nak (ami az M_1 tulajdonság miatt létezik), akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $U_n \cap x(\mathbb{N})$ végtelen sok elemet tartalmaz, és így U_1-ből x_1-et, U_2-ből x_2-őt, stb. választva kapunk egy x_0-hoz konvergáló részsorozatot. Egy M_2 topologikus térben pedig a 7.2 állítás miatt (3)$\Longrightarrow$(1) is teljesül. $\square$

Állítás 7.7. *Metrikus térben mindegyik tulajdonság ekvivalens.*

Bizonyítás. Az előzőek alapján elég azt belátni, hogy egy sorozatkompakt metrikus tér M_2, ehhez meg azt, hogy egy sorozatkompakt metrikus tér szeparábilis. Legyen (X, d) egy sorozatkompakt metrikus tér. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-hez létezik olyan véges $A_n \subset X$, hogy minden $x \in X$-re $d(x, a_x) < 1/n$ valamilyen $a_x \in A_n$-el. Ekkor az $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ halmaz sűrű X-ben, amiből már következik az állítás. Tegyük fel, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen véges $A \subset X$-hez létezik olyan $x \in X$, hogy minden $a \in A$-ra $d(x, a) \geq 1/n$. Legyen $x_1 \in X$ tetszőleges, ekkor ezek szerint $A = \{x_1\}$-hez is létezik megfelelő $x_2 \in X$. De ekkor $A = \{x_1, x_2\}$-höz is létezik megfelelő $x_3 \in X$, stb, végül kapunk egy $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot, aminek nincsen konvergens részsorozata, mert bármelyik két tagjának legalább $1/n$ a távolsága. $\square$

Ezekből az is következik, hogy minden kompakt metrikus tér M_2.

Az egyik legfontosabb tétel a valós analízisben az, hogy $\mathbb{R}$-nek egy részhalmaza kompakt akkor és csak akkor, ha korlátos és zárt. Ezt metrikus terekre is lehet általánosítani, de a korlátosságnál egy erősebb tulajdonságra lesz szükség.

Definíció 7.8 (ε-háló és teljesen korlátos tér). Legyen (X,d) egy metrikus tér és $A \subset X$. Legyen $\varepsilon > 0$. Az A halmaz egy *ε-háló*, ha minden $x \in X$-hez létezik olyan $a \in A$, hogy $d(x,a) < \varepsilon$. Egy metrikus tér *teljesen korlátos*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik véges ε-hálója.

Könnyen látható, hogy egy teljesen korlátos (X,d) metrikus tér korlátos is, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $d(x,y) < K$ minden $x,y \in X$-re. Ez fordítva nem igaz, például legyen X az olyan (a_n) valós számsorozatok halmaza, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ számsorozat konvergens. Két ilyen $(a_n),(b_n)$ sorozatra legyen $d((a_n),(b_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)^2}$. Az így kapott (X,d) egy metrikus tér, amiben a 0-val jelölt azonosan nulla sorozat körüli $D = \{x \in X : d(x,0) \leq 1\}$ zárt halmaz nyilván korlátos, de nem teljesen korlátos. Ha D teljesen korlátos lenne, akkor mivel D zárt halmaz is, ezért az alábbi tétel szerint D kompakt kéne legyen, de mivel metrikus térben vagyunk, ez azt is jelentené, hogy D sorozatkompakt. Viszont D-ben van olyan sorozat, aminek nincsen konvergens részsorozata, legyen például (a_n^i) az a sorozat, aminek az i-dik tagja 1, a többi 0, ahol $i = 1,2,\ldots$. Nyilván minden $(a_n^i) \in X$ és az is látszik, hogy bármely két $(a_n^i),(a_n^j)$-re $d((a_n^i),(a_n^j)) = \sqrt{2}$ ha $i \neq j$. Tehát az $(a_n^1),(a_n^2),\ldots$ sorozatnak nincsen konvergens részsorozata.

Definíció 7.9 (Cauchy sorozat és teljes metrikus tér). Legyen (X,d) egy metrikus tér és (a_n) egy X-beli sorozat. Az (a_n) egy *Cauchy sorozat*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ korlát, hogy minden olyan $n,m \in \mathbb{N}$-re amire $n,m > K$, teljesül, hogy $d(a_n,a_m) < \varepsilon$. Egy metrikus tér *teljes*, ha minden Cauchy sorozat konvergens.

Például az előbbi (X,d) metrikus tér teljes. De például $\mathbb{R}^n$ a szokásos Euklideszi metrikával is teljes. A legegyszerűbb példa nem teljes metrikus térre az, ha $\mathbb{R}$-ből elhagyjuk mondjuk a 0-át és a szokásos euklideszi metrikát csak az $\mathbb{R} - \{0\}$ halmazra megszorítva értelmezzük. Ekkor akármilyen pozitív tagú 0-hoz konvergáló számsorozat Cauchy sorozat lesz, de nem lesz konvergens hiszen a 0, ami a határértéke lenne a sorozatnak, nincsen benne ebben a térben.

Állítás 7.10. *Legyen (X,d) egy metrikus tér és $Y \subset X$.*

(1) *Ha az $(Y, d|_{Y\times Y})$ metrikus tér teljes, akkor az Y zárt részhalmaz.*
(2) *Ha Y zárt és (X,d) teljes, akkor $(Y, d|_{Y\times Y})$ teljes.*

Bizonyítás.

(1): Ha $x \in \operatorname{cl} Y$, akkor legyen minden $n \in \mathbb{N}$-re $x_n \in D_{1/n}(x)$, így (x_n) konvergál x-hez. Emiatt (x_n) Cauchy sorozat is, ezért $x \in Y$. Tehát $\operatorname{cl} Y = Y$.

(2): Legyen (y_n) egy Y-beli Cauchy sorozat. Mivel X teljes, létezik (y_n)-nek egy $y \in X$ határértéke. Ekkor y minden környezetében van valamilyen y_n pont, ezért $y \in \operatorname{cl} Y$. De $\operatorname{cl} Y = Y$ miatt $y \in Y$, tehát Y teljes.

□

Tétel 7.11. *Egy metrikus tér kompakt akkor és csak akkor, ha teljes és teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Ha X egy kompakt metrikus tér, akkor az előbbiek szerint teljesen korlátos. Teljes is, mert ha (x_n) egy Cauchy sorozat, akkor van konvergens (x_{n_k}) részsorozata, aminek a határértéke egy $x \in X$, és ez (x_n)-nek is határértéke. Ha pedig (X, d) egy teljes és teljesen korlátos metrikus tér, akkor megmutatjuk, hogy sorozatkompakt is. Legyen (x_n) egy X-beli sorozat, feltehető, hogy az $x(\mathbb{N})$ halmaz végtelen (ha véges, akkor nyilván van konvergens részsorozata). X-ben létezik véges 1-háló, tehát olyan $a_1, \dots, a_l \in X$, hogy

$$D_1(a_1) \cup \cdots \cup D_1(a_s) = X.$$

Ekkor valamelyik $D_1(a_i)$-ben végtelen sok tagja kell legyen az (x_n)-nek, ez megad egy (x_{n_k}) részsorozatot, legyen x_{m_1} ennek az első tagja. Van véges 1/2-háló is, és akkor valamilyen $D_{1/2}(a')$-ben van végtelen sok tagja (x_{n_k})-nak, ez megad egy $(x_{n_{k_l}})$ részsorozatot, legyen x_{m_2} ennek egy olyan tagja, hogy $m_2 > m_1$. Van véges 1/3-háló is, stb., és ezt az eljárást folytatva kapjuk egy $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots$ részsorozatát (x_n)-nek. Ez Cauchy sorozat, mert $d(x_{m_i}, x_{m_j}) < 2/i$, ha $j > i$. Tehát (x_{m_n}) egy konvergens részsorozat. □

Egy következménye az eddigieknek az is, hogy teljes metrikus térben egy részhalmaz kompakt akkor és csak akkor, ha teljesen korlátos és zárt. Mivel $\mathbb{R}$ az Euklideszi metrikával teljes metrikus tér, ezt a következményt tekinthetjük a jól ismert tétel általánosításának is, miszerint $\mathbb{R}$-nek egy részhalmaza kompakt akkor és csak akkor, ha korlátos és zárt.

Egy gyakran használt állítás a következő.

Állítás 7.12. *Ha (Q, d) egy kompakt metrikus tér, X egy topologikus tér, $\mathcal{U}$ egy fedése X-nek és $f\colon Q \to X$ egy folytonos leképezés, akkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden legfeljebb δ átmérőjű Q-beli A halmazra $f(A)$ benne van valamilyen $U \in \mathcal{U}$-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem létezik ilyen δ. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re a $\delta = 1/n$ választással létezik olyan $A_n \subset Q$, aminek az átmérője kisebb, mint $1/n$, de $f(A_n)$ nincsen benne semmilyen $U \in \mathcal{U}$-ban. Legyen $x_n \in A_n$ tetszőleges. Létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata (x_n)-nek, mert Q kompakt, jelölje x az (x_{n_k}) határértékét. Mivel $\mathcal{U}$ fedése X-nek, van olyan $U \in \mathcal{U}$, hogy $x \in f^{-1}(U)$, és van olyan $D_r(x)$ környezete x-nek, hogy $D_r(x) \subset f^{-1}(U)$, mert $f^{-1}(U)$ nyílt. Ha n_k

elég nagy, akkor $1/n_k < r/3$ és $d(x, x_{n_k}) < r/3$ is teljesül, így $A_{n_k} \subset D_r(x)$, ami miatt $f(A_{n_k}) \subset U$, de ez ellentmondás. $\square$

Állítás 7.13. *Néhány fontos elemi tulajdonsága kompakt topologikus tereknek:*

(1) *Egy kompakt topologikus tér zárt részhalmaza kompakt.*
(2) *Egy T_2 topologikus tér kompakt részhalmaza zárt.*
(3) *Ha $f\colon X \to Y$ egy folytonos leképezés és X egy kompakt topologikus tér, akkor $f(X)$ is kompakt.*
(4) *Ha $f\colon X \to Y$ egy injektív folytonos leképezés, X egy kompakt topologikus tér és Y egy T_2 tér, akkor f egy homeomorfizmus X és $f(X)$ között.*
(5) *Egy kompakt T_2 tér T_4 tér is.*
(6) *Véges sok kompakt topologikus tér direkt szorzata is kompakt.*

Bizonyítás.

(1): Ha Y egy zárt részhalmaza egy X kompakt térnek és $\{U_\alpha\}$ egy fedése Y-nak X-beli nyílt halmazokkal, akkor $\{U_\alpha\} \cup \{X - Y\}$ egy fedése X-nek, aminek akkor egy véges részfedése (esetleg $X - Y$ nélkül) az Y-nak is fedése.
(2): Ha $A \subset X$ egy kompakt részhalmaz, akkor tetszőleges rögzített $p \notin A$-ra és minden $a \in A$-ra léteznek olyan U_a és V_p környezetek, hogy $U_a \cap V_p = \emptyset$. Mivel $\bigcup_{a\in A} U_a$ fedi A-t, ezért valamilyen $U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$ is fedi A-t. Ha V_i az U_{a_i}-hez tartozó környezet, akkor $\bigcap_{i=1}^n V_i$ egy olyan környezete p-nek, ami diszjunkt $\bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$-től, tehát A-tól is. Ezekből az is következik, hogy egy kompakt T_2 tér T_3 tér is, mert egy A zárt részhalmaz kompakt is és akkor az előbbiek szerint minden $p \notin A$-hoz léteznek diszjunkt U_A és V_p környezetek.
(3): Ha $\{V_\alpha\}$ egy fedése $f(X)$-nek, akkor $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ egy fedése X-nek, aminek van véges részfedése valamilyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$-el. Ekkor $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ egy véges fedése $f(X)$-nek.
(4): Ekkor $f^{-1}\colon f(X) \to X$ is folytonos, mert ha $A \subset X$ zárt, akkor kompakt is, de akkor $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ is kompakt és akkor $f(A)$ zárt is $f(X)$-ben.
(5): Ha A és B diszjunkt zárt részhalmazok, akkor kompaktak is és a (2)-es szerint minden $b \in B$-hez léteznek U_A és V_b diszjunkt környezetek. Ekkor $\bigcup_{b\in B} V_b$ fedi B-t, ezért valamilyen $V_{b_1}, \ldots, V_{b_n}$ is fedi B-t. Ha $U_{A,i}$ a V_{b_i}-hez tartozó környezet, akkor $\bigcap_{i=1}^n U_{A,i}$ egy olyan környezete A-nak, ami diszjunkt $\bigcup_{i=1}^n V_{b_i}$-től, tehát B-től is.
(6): Legyen X és Y két kompakt topologikus tér. Tegyük először fel, hogy

$$\{U_\alpha \times V_\alpha\}_\alpha$$

alakú a fedése $X \times Y$-nak, ahol az összes U_α és V_α nyílt halmaz. Legyen $x \in X$, ekkor $\{x\} \times Y$ kompakt, ezért létezik

$$U_{x,1} \times V_{x,1}, \ldots, U_{x,n} \times V_{x,n}$$

véges részfedése. Ha $U_x = \bigcap_{i=1}^n U_{x,i}$, akkor $U_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x,i} \times V_{x,i}$. Mivel $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, ezért létezik

$$U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}$$

véges részfedése X-nek. Tehát mindegyik $U_{x_i} \times Y$-t fedi véges sok $U_\alpha \times V_\alpha$, és ezért az egész $X \times Y$-t fedi véges sok $U_\alpha \times V_\alpha$. Ha pedig $X \times Y$ fedése

$$\{W_\alpha\}_\alpha,$$

akkor minden W_α előáll valamilyen $U_\beta \times V_\beta$ alakú halmazok uniójaként. Tehát $X \times Y$-t fedi valamilyen $U_\beta \times V_\beta$ alakú halmazok uniója, és ennek az előzőek szerint van véges részfedése, legyen ez

$$U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n.$$

De mivel minden $U_i \times V_i$-hez van valamilyen W_{α_i}, amire $W_{\alpha_i} \supset U_i \times V_i$, ezért véges sok ilyen W_{α_i} fedi $X \times Y$-t.

$\square$

8. Végtelen tényezős direkt szorzat

A 3.11-es definícióban értelmeztük véges sok topologikus tér direkt szorzatát. Valami hasonló dolgot fogunk végtelen sok topologikus térrel csinálni.

Definíció 8.1 (Direkt szorzat). Legyenek $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ topologikus terek, ahol α végigmegy valamilyen rögzített I halmaz elemein. Legyen

$$X' = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}.$$

Az

$$X = \{f \colon I \to X' : f(\alpha) \in X_\alpha \times \{\alpha\}\}$$

halmazt az X_α halmazok *direkt szorzatának* nevezzük és

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \text{ -val}$$

jelöljük. Tehát az X elemeit egyértelműen meghatározzák az α-dik "koordinátáik", amik mindig X_α-ból (pontosabban $X_\alpha \times \{\alpha\}$-ból) vannak. Definiálunk egy $\mathcal{V}$ topológiát ezen az X halmazon. Ehhez legyenek $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ a "koordinátaleképezések", tehát $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)_1 \in X_\alpha$ minden $f \in X$-re. Ekkor $\mathcal{V}$ előbázisa a

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in I, U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha\}$$

halmazrendszer lesz. Az így kapott $(X, \mathcal{V})$ topologikus teret az $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ topologikus terek *direkt szorzatának* nevezzük.

Hasonlóan a véges direkt szorzathoz a $\pi_\alpha\colon \prod_{\beta\in I} X_\beta \to X_\alpha$ koordináta projekciók is folytonosak.

Állítás 8.2. *Legyen $(Y,\mathcal{V})$ egy topologikus tér. Egy $f\colon Y \to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ leképezés folytonos akkor és csak akkor, ha minden $\alpha \in I$-re a $\pi_\alpha \circ f$ kompozíció folytonos.* □

Ha az I halmaz véges, akkor ez a definíció megegyezik a 3.11-es definícióval. Vagy ha például $I = \mathbb{N}$ és $X_n = [0,1]$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, akkor az X' direkt szorzat megegyezik a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ halmazzal, aminek az elemei az olyan valós számsorozatok, amiknek minden tagja 0 és 1 között van. Ha a [0,1] halmazon a szokásos Euklideszi topológiát tekintjük, akkor direkt szorzatnak kapunk egy $([0,1]^{\mathbb{N}},\mathcal{V})$ topologikus teret. Ez azért egy fontos konstrukció, mert minden T_3 és M_2 topologikus tér altere ennek a $([0,1]^{\mathbb{N}},\mathcal{V})$ térnek, ezt később bizonyítjuk. Ebből az fog következni, hogy minden T_3 és M_2 topologikus tér metrizálható.

Ha I tetszőleges halmaz és mindegyik $X_\alpha = Y$ valamilyen rögzített Y-nal, akkor az $X = Y^I$ direkt szorzat nem más, mint az I-ből Y-ba képező (nem feltétlenül folytonos) függvények halmaza. Egy $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ függvénysorozat konvergál egy $f\colon I \to Y$ függvényhez az $(Y^I,\mathcal{V})$ direkt szorzat topologikus térben akkor és csak akkor, ha a függvénysorozat pontonként konvergál az f-hez.

Tétel 8.3. *Legyen I egy tetszőleges számosságú halmaz. Ha az $(X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ topologikus terek kompaktak, akkor az $(X,\mathcal{V})$ direkt szorzat is kompakt.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy zárt halmazok centrált rendszerének a metszete nem üres. Ehhez felhasználjuk bizonyítás nélkül azt a tételt, ami szerint ha $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ egy centrált halmazrendszer, akkor kibővíthető egy maximális centrált halmazrendszerré, tehát létezik olyan $\mathcal{H}' \subset \mathcal{P}(X)$ centrált halmazrendszer, hogy $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$ és ha $\mathcal{H}'$ valódi részhalmaza valamilyen X-beli halmazrendszernek, akkor az már nem centrált. (Ez a tétel egyébként egyszerű következménye a nevezetes Teichmüller-Tukey lemmának, ami pedig ekvivalens a kiválasztási axiómával.)

Elég azt bizonyítani, hogy ha $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges centrált halmazrendszer, akkor a $\bigcap\{\mathrm{cl}\, A : A \in \mathcal{H}\}$ metszet nem üres. Tehát legyen $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges centrált halmazrendszer és tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ maximális centrált halmazrendszer (ha nem az lenne, akkor kibővítjük maximális centrált halmazrendszerré és arra bizonyítunk, amiből persze szintén következik az állítás).

Mivel $\mathcal{H}$ maximális centrált halmazrendszer, a következő tulajdonságok könnyen látható módon teljesülnek.

(1) Ha $A \in \mathcal{H}$ és $A \subset B$, akkor $B \in \mathcal{H}$.
(2) Ha $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$, akkor $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{H}$.
(3) Ha egy $B \subset X$ halmaz metszi a $\mathcal{H}$ összes elemét, akkor $B \in \mathcal{H}$.

Nyilván minden $\alpha \in I$-re a

$$\{\operatorname{cl} \pi_\alpha(A) : A \in \mathcal{H}\}$$

halmazrendszer X_α-beli zárt halmazok centrált rendszere. Mivel X_α kompakt, ezért létezik valamilyen $x_\alpha \in \bigcap\{\operatorname{cl} \pi_\alpha(A) : A \in \mathcal{H}\}$. Ekkor persze az $x_\alpha \in X_\alpha$ pontok meghatároznak egy $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ elemet, aminek az α-dik koordinátája x_α.

Ha $A \in \mathcal{H}$, akkor mivel $x_\alpha \in \operatorname{cl} \pi_\alpha(A)$, tetszőleges U_α környezetére x_α-nak teljesül, hogy $U_\alpha \cap \pi_\alpha(A) \neq \emptyset$, tehát $A \cap \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset$. Ez minden $A \in \mathcal{H}$-ra igaz, ezért a (3)-as tulajdonság miatt minden $\alpha \in I$-re és x_α-nak tetszőleges U_α környezetére $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{H}$. De ekkor a (2)-es tulajdonság miatt minden véges sok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$-re és $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$-re

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \mathcal{H}.$$

Legyen $V \subset X$ tetszőleges környezete x-nek. Mivel a $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ alakú halmazok, ahol U_α környezete x_α-nak, előbázist alkotnak az $(X, \mathcal{V})$ direkt szorzat topologikus térben, létezik olyan véges sok $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ és minden $1 \leq i \leq n$-re U_{α_i} környezete x_{α_i}-nek, hogy

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset V.$$

De ekkor az (1)-es tulajdonság miatt $V \in \mathcal{H}$.

Azt kaptuk, hogy ha $A \in \mathcal{H}$, akkor minden V környezetére x-nek $V \cap A \neq \emptyset$, hiszen két $\mathcal{H}$-beli halmaz metszete nem üres. Tehát $x \in \operatorname{cl} A$ minden $A \in \mathcal{H}$-ra, ami azt jelenti, hogy a $\bigcap\{\operatorname{cl} A : A \in \mathcal{H}\}$ metszet nem üres. □

Például a $[0,1]^{\mathbb{R}}$ direkt szorzat, ahol $[0,1]$ a szokásos Euklideszi kompakt intervallum, egy kompakt topologikus tér.

9. Lokálisan véges halmazrendszerek

Definíció 9.1 (Fedés finomítása). Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ fedései X-nek. Az $\mathcal{A}$ fedés *finomítása* a $\mathcal{B}$ fedésnek, jelölésben $\mathcal{A} \Subset \mathcal{B}$, ha minden $A \in \mathcal{A}$-hoz létezik olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $A \subset B$.

Állítás 9.2. *Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér és $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ fedései X-nek. Ha $\mathcal{A} \Subset \mathcal{B}$ és $\mathcal{B} \Subset \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{A} \Subset \mathcal{C}$.* □

Definíció 9.3 (Lokálisan véges és diszkrét halmazrendszer). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer *lokálisan véges*, ha minden $x \in X$ pontnak létezik olyan U környezete, ami $\mathcal{A}$-nak legfeljebb csak véges sok tagját metszi. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer *diszkrét*, ha minden $x \in X$ pontnak létezik olyan U környezete, ami $\mathcal{A}$-nak legfeljebb csak egyetlen tagját metszi.

Állítás 9.4. *Ha $\mathcal{A}$ lokálisan véges, akkor*

$$\operatorname{cl} \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A.$$

□

Definíció 9.5 (σ-lokálisan véges és σ-diszkrét halmazrendszer). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer *σ-lokálisan véges*, ha előáll megszámlálható sok lokálisan véges halmazrendszer uniójaként. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer *σ-diszkrét*, ha előáll megszámlálható sok diszkrét halmazrendszer uniójaként.

Tétel 9.6. *Metrikus tér minden fedésének létezik lokálisan véges és σ-diszkrét finomítása.*

Bizonyítás. Legyen (X,d) egy metrikus tér és legyen az $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ halmazrendszer egy fedése az X-nek. Azt is feltehetjük, hogy az S halmaz jólrendezett, tehát

(1) van egy olyan $<$ reláció az S-en, ami irreflexív, tranzitív és bármely két különböző $s_1, s_2 \in S$-re $s_1 < s_2$ vagy $s_2 < s_1$ teljesül,
(2) S bármely nem üres részhalmazának van minimális eleme.

Minden $s \in S$-re és $i \in \mathbb{N}$-re definiáljuk a $V_{s,i}$ nyílt halmazt a következő módon. Először is legyen $V_{s,0} = \emptyset$ minden $s \in S$-re. Tegyük fel, hogy a $V_{s,j}$ halmazokat már definiáltuk minden $s \in S$-re és $j < i$-re. Ekkor legyen

$$W_{s,i} = \{y \in U_s : D_{\frac{3}{2^i}}(y) \subset U_s,\ \text{minden } t < s\text{-re } y \notin U_t,\ \text{és } y \notin \cup_{s\in S, j<i} V_{s,j}\}$$

és

$$V_{s,i} = \bigcup_{y\in W_{s,i}} D_{\frac{1}{2^i}}(y).$$

Ekkor minden $V_{s,i}$ nyílt halmaz. Legyen

$$\mathcal{V} = \{V_{s,i} : s \in S, i \in \mathbb{N}\}.$$

A $\mathcal{V}$ halmazrendszer fedése X-nek, mert ha $p \in X$, akkor a $t = \min\{s : p \in U_s\}$ választással $p \in U_t$ de minden $t' < t$-re $p \notin U_{t'}$, és mivel U_t nyílt, ezért $D_{\frac{3}{2^i}}(p) \subset U_t$ is teljesül valamilyen $i \in \mathbb{N}$-re. Végül ha $p \notin \cup_{s\in S, j<i} V_{s,j}$, akkor definíció szerint $p \in V_{t,i}$, ha pedig $p \in \cup_{s\in S, j<i} V_{s,j}$, akkor nyilván $p \in V_{s,j}$ valamilyen $s \in S$, $j < i$-re.

Könnyen látszik az is, hogy $\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$, hiszen $V_{s,i} \subset U_s$ minden $s \in S$-re és $i \in \mathbb{N}$-re.

Megmutatjuk, hogy a $\mathcal{V}$ halmazrendszer σ-diszkrét. Legyen

$$\mathcal{V}_i = \{V_{s,i} : s \in S\},$$

ekkor

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{V}_n \cup \cdots ,$$

tehát elég azt megmutatni, hogy $\mathcal{V}_i$ diszkrét. Tegyük fel, hogy nem, akkor egy $p \in X$-re és $D_{\frac{1}{2^{i+1}}}(p)$ környezetére $V_{s,i} \cap D_{\frac{1}{2^{i+1}}}(p) \neq \emptyset$ és $V_{t,i} \cap D_{\frac{1}{2^{i+1}}}(p) \neq \emptyset$ teljesül, ahol

$$t < s.$$

Ha

$$y \in V_{s,i} \cap D_{\frac{1}{2^{i+1}}}(p) \quad \text{és} \quad y' \in V_{t,i} \cap D_{\frac{1}{2^{i+1}}}(p), \tag{9.1}$$

akkor a $V_{s,i}$ definíciója miatt $y \in D_{\frac{1}{2^i}}(q)$ valamilyen $q \in W_{s,i}$-re, és ugyanígy $y' \in D_{\frac{1}{2^i}}(q')$ valamilyen $q' \in W_{t,i}$-re. (Például $D_{\frac{3}{2^i}}(q') \subset U_t$ is teljesül.)

A (9.1)-ből $d(y, y') < 1/2^i$ következik, abból meg $d(y, q) < 1/2^i$ és $d(y', q') < 1/2^i$ miatt $d(q, q') < 3/2^i$. De akkor $D_{\frac{3}{2^i}}(q') \subset U_t$ miatt nem csak $q' \in U_t$, hanem $q \in U_t$ is igaz lenne, ami $W_{s,i}$ definíciója miatt nem lehet. Tehát a $\mathcal{V}$ halmazrendszer σ-diszkrét.

Még azt kell bebizonyítani, hogy a $\mathcal{V}$ lokálisan véges. Legyen $p \in X$, ekkor létezik olyan $t \in S$ és $1 \leq j \in \mathbb{N}$, hogy $p \in V_{t,j}$. Mivel $V_{t,j}$ nyílt, ezért létezik olyan $1 \leq k \in \mathbb{N}$, hogy $D_{\frac{1}{2^k}}(p) \subset V_{t,j}$. Elég azt megmutatni, hogy

$$D_{\frac{1}{2^{k+j}}}(p) \cap \bigcup_{i \geq k+j} \mathcal{V}_i = \emptyset,$$

mert ekkor mivel a $\mathcal{V}_i$ halmazrendszerek diszkrétek, a p-nek valamilyen kicsi sugarú környezete csak véges sok $\mathcal{V}$-beli halmazba metsz bele.

Ha $q \in \bigcup_{i \geq k+j} \mathcal{V}_i$, akkor $q \in \mathcal{V}_i$ valamilyen $i \geq k+j$-re, ezért

$$q \in D_{\frac{1}{2^i}}(y) \tag{9.2}$$

valamilyen $i \geq k+j$-re és $y \in W_{s,i}$-re, ahol $s \in S$. De ekkor $W_{s,i}$ definíciója miatt $y \notin V_{t,j}$, mert $j < i$. Ebből az következik, hogy $d(p, y) \geq 1/2^k$, mert $D_{\frac{1}{2^k}}(p) \subset V_{t,j}$ teljesült. Mivel $i \geq k+1$, (9.2) miatt az is igaz, hogy $d(q, y) \leq 1/2^{k+1}$. Tehát $d(p, q) \geq 1/2^{k+1}$ és ezért

$$q \notin D_{\frac{1}{2^{k+j}}}(p).$$

Ezzel azt is megmutattuk, hogy $\mathcal{V}$ lokálisan véges. □

Állítás 9.7. *Ha egy T_3 topologikus térnek létezik σ-lokálisan véges bázisa, akkor a tér T_4.*

Bizonyítás. Legyen
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n \cup \cdots$$
egy σ-lokálisan véges bázis, ahol a $\mathcal{B}_n$ halmazrendszerek lokálisan végesek.

Tegyük fel, hogy M_1 és M_2 két diszjunkt zárt részhalmaza X-nek, azt kell megmutatni, hogy léteznek olyan U_{M_1} és U_{M_2} környezeteik, hogy $U_{M_1} \cap U_{M_2} = \emptyset$. Tekintsük a
$$\mathcal{V}_n^1 = \{V \in \mathcal{B}_n : \operatorname{cl} V \cap M_2 = \emptyset\}$$
és
$$\mathcal{V}_n^2 = \{V \in \mathcal{B}_n : \operatorname{cl} V \cap M_1 = \emptyset\}$$
halmazrendszereket. Ekkor $j = 1, 2$-re
$$\operatorname{cl} \bigcup \mathcal{V}_n^j = \bigcup \{\operatorname{cl} V : V \in \mathcal{V}_n^j\},$$
mert $\mathcal{B}_n$ és így $\mathcal{V}_n^j$ is lokálisan végesek. Nyilván
$$\left(\operatorname{cl} \bigcup \mathcal{V}_n^1\right) \cap M_2 = \emptyset \quad \text{és} \quad \left(\operatorname{cl} \bigcup \mathcal{V}_n^2\right) \cap M_1 = \emptyset$$
minden $n \in \mathbb{N}$-re. Vezessük be a
$$G_n^1 = \bigcup \mathcal{V}_n^1 \quad \text{és} \quad G_n^2 = \bigcup \mathcal{V}_n^2$$
jelöléseket. Megmutatjuk, hogy $j = 1, 2$-re $M_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^j$. Legyen $y \in X - M_2$. Mivel az X topologikus tér T_3, ezért létezik olyan $V \in \mathcal{B}$ környezete y-nak, hogy $\operatorname{cl} V \subset X - M_2$, tehát $\operatorname{cl} V \cap M_2 = \emptyset$. De akkor $V \in \mathcal{V}_n^1$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re és így $y \in \bigcup \mathcal{V}_n^1 = G_n^1$. Tehát $X - M_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^1$. (Az előbbiekből persze $X - M_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^1$ is következik.) Hasonlóan kapjuk, hogy $M_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^2$.

Már csak az a probléma, hogy a $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^1$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^2$ nyílt halmazok nem feltétlenül diszjunktak.

Legyen
$$H_n^1 = G_n^1 - \left(\operatorname{cl} G_1^2 \cup \cdots \cup \operatorname{cl} G_n^2\right) \quad \text{és} \quad H_n^2 = G_n^2 - \left(\operatorname{cl} G_1^1 \cup \cdots \cup \operatorname{cl} G_n^1\right).$$
Ezek szerint $j = 1, 2$-re H_n^1 és H_n^2 nyílt halmazok és így
$$H^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^1 \quad \text{és} \quad H^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^2$$
is nyílt halmazok. Könnyen látszik, hogy
$$M_1 \subset H^1 \quad \text{és} \quad M_2 \subset H^2.$$
Végül
$$H^1 \cap H^2 = \emptyset,$$
ez egyszerűen abból következik, hogy $H_n^1 \cap H_m^2 = \emptyset$ minden $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$-re (és akkor minden $m \geq n$-re is a szimmetria miatt), mert $H_m^2 \subset G_m^2$ és $H_n^1 \cap G_m^2 = \emptyset$ minden $m \leq n$-re. $\square$

10. Metrizációs tételek

Lemma 10.1. *Legyen* $(X,\mathcal{U})$ *egy normális topologikus tér és* $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$, *két diszjunkt zárt halmaz. Ekkor létezik olyan* $f\colon X \to [0,1]$ *folytonos leképezés, amire* $f|_A = 0$ *és* $f|_B = 1$.

Bizonyítás. Mivel $(X,\mathcal{U})$ normális, ezért létezik A-nak olyan U_A környezete, hogy

$$A \subset U_A \subset \operatorname{cl} U_A \subset X - B.$$

Jelöljük ezt az U_A nyílt halmazt F_0-val és az $X - B$ nyílt halmazt meg F_1-el. Ekkor persze

$$\operatorname{cl} F_0 \subset F_1.$$

Megint mivel $(X,\mathcal{U})$ normális topologikus tér, létezik $\operatorname{cl} F_0$-nak olyan $F_{\frac{1}{2}}$ környezete, hogy

$$\operatorname{cl} F_0 \subset F_{\frac{1}{2}} \subset \operatorname{cl} F_{\frac{1}{2}} \subset F_1.$$

Ugyanígy létezik olyan $F_{\frac{1}{4}}$ és $F_{\frac{3}{4}}$ nyílt halmaz, hogy

$$\operatorname{cl} F_0 \subset F_{\frac{1}{4}} \subset \operatorname{cl} F_{\frac{1}{4}} \subset F_{\frac{1}{2}}$$

és

$$\operatorname{cl} F_{\frac{1}{2}} \subset F_{\frac{3}{4}} \subset \operatorname{cl} F_{\frac{3}{4}} \subset F_1.$$

Ezt az eljárást folytatva minden $t, t' \in [0,1]$, $t = \frac{n}{2^k}$, $t' = \frac{m}{2^l}$ alakú számhoz találunk olyan F_t és $F_{t'}$ nyílt halmazt, hogy ha $t < t'$, akkor $\operatorname{cl} F_t \subset F_{t'}$. Az egyszerűség kedvéért definiáljuk minden $t > 1$-re $F_t = X$-et.

Legyen

$$f(x) = \inf\{t : x \in F_t\}.$$

Ekkor f egy X-en értelmezett $[0,1]$-be képező függvény. A következőkben megmutatjuk, hogy f folytonos. Elég azt bebizonyítani, hogy minden $s \in \mathbb{R}$-re

$$f^{-1}((-\infty, s))$$

nyílt halmaz és

$$f^{-1}((-\infty, s])$$

zárt halmaz, mert a szokásos $\mathbb{R}$-en lévő Euklideszi topológiában a nyílt félegyenesek előbázist alkotnak és $f^{-1}((-\infty, s])$ pontosan akkor zárt ha $f^{-1}((s, \infty))$ nyílt.

Először megmutatjuk, hogy minden $s \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}((-\infty, s))$ nyílt. Az, hogy $x \in f^{-1}((-\infty, s))$, az f definíciója miatt ekvivalens azzal, hogy $\inf\{t : x \in F_t\} < s$, az pedig azzal, hogy létezik olyan $t_0 < s$, hogy $x \in F_{t_0}$. De ez pont azt jelenti, hogy $x \in \bigcup_{r<s} F_r$, ezért

$$f^{-1}((-\infty, s)) = \bigcup_{r<s} F_r.$$

Mivel $\bigcup_{r<s} F_r$ nyílt halmaz, ezért $f^{-1}((-\infty, s))$ is nyílt.

Most megmutatjuk, hogy minden $s \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}((-\infty, s])$ zárt halmaz. Az F_t halmazok segítségével azt fogjuk megmutatni, hogy

$$f^{-1}((-\infty, s]) = \bigcap_{r>s} \operatorname{cl} F_r,$$

de ehhez először csak azt, hogy

$$f^{-1}((-\infty, s]) = \bigcap_{r>s} F_r.$$

Az, hogy $x \notin f^{-1}((-\infty, s])$, avval ekvivalens, hogy $\inf\{t : x \in F_t\} > s$, ami meg azzal, hogy létezik olyan $t_0 > s$, hogy $x \notin F_{t_0}$. Ez pont azt jelenti, hogy $x \notin \bigcap_{r>s} \operatorname{cl} F_r$, tehát tényleg $f^{-1}((-\infty, s]) = \bigcap_{r>s} F_r$.

Ezek után elég azt megmutatni, hogy

$$\bigcap_{r>s} \operatorname{cl} F_r = \bigcap_{r>s} F_r.$$

Az nyilván teljesül, hogy $\bigcap_{r>s} F_r \subset \bigcap_{r>s} \operatorname{cl} F_r$. Az ellenkező irányú tartalmazás bizonyításához tegyük fel, hogy van olyan $x \in \bigcap_{r>s} \operatorname{cl} F_r$, hogy $x \notin \bigcap_{r>s} F_r$. Tehát minden $r > s$-re $x \in \operatorname{cl} F_r$, de van olyan $r_0 > s$, hogy $x \notin F_{r_0}$. Ez ellentmondás, mert ha $s < r_1 < r_0$ valamilyen $\frac{n}{2^k}$ alakú szám, akkor $x \in \operatorname{cl} F_{r_1} \subset F_{r_0}$ miatt $x \in F_{r_0}$ is teljesülne.

Ezért $\bigcap_{r>s} \operatorname{cl} F_r = \bigcap_{r>s} F_r$, amiből már következik, hogy $f^{-1}((-\infty, s])$ zárt, és így $f \colon X \to [0,1]$ folytonos. Az is könnyen látható, hogy $f|_A = 0$ és $f|_B = 1$. $\square$

Ezt a következő állítások bizonyításában használjuk.

Tétel 10.2. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy normális topologikus tér és $A \subset X$ egy zárt részhalmaz. Legyen $f \colon A \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ekkor létezik kiterjesztése f-nek X-re, tehát létezik olyan $g \colon X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amire $g|_A = f$.* $\square$

Tétel 10.3. *Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy T_3 és M_2 topologikus tér. Ekkor $(X,\mathcal{U})$ metrizálható.*

Bizonyítás. Az 4.14 állítás miatt feltehetjük, hogy az $(X,\mathcal{U})$ tér T_4. Először megmutatjuk, hogy létezik X-nek olyan folytonos és injektív φ leképezése a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ topologikus térbe (ahol $[0,1]$-en a szokásos Euklideszi topológiát tekintjük, a $[0,1]^{\mathbb{N}}$-en pedig a direkt szorzat topológiát), hogy φ egy homeomorfizmus $(X,\mathcal{U})$ és $[0,1]^{\mathbb{N}}$-nek a $\varphi(X)$ altere között (más szóval az $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér *beágyazható* a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ topologikus térbe). Ezután megmutatjuk, hogy a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ topologikus tér metrizálható, és ezekből már rögtön következik, hogy mivel a $\varphi(X)$ altér is metrizálható, ezért az $(X,\mathcal{U})$ is metrizálható.

Legyen Σ az $(X,\mathcal{U})$ egy megszámlálható bázisa és tekintsük az

$$A = \{(U,V) : U, V \in \Sigma \text{ és } \operatorname{cl} U \subset V\}$$

szintén legfeljebb megszámlálható halmazt. Könnyen látható, hogy $A \neq \emptyset$, és a továbbiakban tegyük fel, hogy A-nak végtelen sok eleme van, legyen $i\colon \mathbb{N} \to A$ egy bijekció. (A véges eset hasonlóan bizonyítható, akkor az $i\colon \{1, \dots, |A|\} \to A$ bijekciót nézzük.)

Tekintsük az összes $(U, V) \in A$ párt. Ha $(U, V) \in A$ és $V = X$, akkor legyen az $f_{(U,V)}\colon X \to [0,1]$ függvény az azonosan nulla függvény. Ha pedig $V \neq X$, akkor mivel az $(X, \mathcal{U})$ normális, ezért (U, V)-hez létezik olyan

$$f_{(U,V)}\colon X \to [0,1]$$

folytonos függvény, hogy $f_{(U,V)}|_{\operatorname{cl} U} = 0$ és $f_{(U,V)}|_{X-V} = 1$.

Definiáljuk a $\varphi\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ leképezést úgy, hogy

$$\varphi(x) = \big(f_{i(1)}(x), f_{i(2)}(x), \dots, f_{i(n)}(x), \dots\big)\,.$$

Ekkor φ folytonos, mert minden koordináta függvénye folytonos.

A φ leképezés injektív is, mert ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor a T_3 tulajdonság miatt van olyan $V \in \Sigma$ környezete x-nek, hogy $y \notin V$, és szintén a T_3 tulajdonság miatt van olyan $U \in \Sigma$ is, hogy $x \in U \subset \operatorname{cl} U \subset V$. De ekkor $f_{(U,V)}$ egy olyan koordináta függvénye φ-nek, hogy $f_{(U,V)}(x) = 0$ és $f_{(U,V)}(y) = 1$ és így $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Már csak azt kell megmutatni, hogy $\varphi^{-1}\colon \varphi(X) \to X$ folytonos, tehát ha $G \subset X$ nyílt halmaz, akkor $\varphi(G)$ is nyílt a $\varphi(X)$ altérben. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $\varphi(g)$ a $\varphi(G)$-nek egy tetszőleges pontja (ahol $g \in G$), akkor a $\varphi(g)$ belső pontja $\varphi(G)$-nek a $\varphi(X)$ altérben. Ebből az fog következni, hogy $\varphi(G)$ nyílt halmaz a $\varphi(X)$ altérben.

Ha $g \in G$, ahol $G \subset X$ egy nyílt halmaz, akkor léteznek olyan $U, V \in \Sigma$, hogy $g \in U \subset \operatorname{cl} U \subset V \subset G$. Ha $(U, V) = i(n)$, akkor tekintsük a $p_{i(n)}\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ projekciót, ekkor az $f_{i(n)}$ koordináta függvény előáll $p_{i(n)} \circ \varphi$ alakban.

A

$$W = p_{i(n)}^{-1}([0,1)) \cap \varphi(X)$$

nyílt halmaz $\varphi(X)$-ben, tartalmazza $\varphi(g)$-t, mert $p_{i(n)}(\varphi(g)) = f_{i(n)}(g) \in \operatorname{cl} U$ és így $p_{i(n)}(\varphi(g)) = 0 < 1$, és $W \subset \varphi(G)$ is teljesül a következők miatt. Valamilyen $w \in W$ pontosan akkor, ha $w = \varphi(z)$ valamilyen $z \in X$-re és $f_{i(n)}(z) < 1$. De egy ilyen z benne kell hogy legyen G-ben is, mert ha $z \in X - G$, akkor $z \notin V$ és így $f_{i(n)}(z) = 1$ lenne. Tehát ha $w = \varphi(z) \in W$, akkor $z \in G$ és ezért $w \in \varphi(G)$. Ezzel megmutattuk, hogy $W \subset \varphi(G)$, amiből következik, hogy $\varphi(g)$ belső pontja $\varphi(G)$-nek a $\varphi(X)$ altérben.

Eddig azt kaptuk, hogy a

$$\varphi\colon X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$$

leképezés egy homeomorfizmus X és a $\varphi(X)$ altér között.

Végül azt kell bebizonyítani, hogy a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ tér metrizálható.

Definiáljuk a

$$d\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \times [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,\infty)$$

leképezést úgy, hogy tetszőleges $a = (a_1, a_2, \ldots)$ és $b = (b_1, b_2, \ldots)$ esetén

$$d(a,b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k}.$$

Ekkor d nyilván egy metrika $[0,1]^{\mathbb{N}}$-en. Ahhoz, hogy d a szorzat topológiát indukálja, amit $\mathcal{V}$-vel jelölünk, két dolgot elég megmutatni.

(1) Ha $D_\varepsilon(a)$ egy $\varepsilon > 0$ sugarú környezete $a \in [0,1]^{\mathbb{N}}$-nek, akkor létezik olyan $V_a \in \mathcal{V}$ környezete a-nak, hogy $V_a \subset D_\varepsilon(a)$.
(2) Ha $V_a \in \mathcal{V}$ egy környezete $a \in [0,1]^{\mathbb{N}}$-nek, akkor létezik olyan $D_\varepsilon(a)$ $\varepsilon > 0$ sugarú környezete a-nak, hogy $D_\varepsilon(a) \subset V_a$.

Először nézzük az (1)-est. Egy $D_\varepsilon(a)$ környezet megegyezik az

$$\{y \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - y_k|/2^k < \varepsilon\}$$

halmazzal. Ha $n \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $1/2^n < \varepsilon/2$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - y_k|/2^k = \sum_{k=1}^{n} |a_k - y_k|/2^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k - y_k|/2^k < \sum_{k=1}^{n} |a_k - y_k|/2^k + 1/2^n < \sum_{k=1}^{n} |a_k - y_k|/2^k + \varepsilon/2,$$

és ezek szerint még ha minden $1 \le k \le n$-re $\varepsilon_k < \frac{2^k \varepsilon}{2n}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - y_k|/2^k < \varepsilon$$

is teljesül ha $(y_1, y_2, \ldots)$ olyan, hogy minden $1 \le k \le n$-re $|a_k - y_k| < \varepsilon_k$. Tehát ha

$$V_a = D_{\varepsilon_1}(a_1) \times D_{\varepsilon_2}(a_2) \times \cdots \times D_{\varepsilon_n}(a_n) \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots,$$

akkor $V_a \subset D_\varepsilon(a)$.

A (2)-eshez először jegyezzük meg, hogy minden $V_a \in \mathcal{V}$ környezet tartalmaz valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re és $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$-ra egy

$$D_{\varepsilon_1}(a_1) \times D_{\varepsilon_2}(a_2) \times \cdots \times D_{\varepsilon_n}(a_n) \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots$$

alakú környezetet, mert az ilyen alakú környezetek előbázist alkotnak a szorzat topológiában. Ha $\varepsilon > 0$ olyan, hogy minden $1 \le i \le n$-re $2^i \varepsilon < \varepsilon_i$, akkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - y_k|/2^k < \varepsilon$$

esetén $|a_i - y_i| < 2^i\varepsilon < \varepsilon_i$ minden $1 \leq i \leq n$-re, így minden olyan $y \in [0,1]^{\mathbb{N}}$-re, amire $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - y_k|/2^k < \varepsilon$ az is teljesül, hogy $y \in V_a$. Tehát $D_\varepsilon(a) \subset V_a$. □

Az előző állítás általánosítása a következő, ami szükséges és elégséges feltételt ad egy topologikus tér metrizálhatóságára.

Tétel 10.4. *Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér metrizálható akkor és csak akkor, ha T_3 és létezik σ-lokálisan véges bázisa.*

BIZONYÍTÁS. Először megmutatjuk, hogy ha $(X,\mathcal{U})$ metrizálható, akkor T_3 és létezik σ-lokálisan véges bázisa. Ha az $(X,\mathcal{U})$ topologikus teret a d metrika indukálja, akkor nyilván az $(X,\mathcal{U})$ tér T_3, hiszen minden metrikus tér T_4, és a 9.6-os állítás felhasználásával könnyen kapunk egy σ-diszkrét bázist (ami persze σ-lokálisan véges is) a következők miatt.

Minden $n \in \mathbb{N}$-re a

$$\mathcal{W}_n = \{D_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$$

halmazrendszer egy fedése X-nek, aminek van valamilyen $\mathcal{V}_n \Subset \mathcal{W}_n$ lokálisan véges és σ-diszkrét finomítása. Tekintsük az

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$$

halmazrendszert. Ez σ-diszkrét, mert megszámlálható sok σ-diszkrét halmazrendszer uniója. És bázis is, mert ha $D_\varepsilon(x)$ egy $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt környezete valamilyen $x \in X$ pontnak, akkor ha $1/n < \varepsilon/2$, akkor mivel $\mathcal{V}_n$ fedés és finomítása $\mathcal{W}_n$-nek, van olyan $V \in \mathcal{V}_n$, hogy $x \in V$ és $V \subset D_{\frac{1}{n}}(y)$ valamilyen $y \in X$-re, de ebből az következik, hogy $d(x,y) < 1/n$ és akkor $D_{\frac{1}{n}}(y) \subset D_\varepsilon(x)$-el együtt $V \subset D_\varepsilon(x)$ is teljesül. Tehát minden $D_\varepsilon(x)$ környezetben van valamilyen $V \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ környezete is x-nek.

Most megmutatjuk, hogy ha $(X,\mathcal{U})$ egy T_3 tér és létezik σ-lokálisan véges bázisa, akkor metrizálható. A 9.7 állítás alapján $(X,\mathcal{U})$ egy T_4 tér. Legyen

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n \cup \cdots$$

egy σ-lokálisan véges bázis, ahol $\mathcal{B}_i$ lokálisan végesek. Nyilván a $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer

$$\mathcal{B} = \{U_s : s \in S\}$$

alakban is előáll. Tetszőleges rögzített $i,j \in \mathbb{N}$-re és $s \in S$-re $U_s \in \mathcal{B}_i$ esetén tekintsük az

$$\{U' \in \mathcal{B}_j : \operatorname{cl} U' \subset U_s\}$$

halmazrendszereket és az

$$M_{i,j,s} = \operatorname{cl} \bigcup \{U' \in \mathcal{B}_j : \operatorname{cl} U' \subset U_s\}$$

zárt részhalmazait X-nek. Mivel $\mathcal{B}_j$ lokálisan véges, ezért

$$M_{i,j,s} = \bigcup \{\operatorname{cl} U' : U' \in \mathcal{B}_j \text{ és } \operatorname{cl} U' \subset U_s\}$$

is teljesül, amiből rögtön következik, hogy

$$M_{i,j,s} \subset U_s.$$

Ha $M_{i,j,s} = \emptyset$, akkor legyen az $f_{i,j,s}\colon X \to [0,1]$ függvény az azonosan nulla függvény. Ha pedig $U_s = X$ (ebből következik, hogy $M_{i,j,s} \neq \emptyset$), akkor legyen az $f_{i,j,s}\colon X \to [0,1]$ függvény az azonosan 1 függvény. Ha $M_{i,j,s} \neq \emptyset$ és $U_s \neq X$, akkor létezik olyan

$$f_{i,j,s}\colon X \to [0,1]$$

folytonos függvény, hogy $f_{i,j,s}|_{M_{i,j,s}} = 1$ és $f_{i,j,s}|_{X-U_s} = 0$.

Legyen

$$r_{i,j,s}(x,y) = |f_{i,j,s}(x) - f_{i,j,s}(y)|,$$

tehát $r_{i,j,s}\colon X \times X \to [0,\infty)$ olyan függvények, hogy

(1) ha $x = y$, akkor $r_{i,j,s}(x,y) = 0$,
(2) $r_{i,j,s}(x,y) = r_{i,j,s}(y,x)$ minden $x, y \in X$-re és
(3) minden $x, y, z \in X$-re $r_{i,j,s}(x,y) \leq r_{i,j,s}(x,z) + r_{i,j,s}(z,y)$.

Legyen tetszőleges rögzített $i, j \in \mathbb{N}$-re és tetszőleges $x, y \in X$-re

$$r_{i,j}(x,y) = \min\{1, \sum_{U_s \in \mathcal{B}_i} r_{i,j,s}(x,y)\}.$$

Fontos megjegyezni, hogy a formulában szereplő szumma azért értelmes, mert $\mathcal{B}_i$ lokálisan véges, ezért x-nek és y-nak is van olyan környezete, ami csak véges sok $\mathcal{B}_i$-beli U_s halmazba metsz bele és ezért $f_{i,j,s}(x)$-nek és $f_{i,j,s}(y)$-nak így $r_{i,j,s}(x,y)$-nak is csak arra a véges sok s-re van esélye nem nullának lenni.

Tehát $r_{i,j}\colon X \times X \to [0,1]$ is olyan függvények, hogy

(1) ha $x = y$, akkor $r_{i,j}(x,y) = 0$,
(2) $r_{i,j}(x,y) = r_{i,j}(y,x)$ minden $x, y \in X$-re és
(3) minden $x, y, z \in X$-re $r_{i,j}(x,y) \leq r_{i,j}(x,z) + r_{i,j}(z,y)$,

amit úgy is fogalmazhatunk, hogy $r_{i,j}$ egy korlátos félmetrika.

Az összes itt szereplő (i,j) pár $\mathcal{N} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmaza megszámlálható, legyen $\nu\colon \mathcal{N} \to \mathbb{N}$ egy bijekció. Ekkor az

$$r(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}} r_{i,j}(x,y)/2^{\nu(i,j)}$$

is egy $r\colon X \times X \to [0,\infty)$ félmetrika.

Megmutatjuk, hogy r metrika is, tehát ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor $r(x,y) > 0$. Ha $x, y \in X$ és $x \neq y$, akkor van olyan $U_s \in \mathcal{B}$, hogy $x \in U_s$, de $y \notin U_s$. Ekkor persze van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy $U_s \in \mathcal{B}_i$ és van olyan $U' \in \mathcal{B}_j$ valamilyen $j \in \mathcal{B}_j$-re, hogy $x \in U' \subset \mathrm{cl}\, U' \subset U_s$. Emiatt $\mathrm{cl}\, U' \subset M_{i,j,s}$ és így $f_{i,j,s}(x) = 1$, $f_{i,j,s}(y) = 0$ és $r_{i,j,s}(x,y) = 1$, tehát $r_{i,j}(x,y) = 1$ és így $r(x,y) \geq 1/2^{\nu(i,j)}$.

Így kaptunk egy r metrikát az X-en. Már csak azt kell megmutatni, hogy az r az $\mathcal{U}$ topológiát indukálja.

Ha $x \in X$, akkor van olyan $U_s \in \mathcal{B}_i$ és $U' \in \mathcal{B}_j$, hogy $x \in U' \subset \mathrm{cl}\, U' \subset U_s$. Ekkor

$$D_{1/2^{\nu(i,j)}}(x) \subset U_s,$$

mert ha $r(x,y) < 1/2^{\nu(i,j)}$ valamilyen $y \in X$-re, akkor $r_{i,j}(x,y) < 1$, $r_{i,j,s}(x,y) < 1$, tehát $|f_{i,j,s}(x) - f_{i,j,s}(y)| < 1$, és akkor mivel $x \in \mathrm{cl}\, U' \subset M_{i,j,s}$ és így $f_{i,j,s}(x) = 1$, ezért $f_{i,j,s}(y) > 0$ kell legyen, de akkor $y \in U_s$ is teljesül.

Ha pedig $x \in X$ és tekintjük a $D_\varepsilon(x)$ környezetet valamilyen $\varepsilon > 0$-ra, akkor létezik olyan W környezete az x-nek, hogy $W \subset D_\varepsilon(x)$ a következők miatt.

Legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon/2$. Legyen (i,j) olyan tetszőleges rögzített pár, hogy $\nu(i,j) \leq n_0$. Ekkor mivel $\mathcal{B}_i$ lokálisan véges, létezik olyan $V_{i,j}$ környezete x-nek, ami csak véges sok $\mathcal{B}_i$-beli halmazt metsz, tegyük fel, hogy ezek az

$$U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_k}$$

halmazok. Az f_{i,j,s_l} függvények folytonosak minden $1 \leq l \leq k$-ra, ezért van olyan $V'_{i,j} \subset V_{i,j}$ környezete az x-nek, hogy minden $y \in V'_{i,j}$-re és $1 \leq l \leq k$-ra

$$r_{i,j,s_l}(x,y) = |f_{i,j,s_l}(x) - f_{i,j,s_l}(y)| < \varepsilon/2k.$$

Ha pedig $U_s \in \mathcal{B}_i$, de $s \neq s_1, \ldots, s_k$, akkor $V'_{i,j} \cap U_s = \emptyset$ és ezért minden $x, y \in V'_{i,j}$-re $f_{i,j,s}(x) = f_{i,j,s}(y) = 0$. Ezért minden $y \in V'_{i,j}$-re $r_{i,j}(x,y) < \varepsilon/2$.

Legyen

$$W = \bigcap_{\nu(i,j) \leq n_0} V'_{i,j}.$$

Ekkor W is környezete x-nek. Minden $y \in W$-re és minden olyan (i,j)-re, amire $\nu(i,j) \leq n_0$ az is teljesül, hogy $r_{i,j}(x,y) < \varepsilon/2$. Tehát

$$r(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}} r_{i,j}(x,y)/2^{\nu(i,j)} = \sum_{\nu(i,j) \leq n_0} r_{i,j}(x,y)/2^{\nu(i,j)} + \sum_{\nu(i,j) > n_0} r_{i,j}(x,y)/2^{\nu(i,j)} <$$
$$\sum_{\nu(i,j) \leq n_0} r_{i,j}(x,y)/2^{\nu(i,j)} + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

A bizonyításból egy másik átfogalmazása is rögtön következik a tételnek.

Tétel 10.5. *Egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér metrizálható akkor és csak akkor, ha T_3 és létezik σ-diszkrét bázisa.* □

11. Parakompaktság

Definíció 11.1 (Parakompakt tér). Egy $(X,\mathcal{U})$ topologikus tér *parakompakt*, ha T_2 és minden fedésének létezik lokálisan véges finomítása. Egy $Y \subset X$ részhalmaz parakompakt, ha az $(Y,\mathcal{U}|_Y)$ altér parakompakt.

Tehát egy metrikus tér parakompakt, de például egy kompakt topologikus tér is parakompakt.

Állítás 11.2. *A következők teljesülnek.*

(1) *Parakompakt topologikus tér zárt részhalmaza parakompakt.*
(2) *Minden parakompakt topologikus tér T_4.*
(3) *Kompakt T_2 és parakompakt topologikus terek direkt szorzata parakompakt.*
(4) *Minden T_3 Lindelöf tér parakompakt.* □

Definíció 11.3 (Egységosztás). Legyen $(X,\mathcal{U})$ egy topologikus tér és $f_\alpha\colon X \to [0,1]$ folytonos függvények, ahol α végigmegy egy rögzített A halmaz elemein. Az

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha\colon X \to [0,1] : \alpha \in A\}$$

egy *egységosztás* X-en, ha minden $x \in X$-re $f_\alpha(x) = 0$ legfeljebb csak megszámlálható sok α kivételével és minden $x \in X$-re

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1.$$

Legyen

$$\mathcal{V}_\mathcal{F} = \{f_\alpha^{-1}((0,1]) : \alpha \in A\}.$$

Ha $\mathcal{F}$ egy egységosztás, akkor $\mathcal{V}_\mathcal{F}$ egy nyílt fedése X-nek. Az $\mathcal{F}$ egységosztás *lokálisan véges*, ha $\mathcal{V}_\mathcal{F}$ lokálisan véges. Egy $\mathcal{F}$ egységosztás az X egy $\mathcal{W}$ fedésének *alárendelt*, ha $\mathcal{V}_\mathcal{F}$ finomítása $\mathcal{W}$-nek.

Tétel 11.4. *Egy parakompakt topologikus tér minden $\mathcal{W}$ fedéséhez létezik $\mathcal{W}$-nek alárendelt lokálisan véges egységosztás X-en.*

Bizonyítás. Legyen $\{U_s : s \in S\}$ olyan lokálisan véges fedése X-nek, ami $\mathcal{W}$-nek finomítása. Ha $y \in X$ tetszőleges pont, akkor legyen $s(y)$ egy olyan eleme S-nek, amire igaz az, hogy $y \in U_{s(y)}$. Ekkor mivel az X tér T_3, létezik olyan M_y nyílt környezete y-nak, hogy

$$M_y \subset \operatorname{cl} M_y \subset U_{s(y)}.$$

Legyen $\mathcal{M} = \{M_y : y \in X\}$. Ekkor $\mathcal{M}$ egy fedés, ami nem biztos, hogy lokálisan véges, hiszen ugyanabban az U_s-ben lehet több különböző M_y is. De $\mathcal{M}$-nek létezik lokálisan véges finomítása, jelölje ezt $\mathcal{N}$. Minden $s \in S$-re legyen

$$N_s = \bigcup\{N \in \mathcal{N} : \operatorname{cl} N \subset U_s\}.$$

Ekkor $\operatorname{cl} N_s \subset U_s$ is teljesül, mert $\mathcal{N}$ bármely részhalmaza is lokálisan véges és így $\mathcal{N}$-beli halmazok uniójának lezárása a lezárások uniója. Mindebből az is következik, hogy az

$$\{N_s : s \in S\}$$

halmazrendszer egy fedése X-nek, mert ha $x \in X$, akkor van olyan $N \in \mathcal{N}$, hogy $x \in N \subset M_y$ valamilyen $y \in X$-re, és még

$$\operatorname{cl} M_y \subset U_{s(y)}$$

is teljesül. De akkor $\operatorname{cl} N \subset U_{s(y)}$ és ezért $N \subset N_{s(y)}$, tehát $x \in N_{s(y)}$. Az $\{N_s : s \in S\}$ lokálisan véges is, mert $\{U_s : s \in S\}$ lokálisan véges. Az X tér T_4, ezért minden $s \in S$-hez van olyan $\tilde{f}_s \colon X \to [0,1]$ folytonos függvény, hogy $\tilde{f}_s|_{\operatorname{cl} N_s} = 1$ és $\tilde{f}_s|_{X-U_s} = 0$. Legyen

$$\tilde{f} = \sum_{s \in S} \tilde{f}_s.$$

Az $\{U_s : s \in S\}$ lokálisan véges, ezért minden $y \in X$-nek létezik olyan környezete, ami csak véges sok U_s-be metsz bele, tehát $\tilde{f}$ definíciója értelmes, és minden ilyen környezeten, ezért az egész X-en is $\tilde{f}$ folytonos. Mindebből az következik, hogy

$$\mathcal{V} = \{\tilde{f}_s/\tilde{f} : s \in S\}$$

olyan egységosztás, amire minden $s \in S$-re

$$(\tilde{f}_s/\tilde{f})^{-1}((0,1]) \subset U_s,$$

így $\mathcal{V}$ lokálisan véges és $\{U_s : s \in S\}$ finomítása, ezért $\mathcal{W}$-nek is finomítása. $\square$

Lemma 11.5. *Ha $\mathcal{F} = \{f_s : s \in S\}$ egységosztása X-nek, $g \colon X \to [0,1]$ folytonos és $y \in X$ olyan, hogy $g(y) > 0$, akkor létezik olyan U_y környezete y-nak, hogy véges sok $\mathcal{F}$-beli függvénytől eltekintve $f_s|_{U_y} < g|_{U_y}$.*

Bizonyítás. Mivel $\sum_{s \in S} f_s(y) = 1$, ezért létezik olyan $s_1, \dots, s_k \in S$, hogy

$$1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}(y) < g(y).$$

Emiatt van olyan U_y környezete y-nak, hogy

$$1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}|_{U_y} < g|_{U_y}.$$

Nyilván minden $s \in S$, $s \neq s_1, \dots, s_k$-ra $f_s \leq 1 - \sum_{i=1}^{k} f_{s_i}$, ezért minden $s \in S$, $s \neq s_1, \dots, s_k$-ra $f_s|_{U_y} < g|_{U_y}$. $\square$

Tétel 11.6. *Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér, $\mathcal{W}$ egy fedése X-nek és $\mathcal{F} = \{f_s : s \in S\}$ egy egységosztás X-en, ami finomítása $\mathcal{W}$-nek. Ekkor létezik $\mathcal{W}$-nek lokálisan véges finomítása.*

Bizonyítás. Legyen

$$f = \sup_{s\in S} f_s,$$

ekkor $f > 0$. Minden $y \in X$-hez létezik olyan $f_{s(y)} \in \mathcal{F}$, hogy $f_{s(y)}(y) > 0$. Az előző lemmát $\mathcal{F}$-re és $g = f_{s(y)}$-ra alkalmazva létezik olyan U_y környezete y-nak, hogy véges sok $f_{s_1}, \ldots, f_{s_k} \in \mathcal{F}$ függvénytől eltekintve $f_s|_{U_y} < f_{s(y)}|_{U_y}$. Persze ekkor $f_{s(y)}$ is az $f_{s_1}, \ldots, f_{s_k}$ függvények között van. Nyilván

$$f|_{U_y} = \max\{f_{s_1}|_{U_y}, \ldots, f_{s_k}|_{U_y}\},$$

ebből az látszik, hogy az f folytonos minden $y \in X$-ben. Minden $s \in S$-re legyen

$$V_s = (f_s - f/2)^{-1}((0,\infty)).$$

Ekkor

$$\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$$

nyílt halmazokból áll és fedés, mert minden $x \in X$-hez létezik olyan $s \in S$, hogy $f_s(x) > f(x)/2$ az $f = \sup_{s\in S} f_s$ definíció miatt és ilyenkor $x \in V_s$. A $\mathcal{V}$ halmazrendszer finomítása $\mathcal{W}$-nek, mert $V_s \subset f_s^{-1}((0,1])$, és $\mathcal{V}$ lokálisan véges is, mert ha tetszőleges $y \in X$-re az előző lemmát használjuk $g = f/2$-vel, akkor valamilyen U_y környezetre véges sok $\mathcal{F}$-beli kivételével $f_s|_{U_y} < f/2|_{U_y}$, tehát véges sok $s \in S$ kivételével $V_s \cap U_y = \emptyset$. □

Tehát ha egy T_2 topologikus tér minden $\mathcal{W}$ fedéséhez létezik $\mathcal{W}$-nek alárendelt egységosztás, akkor a tér parakompakt.

Tárgymutató

Tartalomjegyzék