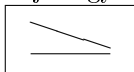


Antiparadoxon

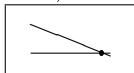
Pécsi Bertalan

2005. szeptember 27.

Matematikai szituáció alatt értsünk bármi olyasmit, amikor adva vannak *valamik valahogyan*. Azt a szituációt, amikor pl. adva van két egyenes, jelölhetjük így:



Azt a szituációt, amikor adva van két egyenes, meg egy pont, ami mindkettőn rajta van, értelemszerűen így jelöljük:



Amikor viszont adva van x és y , hogy az összegük 8, azt a szituációt így jelöljük:

$$x, y \mid x + y = 8$$

Megj. Erős érvek vannak arra, hogy feltegyük, hogy ezen szituációkban szereplő feltételek a változókra vagy geometriai objektumokra *pozitívak* legyenek, azaz egy szituációról nem olvashatunk le olyat, hogy pl. egy bizonyos pont nincs rajta egy bizonyos egyenesen, vagy nem tartalmazhat olyat, hogy $x + y \neq 8$. Voltaképp azonban erre a megszorításra jelen kis írományban nem lesz semmi szükség.

Egy következő absztrakciós szinten egy általános, szemantikával rendelkező matematikai **nyelvet** definiálunk:

Legyen adott egy $\mathbb{S} = \{A, B, C, \dots\}$ halmaz, melynek elemeit „szituációk”-nak nevezzük (és úgy gondolunk rájuk, mint a fentebb vázolt matematikai szituációkra), legyen adott továbbá **modelleknek** egy $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots\}$ osztálya, valamint minden $A \in \mathbb{S}$ szituációhoz és $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$ modellhez legyen adott egy $L(A, \mathcal{M})$ halmaz, melynek elemeit **interpretációknak** hívunk, pontosabban „ $u \in L(A, \mathcal{M})$ ” úgy olvasandó, hogy u az A szituáció egy interpretációja az \mathcal{M} modellben. Voltaképp lehetne magát az L függvényt nevezni a *nyelvnek*.

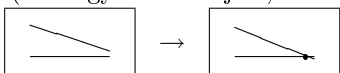
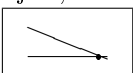
A fenti példákhoz tartozó modellek gyanánt tekinthetjük az euklideszi síkot, az euklideszi teret, a Bolyai féle hiperbolikus síkot vagy a valós projektív síkot, illetve például a természetes, racionális, valós vagy komplex számok halmazát... Az „adott két egyenes” szituációnak egy interpretációja mondjuk a projektív síkon nem más mint a projektív sík egy egyenespárja (nem kötjük ki, hogy e pár szükségszerűen különböző egyenesekből álljon).

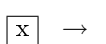
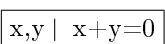
Feltesszük, hogy a nyelvben adott egy $O \in \mathbb{S}$ *triviális* szituáció (amikor „nem adott semmi”), ami azzal a tulajdonsággal bír, hogy minden \mathcal{M} modellben pontosan egy interpretációja van (ti. „amikor nem választunk ki semmit a

modellből”), azaz minden $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$ -re $L(O, \mathcal{M})$ egyelemű halmaz.

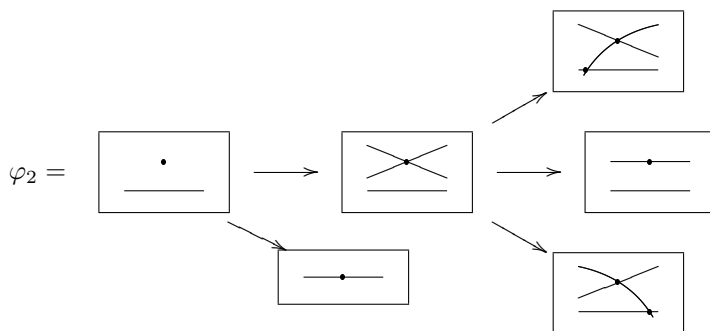
A nyelv **mondatai** az \mathbb{S} elemeivel címkézett *fák* lesznek. (Egy irányított gráfot *fának* nevezünk, ha van egy kitüntetett r csúcsa - a *gyökere* - amire az igaz, hogy a gráf minden csúcsába pontosan egy irányított út megy r -ből. Egy gráf \mathbb{S} -címkézésén nem egyebet értünk mint egy függvényt a gráf csúcsainak halmazából \mathbb{S} -be.) Jelen esetben tehát egy mondat úgy néz ki, hogy adva van egy fa, aminek minden csúcsába oda van írva egy szituáció.

Egy fa csúcsának a *szintje* legyen a gyökérből hozzá vezető egyetlen út csúcsainak száma. (Pl. a gyökér szintje 1, szomszédaié 2, azok szomszédaié 3, s.í.t.)

Pl. $\varphi_0 =$  \rightarrow  $$ avagy

$\varphi_1 =$  \rightarrow  $$ a kétszűcsű fán alapuló mondatok.

Picit bonyolultabb fastruktúrájú mondat a következő:



A mondatok értelmezését egy játékelméleti definícióval a legkényelmesebb megfogni. Adott φ mondat és $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$ modellhez tartozik egy kétszemélyes játék, amire a későbbiekben a „ φ, \mathcal{M} -játék” kifejezéssel hivatkozunk. A játékosokat ÁDÁM illetve ÉVA nevekkel illetjük. ÁDÁM kezdi a játékot: a mondat gyökerénél lévő szituációnak egy \mathcal{M} -beli interpretációját kell megjelölnie. Ezután következik ÉVA: választ egy következő ágat (azaz egy csúcsot a második szintről), valamint az ott ülő szituációnak egy *jól passzoló* interpretációját \mathcal{M} -ben. Aztán megint ÁDÁM jön: választ egy következő ágat (immáron a 3. szintről, az imént választott 2. szintű csúcs egy szomszédját), valamint annak egy *jól passzoló* interpretációját \mathcal{M} -ben. És így tovább, ÉVA, ÁDÁM, stb. Aki nem tud lépni (pl. elfogy a fa, vagy nincs további interpretáció), elveszti a játékot.

Azt, hogy *jól passzoló*, jelen keretek közt nem definiáljuk precízen, intuitíve arról van szó, hogy a játék folyamán már kiválasztott szituációkban szereplő elemek megmaradnak egész végig. Azaz, ha teszem azt, ÁDÁM úgy interpretálta a fentebbi φ_1 első szituációját a természetes számok halmazán, hogy x -et 4-nek választja, úgy φ_1 második szituációjában ÉVA köteles x -et szintén 4-nek választani. (Matematikailag pontosá tehetjük a „*jól passzoló* interpretáció” fogalmát kategóriaelméleti megközelítésekkel, feltételezve hogy \mathbb{S} -en legalább egy részbenrendezés struktúra van adva.)

Azt mondjuk, hogy a φ mondat **érvényes** avagy **igaz** az \mathcal{M} modellben (jelben $\mathcal{M} \models \varphi$), ha ÉVA-nak van *nyerő stratégiája* a fent vázolt játékban, úgy érve, hogy akárhogy is játszik ÁDÁM, ÉVA minden lépésére tud válaszolni.

Pl. a fenti φ_0 mondat akkor és csak akkor érvényes egy modellben, ha ott bármely két egyenes metszi egymást legalább egy pontban. Az euklideszi síkon, ha ÁDÁM egy párhuzamos egyenespárt választ a gyökér interpretációjaként, akkor ÉVA nem tudja folytatni a játékot, vesz. Ott tehát nem igaz φ_0 , azonban a projektív síkon igaz.

Hasonló módon φ_1 nem érvényes a természetes számok körében, de az egész vagy racionális számok halmazán már igaz. Voltaképpen φ_1 azt jelenti, hogy minden számnak van ellentettje (additív inverze).

Gondoljuk végig, hogy φ_2 éppen a hiperbolikus sík párhuzamossági axiómájával ekvivalens: bármely e egyenes és rajta kívüli pont esetén legalább két egyenes húzható a ponton át, ami nem metszi e -t. (Ugyanis ha ÁDÁM a harmadik szintre ér, ÉVA vesz.)

Megmutatható, hogy a klasszikus ítéletkalkulus, modális logika, elsőrendű illetve többszortú elsőrendű nyelvek speciális esetei a fent definiált nyelvnek. Ezt alátámasztandó, rögzítsünk egy t hasonlósági típust egy elsőrendű nyelvhez. Azaz t -ben adva vannak *műveleti- és relációs jelek*, mindegyikhez megmondva, hogy hány változós. A t típusú szituációk legyenek az $\langle X, \Gamma \rangle$ alakú rendezett párok, ahol X *változóknak* egy véges halmaza, és Γ is véges halmaz, elemei mind formulák, még hozzá t típusú *atomi formulák*, melyekben szereplő minden változó az X halmazból való. Ilyenek például a fenti φ_1 szituációi is (itt a típus tartalmaz egy 2 változós '+' műveleti jelet, valamint egy 0 változós '0' műveleti jelet, másnéven konstansjelet).

A modellek a hagyományos t típusú elsőrendű struktúrák. Egy $\langle X, \Gamma \rangle$ interpretációja egy \mathcal{M} modellben legyen egy olyan $X \rightarrow \mathcal{M}$ *kiértékelés*, hogy Γ minden eleme teljesüljön általa.

Az ezen szituációkból alkotott véges fákban alapuló mondatok mindegyike ekvivalens egy hagyományos elsőrendű t típusú formulával, valamint minden t típusú elsőrendű formula reprezentálható egy ilyen, t típusú szituációkkal címkézett fa által. (l. [1], theorem 3.5.)

A játékelmélet meghatározottsági tétele szerint, amennyiben egy ilyen szituációs nyelv egy φ mondatának nincs végtelen hosszú ága, úgy bármely \mathcal{M} modell esetén a két játékos közül pontosan az egyiknek van nyerő stratégiája a φ , \mathcal{M} -játékban.

Ezek szerint, ha felcseréljük a játékosok szerepét, az a logikai tagadásnak felel meg. Ezt a jelen értelmezések szerint (mivel mindig ÁDÁM kezdi a játékot), úgy valósíthatjuk meg, hogy a fa elé még egy csúcsot, egy új gyökeret teszünk, amit a triviális O szituációval címkézünk meg. Ez által a páratlan szinten levő csúcsok páros szintre kerültek, és viszont. Jelöljük a φ mondat illeten tagadását " $O \rightarrow \varphi$ "-vel. Gondoljuk meg, hogy a dupla tagadás mindig visszaadja az eredeti mondatot, azaz minden $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$ modell esetén $\mathcal{M} \models O \rightarrow O \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$.

Hogyan tudnánk reprezentálni a logikai és illetve **vagy** műveleteket ezen a nyelven?

Amennyiben egy fa tartalmaz végtelen ágat, a hozzá tartozó játék már nem feltétlenül eldöntött. Előfordulhat olyan is, amikor mind ÁDÁM-nak, mind ÉVA-nak van nyerő stratégiája. (Mi cseles módon csak ÉVA nyerő stratégiáját definiáltuk.) Legyen \mathcal{U} az a végtelen lineáris fa, amely csúcsaiba mindig a triviális

szituációt írtuk, azaz

$$\mathcal{U} := O \rightarrow O \rightarrow O \rightarrow \dots$$

Ekkor \mathcal{U} tagadása önmaga ($O \rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}$), és hát ÉVA tud ÁDÁM minden lépésére válaszolni, akármelyik modellben, tehát \mathcal{U} igaz. Afféle antiparadoxon ez: igaz és a tagadása is igaz.

A kapott logikában tehát nem érvényes az $A \wedge \neg A = \perp$ szabály, míg $A \vee \neg A = \top$ igen (tehát ez nem intuicionista logika).

Egy másik példa gyanánt tekintsük azt a végtelen Υ lineáris fát, amelynek n . csúcsát azzal a szituációval címkézzük meg, amikor adott n db. különböző pont. Legyenek a modellek a halmazok. Ekkor egy M halmaz esetén $M \models \Upsilon$ pontosan akkor teljesül, ha M -nek páros vagy végtelen sok eleme van, míg $M \models O \rightarrow \Upsilon$ akkor igaz, ha M -nek páratlan vagy végtelen sok eleme van.

Hivatkozások

- [1] B. Pécsi: *Categorical Trees as Formulas*. Master's Thesis, ELTE Univ. Budapest and Vrije Univ. Amsterdam <http://www.renyi.hu/~aladar> (2003).

peace :)