

Csoportok és Gráfok Feladatsor

2011/2012 ősze, ELTE

1. Minden Cayley gráf csúcstranzitív.
2. A d -reguláris fán a Markov operátornak nincs l^2 sajátfüggvénye ($d \geq 2$).
3. Adjunk átmérő-beclést összefüggő d -reguláris véges gráfra, ha tudjuk hogy minden ± 1 -től különböző sajátérték legfeljebb ρ .
4. Legyen M szimmetrikus valós mátrix. Lássuk be (spektráltétel vagy karakterisztikus polinom használata nélkül) hogy az

$$R(v) = \frac{\langle vM, v \rangle}{\langle vM, v \rangle}$$

Rayleigh-hányados minden maximumhelye M -nek sajátvektora.

5. Lássuk be, hogy minden szimmetrikus valós mátrixnak van ortonormált sajátbázisa.
6. Jelölje $p_{x,y,n}$ annak a valószínűségét, hogy az x -ből induló n hosszú véletlen séta y -ban ér véget. Lássuk be, hogy ha G összefüggő d -reguláris gráf, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_{o,o,2n})^{1/2n}$$

független o -tól.

7. Lássuk be, hogy ha G csúcstranzitív d -reguláris gráf, akkor

$$p_{x,x,2n} \geq p_{x,y,2n}$$

minden x, y csúcsra.

8. Legyen G véges d -reguláris gráf, legyen ρ a G spektrálsugara, legyen $C \subseteq V(G)$ és legyen A' a C -n feszített részgráf adjacencia-mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy A' minden sajátértéke legfeljebb

$$cd + (1 - c)\rho$$

ahol $c = |C|/|G|$.

9. Bizonyítsuk be, hogy a szabad csoportban a redukált alak egyértelmű.
10. Lássuk be, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok szabad csoportot generálnak.

11. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \neq w \in F_2$ szóra létezik n és $p, q \in \text{Sym}(n)$, amire $w(p, q) \neq 1$.
12. Osztályozzuk a d -reguláris fa automorfizmusait.
13. Lássuk be, hogy egy irracionális forgatás gráfja nem mérhetően 2-színezhető.
14. Egy adott filtert tartalmazó maximális filter ultrafilter.
15. Adott ultrafilter mellett minden $a_n \in [0, 1]$ sorozatnak van egyértelmű ultralimesze.
16. Legyen G korlátos fokú, végtelen, összefüggő gráf, aminek a Cheeger-konstansa nem nulla. Ekkor létezik $C > 0$ és $f_1, f_2 : V(G) \rightarrow V(G)$ injektív függvények, amire $d(x, f_i(x)) < C$ ($x \in V(G), i = 1, 2$) és $f_1(V(G)) \cap f_2(V(G)) = \emptyset$.
17. Test fölötti végesen generált mátrixcsoport reziduálisan véges.
18. Legyen α és β két olyan parabolikus automorfizmusa a d -reguláris fának, amelyeknek tengelyei diszjunktak. Lássuk be, hogy α és β szabad csoportot generálnak.
19. Lássuk be, hogy a Γ végesen generált csoport pontosan akkor amenábilis, ha Cayley gráfjainak spektrálsugara 1.
20. Ha A beledarabolható B -be és B is A -ba, akkor átdarabolhatóak egymásba.
21. Legyen Γ megszámlálhatóan végtelen csoport és legyen

$$\{0, 1\}^\Gamma = \{f : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}\}$$

az összes 0-1-színezés tere, a szorzattopológiával ellátva. Vegyük rajta az $1/2$ - $1/2$ szorzatmértéket. Ezen a téren Γ hat a koordináták eltolásával. Lássuk be, hogy ez a hatás ergodikus.