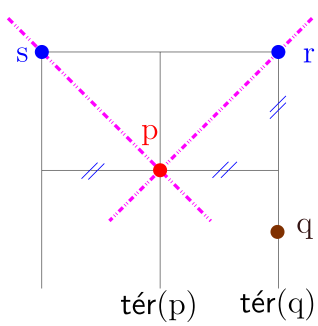
Definició Egy S síkot állónak hívunk, ha van benne a $\bar{t}$ időtengellyel ($\{p \in {}^n\mathsf{Q} : \mathsf{tér}(p) = \langle 0, \ldots, 0\rangle\}$) párhuzamos egyenes. Egy egyenest foton-egyenesnek nevezünk, ha meredeksége 1. $\square$

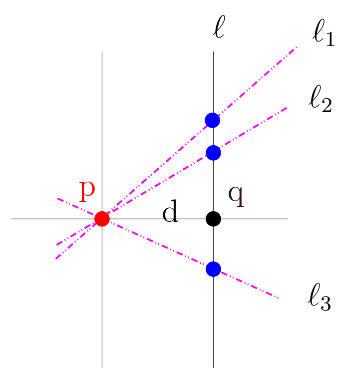
Lemma 1. Tegyük fel, hogy a Q testben pozitív számoknak van gyöke. Ekkor álló síkban minden ponton keresztül pontosan 2 síkbeli foton-egyenes megy keresztül.

Bizonyítás. Legyen p, q az S álló sík két tetszőleges pontja úgy, hogy $\mathsf{tér}(p) \neq \mathsf{tér}(q)$. Legyen $r \in {}^n\mathsf{Q}$ olyan, hogy $r_0 := p_0 + \mathsf{ttáv}(p, q)$, $\quad \mathsf{tér}(r) = \mathsf{tér}(q)$ és legyen $s \in {}^n\mathsf{Q}$ olyan, hogy $s_0 = p_0 + \mathsf{ttáv}(p, q), \mathsf{tér}(s) = 2\mathsf{tér}(p) - \mathsf{tér}(q)$, lásd az ábra bal oldalát. Ekkor r, s az S síkon vannak és mind a pr egyenes mind a ps egyenes 1-meredekségű, azaz foton-egyenes.

A két egyenes különböző: $s \neq r$ mert $\mathsf{tér}(s-r) = 2\mathsf{tér}(p) - \mathsf{tér}(q) - \mathsf{tér}(q) = 2\mathsf{tér}(p) - 2\mathsf{tér}(q)$ és feltételeink szerint $\mathsf{tér}(p) \neq \mathsf{tér}(q)$. Viszont az sr egyenes nem 1 meredekségű, tehát a fenti két egyenes különböző.

Marad annak bizonyítása, hogy az S sík semelyik pontján keresztül nem megy kettőnél *több* síkbeli foton-egyenes. Tegyük fel, hogy mégis, a sík p pontján keresztül három különböző foton-egyenes megy, legyenek ezek g_1, g_2, g_3. Legyen q a sík olyan pontja, hogy $q_0 = p_0$ és $d := \mathsf{ttáv}(p, q) \neq 0$. Legyen ℓ a q-n keresztülmenő $\bar{t}$ tengellyel párhuzamos egyenes, ez a síkban fekszik; legyen továbbá r_1, r_2, r_3 a p-n keresztüli három foton-egyenes metszete ℓ-el. Ez három különboző pont az ℓ-en, melyeknek távolsága a q ponttól d, testben ez nem lehetséges (mert akkor d^2-nek lenne 3 különböyő gyöke). $\square$





Megjegyzés: Legyen Q tetszőleges test és $n \geq 2$. Ekkor Lemma 1 igaz ${}^n\mathsf{Q}$-ban csakkor ha $(\forall p_1, \ldots, p_{n-1})(p_1^2 + \cdots + p_{n-1}^2$-nek van gyöke). $\square$