

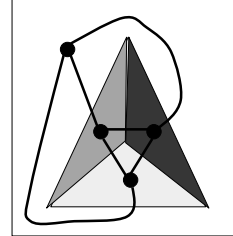
## Dualitás

Térkép színezése: szomszédos országok különböző színűek.

Minimum hány szín kell? Tapasztalat: 4.

Ez egy olyan térkép, amihez négy szín kell.

Sokáig sejtés volt, csak 1977-ben sikerült (számítógépes segítséggel) bizonyítani Appel és Hakennek



Szomszédos országok: van közös határszakasz.

⇒ Gráf  $G^*$  csúcsai: országok (tartományok), két csúcs között él, ha az országok szomszédosak

Azaz, minden ország "fővárosát" vasútvonalakkal kötjük össze a szomszédos országok fővárosaival, mely vasutak csak a két adott ország területén haladnak.

$G^*$  csúcsait kell színezni úgy, hogy szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. (2. félévben belátjuk majd, hogy ehhez 5 szín elegendő.)

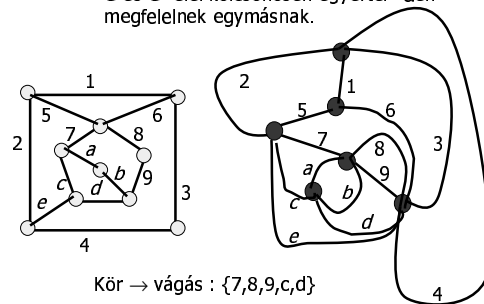
A térkép is egy gráf: csúcsai azok a határpontok ahol több határszakasz találkozik, élei a határszakaszok, tartományai az országok.

$G$  síkbarajzolható gráf egy síkbarajzolása esetén  $G^*$  a  $G$  duálisa, ha  $G^*$  pontjai a  $G$  tartományai, két pont (a két tartományon belül haladó) éllel össze van kötve, ha a megfelelő tartományoknak van közös határ élük (minden közös határelhez egy-egy él  $G^*$ -ban).

A  $G$  gráf pedig pont a  $G^*$  duálisa lesz.

Másik motiváció az elektromosságtani dualitás feszültségek és áramok között.

$G$  és  $G^*$  élei kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak.



Kör → vágás : {7, 8, 9, c, d}

Vágás → kör: {5, 6, e}

Vágás: olyan élhalmaz, melynek elhagyásával az összefüggő komponensek száma nő, de semelyik részalmozára ez nem igaz.

Tétel

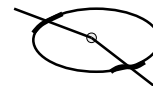
Legyen  $C$  és  $Q$  a  $G$  síkbarajzolható gráf egy körének, illetve vágásának élhalmaza. Akkor a  $G^*$  gráfban  $C$  egy vágás,  $Q$  egy kör élhalmaza lesz.

Bizonyítás

A  $C$  kör élei a síkot két részre bontják, egy belső és egy külső részre.



A belső részben levő tartományoknak megfelelő  $G^*$ -beli pontokból a külső részben levőkhöz csak a  $C$  éleinek megfelelő éleken át lehet eljutni. Mivel a körből akármelyik élet elhagyva nem vágja szét a síkot, a duálisban az élek minimális elvágó élhalmazt alkotnak.



Ha  $Q$  egy vágás, feltehetjük, hogy  $G$  összefüggő (különben tekintsük egy komponensét). Ekkor egy tartomány határán vagy 2, vagy 0 él van  $Q$ -ból.



Ha egy él lenne, annak két végpontja ugyanabba a komponensbe esne, azaz az élhalmaz nem lenne minimális elvágó.

Ha több lenne, akkor valamelyiknek a két végpontja ugyanabba a komponensbe esne, azaz az élhalmaz nem lenne minimális elvágó.

Ekor a duálisban a  $Q$ -nak megfelelő élek olyan részgráfot alkotnak, aminek minden pontja 2 fokú, azaz körök uniója.

Viszont több kör nem lehet, mert akkor  $Q$  nem lett volna minimális elvágó.

### Állítás

Ha  $G$  összefüggő síkbarajzolható gráf,  $F$  egy feszítőfája, akkor az  $F$ -nek megfelelő élek  $G^*$  egy feszítőfájának a komplementerét adják.

### Bizonyítás

$F$  feszítőfa  $\Rightarrow$  maximális körmentes részgráf  $\Rightarrow G^*$ -ban maximális vágás mentes részgráf  $\Rightarrow G^*$ -ból az  $F$ -nek megfelelő éleket elhagyva összefüggő részgráfot kapunk, ami minimális ilyen, azaz feszítőfa.

$G$

$G^*$

Él	Él
Pont	Tartomány
Kör	Vágás
Fa	Fa komplementere
Párhuzamos élek	Soros élek
Hurok élek	Elvágó élek

## Euler formula újra

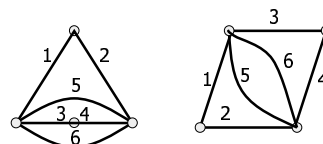
$G$  éleinek száma =  $G^*$  éleinek száma =  $e$

$G$  pontjainak száma =  $n$

$G^*$  pontjainak száma =  $t$  (= tartományok  $G$ -ben)

$G$  feszítőfa éleinek száma  $n-1 = e - (t-1)$

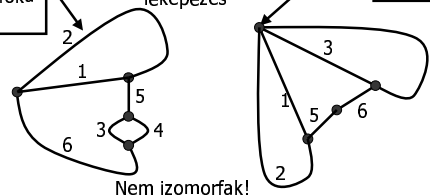
### Izomorfak



Nincs 4 fokú csúcs

Élek közt körtartó leképezés

4 fokú csúcs



Nem izomorfak!

Ha  $G$  és  $H$  izomorf síkbarajzolható gráfok, akkor a duálisuk nem feltétlenül izomorf.

A duális függ a gráf síkbarajzolásától, azaz  $G^*$  nem  $G$ -hez tartozik, hanem  $G$  adott síkbarajzolásához.

Így  $(G^*)^*$  sem feltétlenül izomorf  $G$ -vel, (amit elvárnánk egy "duális" fogalomtól).

Megoldás: gyenge izomorfia.

### Definíció

$G$  és  $H$  gráfok gyengén izomorfak (2-izomorfak), ha létezik  $f: E(G) \rightarrow E(H)$  bijekció, amely kört körbe visz.

## Whitney tételei

### Tétel

Legyen  $G$  síkbarajzolható gráf és legyen  $H$  vele gyengén izomorf. Ekkor  $H$  is síkbarajzolható,  $G^*$  és  $H^*$  gyengén izomorfak, valamint  $(G^*)^*$  és  $(H^*)^*$  gyengén izomorfak  $G$ -vel, illetve  $H$ -val.

Lehet-e más gráfostályban is definiálni ezt a dualitást?

Síkbarajzolható gráfoknál élek felelnek meg egymásnak, körök vágásoknak, és viszont.

#### Definíció

$G$  és  $G^*$  gráfok egymás absztrakt duálisai, ha létezik az éleik között egy olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, ami kört vágásba, vágást körbe visz.

Például, ha  $G$  síkbarajzolható, akkor a síkbarajzolásához tartozó duális az absztrakt duális is lesz.

Tétel(Whitney, 1936)

Egy gráfnak akkor és csak akkor létezik absztrakt duális, ha síkbarajzolható.

## Kruskal-tétel

### Mohó algoritmus

#### Feladat

Egy nagyobb cég a különböző telephelyei közt számítógépes hálózatot akar kiépíteni.

Bizonyos telephelyek közt lehet közvetlen üvegszálkapcsolatot létrehozni, és ezen kapcsolat költsége ismert. Találjuk meg a legolcsóbb megoldást!

#### Modell

$G$  gráf, ahol  $V(G)$  a telephelyek halmaza,  $\{u, v\} \in E(G)$  pontosan akkor, ha az  $u$  és  $v$  telephelyek között lehet közvetlen üvegszálkapcsolatot létrehozni.  $e = \{u, v\} \in E(G)$  esetén  $w(e)$  a kapcsolat költsége, az él súlya.

#### Feladat a modellben

Kell egy olyan élhalmaz, hogy bármelyik csúcsból bármelyik csúcsba legyen út (bármely telephelyről bármelyik elérhető legyen), és az ilyenek közül a legkisebb összsúlyút keressük.

Azaz: az élhalmaz összefüggő részgráfot kell alkotson.

Minimális összsúlyú: nem lehet belőle élet elhagyni, hogy még összefüggő maradjon.

Tehát egy minimális összsúlyú feszítőfát keresünk.

#### Definíció

Körmentes gráf az erdő. Egy  $F$  gráf a  $G$  gráf feszítő erdője, ha  $F$  az erdő, és minden komponense feszítő fája  $G$  megfelelő komponensének.

Egy erdő komponensei fák. Ha  $F$  erdő  $n$  ponton,  $k$  komponenssel, akkor  $n-k$  éle van.

Legyen  $G$  egy gráf,  $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  nemnegatív élsúlyozás. Ha  $X \subseteq E(G)$ , akkor  $X$  súlya  $w(X) = \sum_{e \in X} w(e)$

#### Probléma

Adjunk algoritmust, ami megkeresi a legkisebb súlyú feszítő erdőt.

#### Algoritmus(Kruskal)

Éleket egyesével választjuk. Egy  $X$  élhalmazt konstruálunk, ami nem tartalmaz kört. Minden lépésben egy olyan legkisebb súlyú élet veszünk  $X$ -hez, amelyik hozzávételével nem keletkezik kör. Ha ilyen nincs (azaz bármely él hozzávételével kör keletkezne), akkor  $X$  egy feszítő erdő, és minimális súlyú.

1.  $X := \emptyset$ ;
2. **while** van  $e$  él, hogy  $X \cup \{e\}$ -ben nincs kör
3.     **do**  $e := \min$  súlyú él, hogy  $X \cup \{e\}$ -ben nincs kör
4.      $X := X \cup \{e\}$ ;
5. **return**  $X$ ;

Mohó algoritmus: mindig az adott pillanatban legjobb lépést teszi, nem gondol előre. Kruskal algoritmus is ilyen.

Általában a mohó algoritmus nem feltétlenül ad optimális eredményt más feladatokra.

Itt, most elindulva mindig hegynek föl menve nem jutunk fel a föld legmagasabb hegycsúcsára...

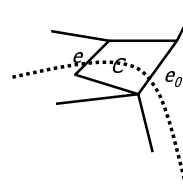
Tétel

Kruskal algoritmus a  $G$  gráf egy minimális súlyú feszítő erdőjét adja.

Bizonyítás

Az algoritmus egy nem bővíthető körmentes  $F$  részgráfot választ ki: feszítő erdőt.

Indirekt: van  $F_0$  minimális súlyú feszítő erdő, hogy  $w(F_0) < w(F)$ . Az ilyenek közül válasszuk azt, amelyiknek  $F$ -el a legtöbb közös éle van. Legyen  $e_0 \in E(F_0) - E(F)$ .



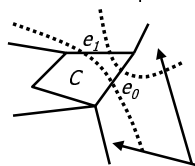
H  $e_0$ -t  $F$ -hez vesszük, keletkezik egy  $C$  kör.

Ha valamely  $C$ -beli  $e$ -re  $w(e_0) < w(e)$ , akkor mivel az  $e$  bevételezésének pillanatában  $e_0$ -t is választhattuk volna (nem adna kört) nem  $e$  lett volna a minimális súlyú  $X$ -hez vehető él.

Tehát  $w(e) \leq w(e_0)$  minden  $C$ -beli  $e$ -re.

$F_0 - e_0$  legalább két komponensből áll.

Van  $e_i \in E(C) - \{e_0\}$ , mely  $F_0 - e_0$  két komponensét köti össze.



$F_1 = (F_0 - e_0) \cup \{e_i\}$  is feszítő erdő.

Ha  $w(e_i) < w(e_0)$ , akkor  $w(F_1) < w(F_0)$ , ellentmondás.

$F_0 - e_0$  komponensei

Tehát  $w(e_i) = w(e_0)$ . Ekkor viszont  $F_1$  egy olyan minimális súlyú feszítő erdő, melynek eggyel több közös éle van  $F$ -el, mint  $F_0$ -nak, ami ellentmond  $F_0$  választásával.

Használtuk:

Egy feszítő erdőhöz egy  $e$  él hozzávétele pontosan egy kör keletkezik.

Ezen kör bármelyik  $e'$ -élét elhagyva és  $e$ -t bevéve újra feszítő erdőt kapunk.