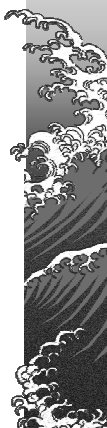


Számok a valósokon túl

*avagy, melyik szám négyzete a
-1?*



Legyen \mathbb{C} a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$.
 \mathbb{C} -n értelmezünk két műveletet: egy összeadás és egy szorzás nevűt.

Összeadás

$$(a,b), (c,d) \in \mathbb{C} : (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{C}.$$

Az összeadás asszociatív, kommutatív, mivel a valós számok összeadása is asszociatív és kommutatív.

A $(0,0)$ pár nullelem, azaz minden $(a,b) \in \mathbb{C}$ párra $(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (a,b)$.

Az (a,b) pár ellentettje (negatívja) a $(-a,-b)$ pár, mivel $(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$.

Szorzás

$$(a,b), (c,d) \in \mathbb{C} : (a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc) \in \mathbb{C}.$$

Itt valós számok szorzása áll.

A szorzás kommutatív, mert $ac-bd = ca-db$ és $ad+bc = da+cb$.

A szorzás asszociatív. $((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f) =$

$$(ac-bd, ad+bc) \cdot (e,f) =$$

$$(ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$$

$$(a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f)) = (a,b) \cdot (ce-df, cf+de) =$$

$$(ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$$

A szorzásra nézve van egységelem:

$$(1,0) \cdot (a,b) = (a,b) \cdot (1,0) = (a,b) \text{ minden } (a,b)\text{-re.}$$

Minden nem nulla elemnek van inverze: (a,b) -re, ha $a^2 + b^2 > 0$, akkor

$$(a,b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) =$$

$$\left(a \frac{a}{a^2+b^2} - b \frac{-b}{a^2+b^2}, a \frac{-b}{a^2+b^2} + b \frac{a}{a^2+b^2} \right) =$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ba}{a^2+b^2} \right) = (1,0)$$

Érvényes a disztributivitás:

$$(a,b) \cdot ((c,d) + (e,f)) = (a,b) \cdot (c+e, d+f) =$$

$$(ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) =$$

$$(ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) =$$

$$(a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)$$

Nullelem szorozva bármivel a nullelem:

$$(0,0) \cdot (a,b) = (0a-0b, 0b+0a) = (0,0)$$

Az egységelem $(1,0)$ ellentettje $(-1,0)$. Bármely (a,b) elemre $(-1,0) \cdot (a,b) = (-a,-b)$ az (a,b) elem ellentettje.

A \mathbb{C} halmaz az összeadás és szorzás műveletével testet alkot.

Az $(a,0)$ alakú párok *ugyanúgy viselkednek mint a valós számok*, azaz egy \mathbb{R} -el izomorf részstruktúrát alkotnak:

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés, melyre $f(a) = (a,0)$ egy művelettartó injekció.

$$f(a+b) = (a+b,0) = (a,0) + (b,0) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = (ab,0) = (a,0) \cdot (b,0) = f(a) \cdot f(b)$$

$$f(0) = (0,0) \text{ a nullelem.}$$

$$f(1) = (1,0) \text{ az egységelem.}$$

$$\text{Ugyanakkor } (a,b) = (a,0) \cdot (1,0) + (b,0) \cdot (0,1)$$

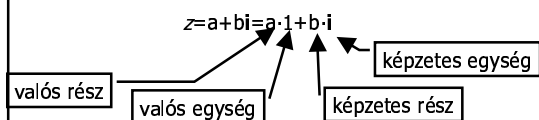
$$\text{Valamint: } (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)!!!!$$

Azaz, ha az $(a,0)$ alakú elemeket azonosítjuk a valós számokkal, akkor a $(0,1)$ \mathbb{C} -beli elem négyzete -1 .

Komplex számok

A \mathbb{C} halmaz $(0,1)$ elemét i -vel szokás jelölni. Ekkor \mathbb{C} minden eleme $a+bi$ alakban írható, ahol a és b valós számok. Ez a komplex számok kanonikus alakja.

Villamosmérnöki gyakorlatban gyakran j -vel jelölik a képzetes egységet!! Mi itt maradunk a i jelölésnél.
($j^2 = -1$) $i^2 = -1$.



Az ilyen alakú számokkal ugyanúgy számolhatunk, mint a valósokkal, csak i^2 helyére kell -1 -et írni.

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bic + bdi^2 = ac + (ad+bc)i + bdi^2 =$$

$$(ac-bd) + (ad+bc)i$$

Ha $z = a+bi$, akkor az additív inverze (ellentettje) $-z = -a-bi$

Ha $z \neq 0$, akkor a multiplikatív inverze (reciproka)

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Példa

$$(\sqrt{8} - i\sqrt{18})(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) = 4 + 3\sqrt{6} + (2\sqrt{6} - 6)i$$

Hányadost a nevező i -tlenítésével (gyöktelenítéshez hasonlóan) számolhatunk.

$$\frac{4-17i}{5-4i} = (4-17i) \frac{5+4i}{(5-4i)(5+4i)} =$$

$$(4-17i) \frac{5+4i}{25+16} = \frac{88}{41} - \frac{69}{41}i$$

Amivel a törtet bővítettük az a nevező konjugáltja.

Definíció

A $z = a+bi$ komplex szám konjugáltja $\bar{z} = a-bi$

Világos, hogy $\bar{\bar{z}} = z$

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Állítás

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Bizonyítás

Az első és a második állítás házi feladat.

$$\overline{z_1 z_2} = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i =$$

$$(ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Következmény

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$z + \bar{z} \in \mathbb{R}$$

$$z\bar{z} \in \mathbb{R}$$

$z - \bar{z}$ képzetes szám

Definíció

A $z = a+bi$ komplex szám abszolút értéke

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad (\geq 0)$$

A $\sqrt{\quad}$ függvény mindig a nemnegatív gyöket jelenti!

Világos, hogy $|z| = |\bar{z}|$, valamint ez a valós számok abszolútértékének általánosítása.

Állítás

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Bizonyítás

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \leq z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + 2|z_1| |z_2| \Leftrightarrow$$

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq 2|z_1| |z_2|$$

\uparrow

$$(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)^2 \leq 4|z_1|^2 |z_2|^2 = 4z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2)^2 = (z_1 \bar{z}_2 - \overline{z_1 \bar{z}_2})^2 \leq 0$$

Ez tisztán képzetes szám, a négyzete nem pozitív

$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
 bizonyításához az előző egyenlőtlenségben írunk z_1 helyett $z_1 - z_2$ -t.
 $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ azaz
 $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ Hasonlóan
 $|z_1 - z_2| \geq |z_2| - |z_1|$

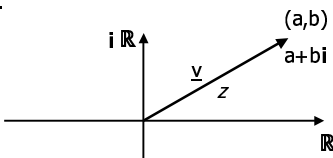
A másik két egyenlőség bizonyításához kihasználjuk a szorzás kommutativitását és asszociativitását.
 $z_1 z_2 = \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| |z_2|$

Innen $1 = |1| = \left| z_1 \cdot \frac{1}{z_1} \right| = |z_1| \left| \frac{1}{z_1} \right| \Rightarrow$ alapján adódik a hányados abszolút értéke.
 $\left| \frac{1}{z_1} \right| = \frac{1}{|z_1|}$

Komplex számok geometriai jelentése

A komplex számokat valós számpároként vezettük be. Ezek pont a (közönséges) kétdimenziós sík elemei is.

Azonosíthatjuk az $v=(a,b)$ vektort a $z=a+bi$ komplex számmal.

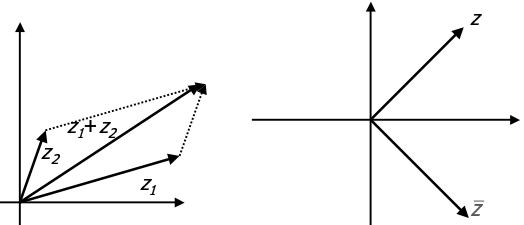


Állítás

Vektorok összegéhez rendelt komplex szám az egyes vektorokhoz rendelt komplex számok összege.

Vektor ellentettjéhez a komplex szám negatívja van rendelve.

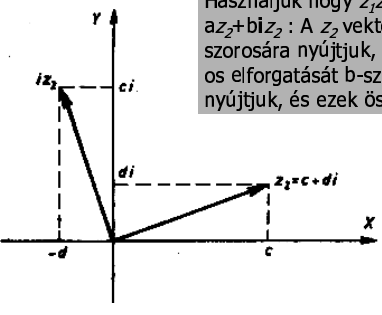
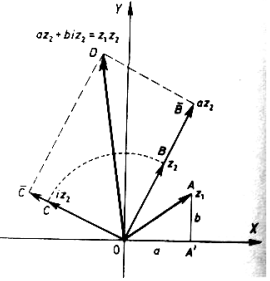
A komplex szám konjugáltjához a vektor x (valós) tengelyre vett tükörképe van rendelve.



Szorzás geometriai jelentése:

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ esetén $iz_2 = i(c + di) = -d + ci$. Azaz az iz_2 vektort a z_2 -ből pozitív 90° -os elforgatással kapjuk.

Használjuk hogy $z_1 z_2 = (a + bi)z_2 = az_2 + bi z_2$: A z_2 vektort először a -szorosára nyújtjuk, majd a z_2 90° -os elforgatását b -szeresére nyújtjuk, és ezek összege a $z_1 z_2$.

$OB = |z_2| a$
 $\overline{BD} = \overline{OC} = i |z_2| b = |z_2| b$
 valamint $\angle OBD = 90^\circ$
 Tehát $\triangle OA'A \sim \triangle OBD$
 Innen $OD = |z_2| OA = |z_1| |z_2|$
 és $\angle BOD = \angle A'OA$ azaz:

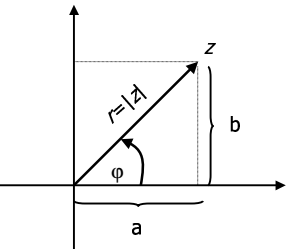
Két komplex szám szorzatának abszolút értéke a szorzat abszolút értékeinek szorzata.

Ha $\arg z$ jelöli a z számhoz tartozó vektor irányszögét, akkor $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

Irányszög: az x tengelytől mért pozitív irányú elfordulás.

Komplex szám trigonometriai alakja

Kanonikus alakban könnyű összeadni és kivonni, de nehéz szorozni, osztani és hatványozni.



$a = r \cos \varphi$
 $b = r \sin \varphi$
 $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Ez utóbbi a komplex szám trigonometrikus alakja. $\varphi = \arg z, r = |z|$

$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ akkor

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ és } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$$

Az előbb láttuk hogy $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ és $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

Tehát $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Másik bizonyítás ugyanerre:

$$z_1 z_2 =$$

$r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)$, ahonnan a szögfüggvények addíciós képletét alkalmazva kapjuk a kívánt formulát.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

Példa

$$z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \arctg(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$z_1 z_2 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2(-1 + 0) = -2$$

Komplex számok hatványozása, Moivre képlete

Tétel (Moivre képlete)

A trigonometriai alakban adott $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám k -ik hatványa

$$z^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi),$$

ahol k tetszőleges egész szám.

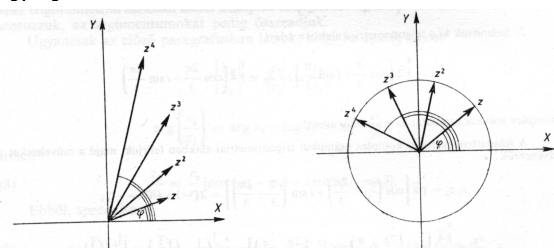
Bizonyítás

$k > 0$ esetén a szorzásra vonatkozó képletből egyszerű indukció. $k=0$: $z^0=1$. Ha $k < 0$, akkor $-k=n > 0$.

$$z^k = z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z} \right)^n = \left[\frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) \right]^n =$$

$$\frac{1}{r^n} (\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi))$$

Speciálisan, ha $r=1$, akkor z hatványai egyszerű φ szögű elforgatással keletkeznek, mindegyik rajta van az egységkörön.



Gyökvonás komplex számból

Definíció

Egy w komplex számot a z komplex szám n -ik gyökének nevezünk, ha

$$w^n = z$$

Legyen $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $w = s(\cos \beta + i \sin \beta)$. Ekkor

$s^n = r$ és $\varphi = n\beta + 2k\pi$ ahol k tetszőleges egész szám.

$$s = \sqrt[n]{r} \quad \beta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{Ahol } \sqrt[n]{r} \text{ egyetlen nemnegatív valós értéket jelent.}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

Mivel a cosinus és sinus függvény 2π szerint periodikus, ezért elég $k=0,1,\dots,n-1$ értékeket venni.

Tétel

A trigonometriai alakban felírt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám összes n -ik gyöke az

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

alakban felírt szám.

Geometriailag: egy $\sqrt[n]{|z|}$ sugarú körön egy szabályos n -szög csúcsai

Példa $\sqrt[5]{-27}$

$$-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\sqrt[5]{-27} = \sqrt[5]{27} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{5} \right) =$$

$$\sqrt[5]{27} [\cos(30^\circ + k60^\circ) + i\sin(30^\circ + k60^\circ)]$$

$$\sqrt[5]{27} = \sqrt{3}$$

$$k=0 \quad \sqrt{3} [\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)] = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=1 \quad \sqrt{3} [\cos(90^\circ) + i\sin(90^\circ)] = i\sqrt{3}$$

$$k=2 \quad \sqrt{3} [\cos(150^\circ) + i\sin(150^\circ)] = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=3 \quad \sqrt{3} [\cos(210^\circ) + i\sin(210^\circ)] = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=4 \quad \sqrt{3} [\cos(270^\circ) + i\sin(270^\circ)] = -i\sqrt{3}$$

$$k=5 \quad \sqrt{3} [\cos(330^\circ) + i\sin(330^\circ)] = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Egységgyökök

A $z=1$ speciális esetben elvégzett gyökvonás eredményét, azaz az

$$x^n - 1 = 0$$

egyenlet megoldásait n -ik (komplex) egységgyököknek nevezzük.

$z=1=(\cos 0 + i\sin 0)$, ezért az n -ik egységgyökök a

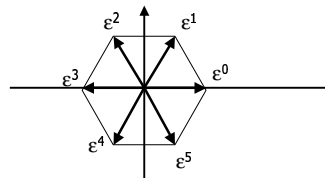
következők: $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$

Az n -ik egységgyökök előállnak az $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$

hatványaiként, azaz az összes n -ik egységgyök a következő (egy szabályos n -szög csúcsai az egységkörön, melynek egyik csúcsa a $z=1$):

$$\varepsilon_1^0 = 1 = \varepsilon_0, \varepsilon_1^1 = \varepsilon_1, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1^{n-1} = \varepsilon_{n-1}$$

Egy n -ik egységgyök primitív n -ik egységgyök, ha hatványaiként az összes többi előáll.



Megjegyzés

Az $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ egységgyök primitív, ha n és k legnagyobb közös osztója 1.

Tétel

Ha w_0 egyik n -ik gyöke z -nek, akkor

$$w_0, w_0 \varepsilon_1, w_0 \varepsilon_2, \dots, w_0 \varepsilon_{n-1}$$

a z összes n -ik gyöke, ahol $1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ az n -ik egységgyököket jelenti.

Bizonyítás

A megadott számok mind különbözőek. Ugyanakkor $(w_0 \varepsilon_k)^n = w_0^n \varepsilon_k^n = w_0^n 1 = z$.

Ha ε primitív egységgyök, akkor a fenti számok $w_0, w_0 \varepsilon, w_0 \varepsilon^2, \dots, w_0 \varepsilon^{n-1}$ alakban írhatók.

Tétel

Az n -edik egységgyökök ($n > 1$) összege nulla.

Bizonyítás

Legyen ε primitív egységgyök ekkor $\varepsilon \neq 1$. Az egységgyökök összege:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1} = (\varepsilon^n - 1) / (\varepsilon - 1) = (1 - 1) / (\varepsilon - 1) = 0.$$