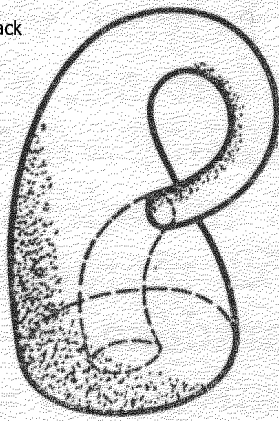


## Síkbarajzolható gráfok

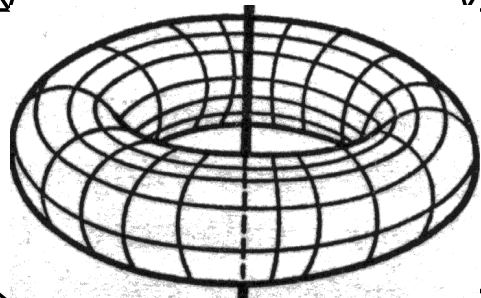
### Definíció

Egy  $G=(V,E)$  gráf síkbarajzolható, ha létezik egy olyan lerajzolása a síkra, ahol az élek nem metszik egymást. Azaz, léteznek olyan injektív  $f:V\rightarrow\mathbb{R}^2$  és  $g:E\rightarrow\{\text{egyszerű görbék } \mathbb{R}^2\text{-ben}\}$  leképezések, melyekre igaz, hogy ha  $e=\{v,u\}$ , akkor  $g(e)$  az  $f(u)$  és  $f(v)$  pontokat összekötő görbe, valamint ha  $e=\{v,u'\}$ , akkor  $g(e)\cap g(e')=\{f(u),f(v)\}\cap\{f(u'),f(v')\}$ . Hasonlóan definiáljuk a gömbre (vagy akármilyen más felületre, például tórusz, Klein-palack, stb) rajzolható gráfot, mindössze az  $\mathbb{R}^2$ -et kell kicserélni a másik felületre.

Klein-palack



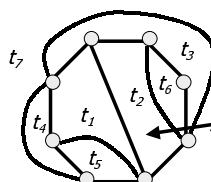
Tórusz



A síkbarajzolt gráf a síkot tartományokra bontja.

Tétel

Egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.



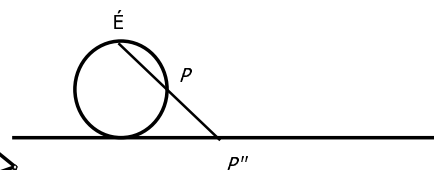
13 él, 8 csúcs, 7 tartomány

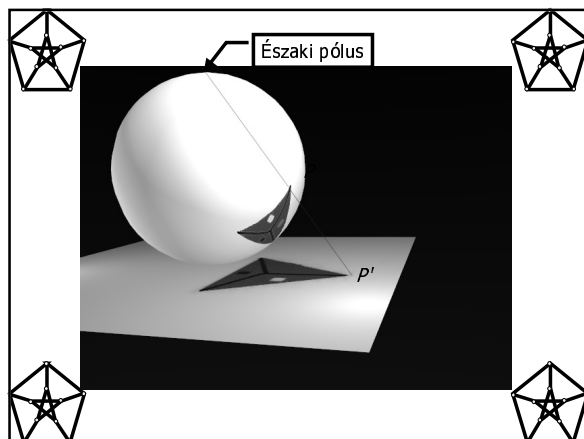
Belső tartomány

Külső tartomány

### Bizonyítás

Sztereografikus projekció. A gömböt a síkra helyezjük, (déli pólus), majd az északi pólusból egyeneseket húzunk a gráf pontjaihoz (éleinek pontjaihoz), ezen egyeneseknek a gömbbel levő másik metszéspontja lesz a vetített képpont.





Az eljárás megfordítható, ha gömböt a rárajzolt gráffal együtt úgy tesszük le a síkra, hogy a gráf egyetlen pontja vagy éle se menjen át az északi póluson. (annak a képe ugyanis a végtelmen lenne).

A gömbön a külső és belső tartomány közti különbség eltűnik.

Állítás

Egy síkbarajzolható gráf bármely tartománya lehet (egy másik) síkbarajzolásnál külső tartomány.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf síkba van rajzolva,  $t_i$  egy belső tartománya. Helyezzük az  $S$  gömböt a síkra úgy, hogy a  $t_i$  egy belső pontjában érints a síkot. Vetítsük "fel" a gráfot sztereografikus projekcióval. Ekkor a déli pólus esik  $t_i$  gömbi képébe. Forgassuk el a gömböt úgy, hogy az északi és déli pólus cserélődjön fel. Ekkor a sztereografikus síkra vetítésnél  $t_i$  lesz a külső tartomány.

### Euler-féle poliéder tétel (Euler formula)

A japánok a Marson rizst termelnek a XXX. században. A rizsföldeket gátak veszik körül, és a bolygó többi része egy nagy víztározó. Ahol több (legalább kettő) gát találkozik, ott gátör ház van, melyben egy gátör ül. A víztározó melletti egyik őrházban található a Főgátör.

Vetés után a rizsföldeket el kell árasztani. Ezért a gátörök egyesével felnyitják a gátakat, mindig egy olyan gátat, melynek egyik oldalán víz van, a másik oldala még még száraz.

Amikor minden rizsföld el lett árasztva, a gátörök a Főgátör tapsjelére

Megindulnak a Főgátör felé a gátakon, a lehető legrövidebb úton. (út hossza a gátzakaszok száma).

Ekkor minden felnyitáskor pontosan egy gátör indul el.

Legfeljebb egy, mert ha egy szakasz két végpontjáról  $A$  és  $B$  egymás felé indulna el, akkor nem lehetne mindkét út legrövidebb.

Legalább egy, mert ha  $A$  és  $B$  egyike sem a köztük levő gáton indul, akkor valahol az útjuk egy  $X$  gátör házánál találkozik. Az  $A$ ,  $B$ ,  $X$  által határolt földek ép gátakkal teljesen körül vannak véve, azaz vagy ők szárazak, vagy a külsejük.

A felnyitott gátzakaszok száma megegyezik a rizsföldek számával, minden nyitáskor pontosan egy új kerül víz alá.

Azaz, ha  $r$  a rizsföldek száma,  $g$  a gátörök száma,  $e$  a gátak száma, akkor

$$r + g - 1 = e.$$

Ezzel beláttuk Euler-formulát: Egy összefüggő síkbarajzolható gráfban  $t$  a tartományok,  $e$  az élek,  $n$  a csúcsok száma, akkor

$$n + t - 2 = e.$$

Gátörök

Rizsföldek és víztározó

Gátak

Főgátör nem indul el

Tétel

Ha  $G$  egyszerű, síkbarajzolható gráf, és  $n > 2$ , akkor  $e \leq 3n - 6$ .

Bizonyítás

Mivel  $G$  egyszerű, ezért minden tartományát legalább 3 él határolja. Egy él legfeljebb 2 tartományhoz tartozik.

két tartományhoz tartozik

egy tartományhoz tartozik

Számoljuk meg a  $(t_i, e_j)$  párokat, ahol  $t_i$  tartomány élé az  $e_j$  él. Legyen a számuk  $b$ .

Minden tartományt legalább 3 él határol, tehát leglább 3 párban vesz részt, ezért  $3t \leq b$ .

Minden él legfeljebb két tartományhoz tartozik, így legfeljebb két párban van benne, azaz  $b \leq 2e$ .

$3t \leq b \leq 2e$ . Euler-formulát beírva:  $3(e - n + 2) \leq 2e$ .

Tétel

Ha  $G$  egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor a minimális fokszáma legfeljebb 5, azaz

$$\delta = \min_{x \in V(G)} d(x) \leq 5$$

Bizonyítás

Tegyük fel ellenkezőleg, hogy  $\delta \geq 6$ . A fokszámok összege az élek számának kétszerese, így  $6n \leq (\text{fokszámok összege}) \leq 2e$ .

Az előző tételből viszont  $2e \leq 6n - 12$ , ellentmondás.

Állítás

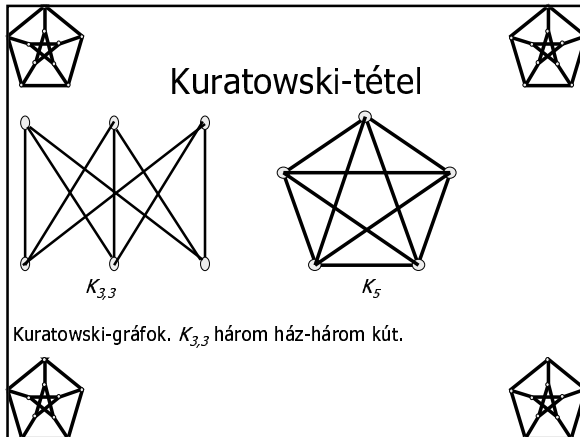
Tegyük fel, hogy egy síkbarajzolható gráfban a minimális fokszám 5. Ekkor legalább 12 5-öd fokú pontja van.

Bizonyítás

Legyen az ötödfokú pontok száma  $o$ . Ekkor a fokszámösszeg az legalább  $5o + 6(n - o)$ , azaz  $6n - o \leq 2e \leq 6n - 12$ .

Ez a korlát éles, az ikozaéder csúcs-él gráfjának 12 csúcsa van, melyek mindegyike ötödfokú.

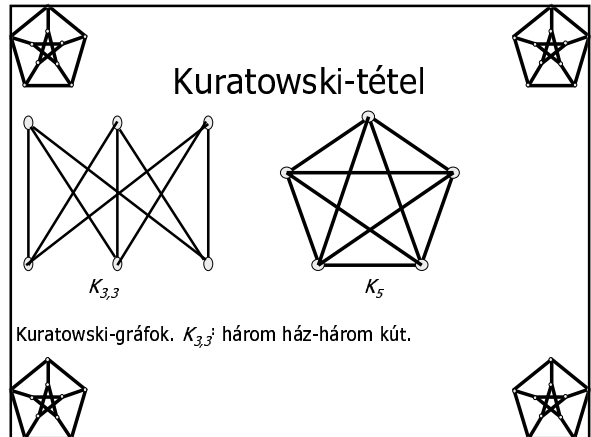
Ikozaéder síkba rajzolva (majdnem) egyenes vonalakkal



**Kuratowski-tétel**

$K_{3,3}$        $K_5$

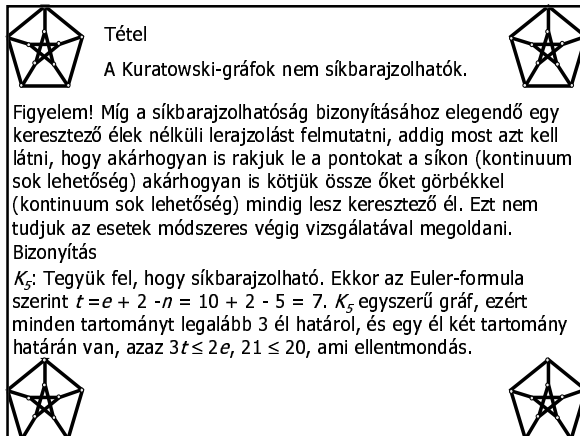
Kuratowski-gráfok.  $K_{3,3}$  három ház-három kút.



**Kuratowski-tétel**

$K_{3,3}$        $K_5$

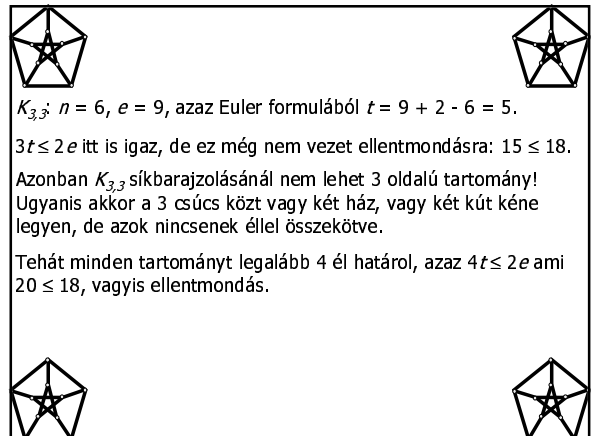
Kuratowski-gráfok.  $K_{3,3}$  három ház-három kút.



**Tétel**  
A Kuratowski-gráfok nem síkbarajzolhatók.

Figyelem! Míg a síkbarajzolhatóság bizonyításához elegendő egy keresztező él nélküli lerajzolást felmutatni, addig most azt kell látni, hogy akárhogyan is rakjuk le a pontokat a síkon (kontinuum sok lehetőség) akárhogyan is kötjük össze őket görbékkel (kontinuum sok lehetőség) mindig lesz keresztező él. Ezt nem tudjuk az esetek módszeres végig vizsgálatával megoldani.

**Bizonyítás**  
 $K_5$ : Tegyük fel, hogy síkbarajzolható. Ekkor az Euler-formula szerint  $t = e + 2 - n = 10 + 2 - 5 = 7$ .  $K_5$  egyszerű gráf, ezért minden tartományt legalább 3 él határol, és egy él két tartomány határán van, azaz  $3t \leq 2e$ ,  $21 \leq 20$ , ami ellentmondás.

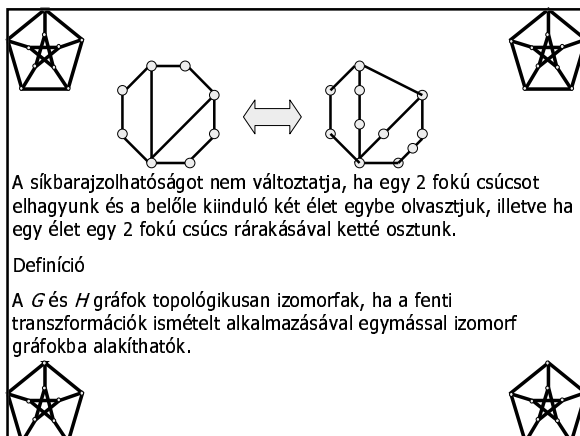


$K_{3,3}$ :  $n = 6$ ,  $e = 9$ , azaz Euler formulából  $t = 9 + 2 - 6 = 5$ .

$3t \leq 2e$  itt is igaz, de ez még nem vezet ellentmondásra:  $15 \leq 18$ .

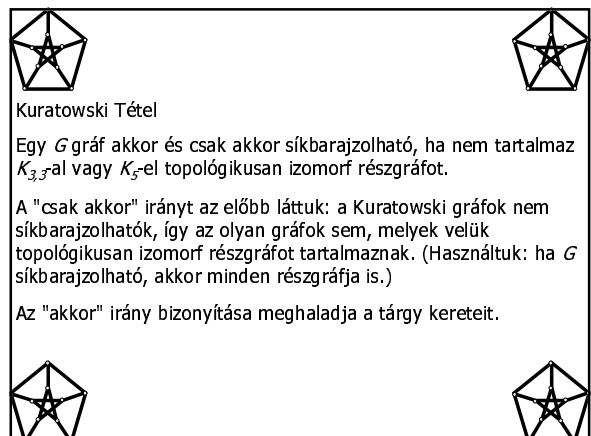
Azonban  $K_{3,3}$  síkbarajolásánál nem lehet 3 oldalú tartomány! Ugyanis akkor a 3 csúcs közt vagy két ház, vagy két kút kéne legyen, de azok nincsenek éllel összekötve.

Tehát minden tartományt legalább 4 él határol, azaz  $4t \leq 2e$  ami  $20 \leq 18$ , vagyis ellentmondás.



A síkbarajzolhatóságot nem változtatja, ha egy 2 fokú csúcsot elhagyunk és a belőle kiinduló két élet egybe olvasztjuk, illetve ha egy élet egy 2 fokú csúcs ráadásával ketté osztunk.

**Definíció**  
A  $G$  és  $H$  gráfok topológikusan izomorfak, ha a fenti transzformációk ismételt alkalmazásával egymással izomorf gráfokba alakíthatók.



**Kuratowski Tétel**

Egy  $G$  gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz  $K_{3,3}$ -al vagy  $K_5$ -el topológikusan izomorf részgráfot.

A "csak akkor" irányt az előbb láttuk: a Kuratowski gráfok nem síkbarajzolhatók, így az olyan gráfok sem, melyek velük topológikusan izomorf részgráfot tartalmaznak. (Használtuk: ha  $G$  síkbarajzolható, akkor minden részgráfja is.)

Az "akkor" irány bizonyítása meghaladja a tárgy kereteit.

