

Lineáris Leképezések

- Vektorterek közötti művelettartó leképezések.
- Mikor „ugyanaz” két vektortér
- Dimenzió egyértelműen meghatározza
- Szoros kapcsolat mátrixokkal

Definíció

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T -test feletti vektorterek. A V_1 -ből V_2 -be ható A függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha művelettartó, azaz

- (i) $\forall u, v \in V_1$ -re $A(u+v) = Au + Av$
 (ii) $\forall u \in V_1, \lambda \in T$ -re $A(\lambda u) = \lambda Au$

- V_1 minden eleméhez egyértelmű a kép.
- V_2 -beli elem ősképe nem feltétlenül egyértelmű és nem feltétlenül létezik.
- Az (i)-beli + jelek nem ugyanazt a műveletet jelölik, hasonlóan a skaláris szorzás sem ugyanaz (ii)-ben.

Tétel

- I. $A0_1 = 0_2$ ahol 0_1 V_1 nulleleme
 II. $A(-u) = -(Au)$
 III. $A(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 Au_1 + \dots + \lambda_k Au_k$

Bizonyítás

- I. $Au = A(u+0_1) = Au + A0_1 \Rightarrow -(Au) + Au = -(Au) + Au + A0_1 \Rightarrow 0_2 = A0_1$
 II. $0_2 = A(u+(-u)) = Au + A(-u)$
 III. ☺

Definíció

A lineáris leképezés V_1 -ből V_2 -be. Képtere: a képelemek halmaza. Magtere: a 0_2 -reképezett elemek halmaza.

Jelölés $\text{Im}A = \{y \in V_2 : \exists x \in V_1, Ax = y\} = \{Ax : x \in V_1\}$
 $\text{Ker}A = \{x \in V_1 : Ax = 0_2\}$

Tétel

$\text{Im}A$ altér V_2 -ben, $\text{Ker}A$ altér V_1 -ben.

Bizonyítás

$$Au = Av = 0 \Rightarrow A(u+v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$$

$$A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda 0 = 0$$

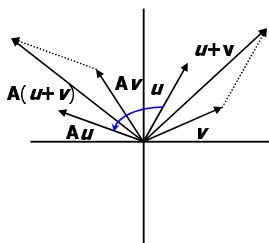
Képtér esetén hasonló.

Példák

- Legyen $V_1 = V_2$ a síkvektorok tere. Ekkor lineáris leképezés:

- ⇒ origó körüli elforgatás
- ⇒ origóból történő középpontos nagyítás
- ⇒ origón átmenő egyenesre való tükrözés
- ⇒ origón átmenő egyenesre való tetszőleges irányú vetítés

Első három esetben $\text{Ker}A = 0$, $\text{Im}A = V_2$, a negyedik esetben képtér az egyenes, magtér a vetítés irányába eső origón átmenő egyenes.



- Tetszőleges V_1 és V_2 esetén V_1 minden elemének feleltessük meg a V_2 nullelemét. Ez a nulla leképezés jelölés: 0 . Magtere a teljes V_1 képtere a 0 .

- $V_1 = V_2$ és minden elem képe önmaga. Ez az identikus leképezés. Képtere V_1 magtere 0 . Jelölés: E

- $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$, $A: f \mapsto f'$. Képtér maga a V_1 , magtér a konstans polinomok.

- V_1 egy tetszőleges n -dimenziós vektortér, V_2 a T -test elemeiből képzett szám n -esek tere. (összeadás, skalárral szorzás koordinátáiként.) Rögzítsük le V_1 egy tetszőleges bázisát, és minden V_1 -beli vektort írjunk fel ezek lineáris kombinációjaként (egyértelmű!). Az így kapott együttható n -est rendeljük a vektorhoz (koordináták).

- V_1 a valós függvények, $V_2 = \mathbb{R}$, $A: f \mapsto f(3.14159)$

Izomorfizmus

Definíció

Egy kölcsönösen egyértelmű (bijektív) lineáris leképezést izomorfizmusnak hívunk. V vektortér izomorf Z -vel, ha van $V \rightarrow Z$ izomorfizmus. Jelölés $V \cong Z$.

Izomorf vektorterek a mi szempontunkból megkülönböztethetetlenek.

(„Ugyan olyan, csak pepitában”)

Izomorfizmus eldönthető a kép és magtere alapján.

Tétel

Az $A: V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés akkor és csak akkor izomorfizmus, ha $\text{Ker} A = \mathbf{0}$ és $\text{Im} A = V_2$.

Bizonyítás

$\text{Im} A = V_2$ miatt V_2 minden eleme kép.

$$Au = Av \Rightarrow A(u-v) = \mathbf{0} \Rightarrow u-v \in \text{Ker} A \Rightarrow u = v.$$

Tétel

$$(i) \quad V \cong V$$

$$(ii) \quad V \cong Z \Leftrightarrow Z \cong V$$

$$(iii) \quad V \cong Z \text{ és } Z \cong W \Rightarrow V \cong W$$

Tehát az izomorfia ekvivalencia reláció a vektorterek között.

Bizonyítás(szerű)

Az E leképezés, egy izomorfia inverze, illetve két izomorfia egymás után alkalmazása is izomorfia.

Legyen $T^{k \times n}$ a T test feletti $k \times n$ -es mátrixok vektortere, $T^n = T^{1 \times n}$ a T elemeiből alkotott szám n -esek vektortere.

Tétel

Ha $n > 0$ és V a T test feletti n -dimenziós vektortér, akkor $V \cong T^n$.

Bizonyítás

Rendeljük egy u V -beli vektorhoz egy előre rögzített bázisban adódó koordinátáit. Ez a hozzárendelés izomorfizmus.

Tétel

Véges dimenziós U és V T -feletti vektorterek esetén

$$U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

Bizonyítás

Ha mindkét dimenzió n , akkor mindkét vektortér izomorf T^n -el.

Ha $U \cong V$, akkor van egy $A: U \rightarrow V$ izomorfizmus. Legyen u_1, u_2, \dots, u_n bázis U -ban. Legyen $v \in V$. Ekkor létezik egyértelműen $u \in U$, hogy $Au = v$. A linearitása miatt

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \Leftrightarrow v = \lambda_1 Au_1 + \dots + \lambda_n Au_n$$

Az előállítás u -ra egyértelmű, ezért v -re is az, tehát Au_1, Au_2, \dots, Au_n bázis V -ben.

Az, hogy egy leképezés lineáris, nagyon erős megkötés.

Tétel

Legyen b_1, b_2, \dots, b_n bázis a U vektortérben, valamint legyenek c_1, c_2, \dots, c_n tetszőleges elemek az ugyanazon test feletti V vektortérben. Ekkor pontosan egy olyan $A: U \rightarrow V$ lineáris leképezés létezik, melyre

$$Ab_i = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

Tehát a lineáris leképezés egy rögzített bázis elemeinek képével jellemezhető.

Bizonyítás

Legyen $u \in U$. Ekkor $u = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$ egyértelműen. Ha $(*)$ teljesül A -ra, akkor

$Au = A(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n) = \beta_1 c_1 + \dots + \beta_n c_n$, azaz Au egyértelműen meghatározott. Másfelől, az a leképezés, ami egy $u = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$ U -beli vektorhoz a $\beta_1 c_1 + \dots + \beta_n c_n$ V -beli vektort rendeli, lineáris.

Összegeztartás: Legyen $u = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$ és $v = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n$. Ekkor $u+v = (\beta_1 + \gamma_1)b_1 + \dots + (\beta_n + \gamma_n)b_n$ azaz

$$A(u+v) = (\beta_1 + \gamma_1)c_1 + \dots + (\beta_n + \gamma_n)c_n = Au + Av$$

Dimenzió tétel

Legyen U véges dimenziós és V tetszőleges vektortér T test felett, $A: U \rightarrow V$ lineáris leképezés. Ekkor

$$\dim \text{Ker} A + \dim \text{Im} A = \dim U$$

Bizonyítás

$\dim U = n$, $\dim \text{Ker} A = s$. b_1, b_2, \dots, b_s bázis $\text{Ker} A$ -ban. Ezt kiegészítjük $b_{s+1}, b_{s+2}, \dots, b_n$ vektorokkal U bázisává. Ekkor $Ab_{s+1}, Ab_{s+2}, \dots, Ab_n$ $\text{Im} A$ bázisa lesz.

Generátorrendszer: $Au \in \text{Im} A$, $u = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$
Ekkor $Au = A(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n) = \beta_1 Ab_1 + \dots + \beta_n Ab_n$
 $= \beta_{s+1} Ab_{s+1} + \dots + \beta_n Ab_n$

Lineárisan független: Tegyük fel, hogy $\gamma_{s+1} Ab_{s+1} + \dots + \gamma_n Ab_n = 0$. Ekkor $A(\gamma_{s+1} b_{s+1} + \dots + \gamma_n b_n) = 0$, azaz $x = \gamma_{s+1} b_{s+1} + \dots + \gamma_n b_n \in \text{Ker} A$. Viszont így x felírható $x = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s$ alakban is. Tehát

$$\gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_s b_s - \gamma_{s+1} b_{s+1} - \dots - \gamma_n b_n = 0$$

ami a b_1, b_2, \dots, b_n bázis volta miatt azt jelenti, hogy $\gamma_i = 0$ minden i -re.

Következmény

Legyen A a véges dimenziós V vektortér lineáris transzformációja (önmagára való lineáris leképezése).

$$\text{Im} A = V \Leftrightarrow \text{Ker} A = 0$$

$\text{Hom}(U, V)$, a lineáris leképezések vektortere

Definíció

Legyenek $A, B: U \rightarrow V$ lineáris leképezések, λ T -beli skálár. A és B összege

$$(A+B)u = Au + Bu$$

A λ skálárral való szorzata

$$(\lambda A)u = \lambda(Au)$$

Nem ugyanaz az összeadás!!!

Nem ugyanaz a skálárral való szorzás!!!

Tétel

Legyen U és V vektortér T test felett. Ekkor az összes $U \rightarrow V$ lineáris leképezés halmaza vektorteret alkot. Ezt $\text{Hom}(U, V)$ jelöli.

Bizonyítás

- Két lineáris leképezés összege, illetve egy leképezés skálárszorosa is lineáris: $(A+B)(u+v) = A(u+v) + B(u+v) = Au + Av + Bu + Bv = (A+B)u + (A+B)v$
- $\text{Hom}(U, V)$ nulleleme a 0 leképezés, ami minden U -beli vektorhoz a V -beli nullvektort rendeli. (ez lineáris)
- Egy A leképezés ellentettje $-A$, ahol $(-A)u = -(Au)$
- A többi vektortér axióma a definíciókból és U -ban, illetve V -ben teljesülő vektortér axiómákból következik.

Például $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ igazolása:

$$(\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}))\mathbf{u} = \lambda((\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u})$$

$$(\lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B})\mathbf{u} = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{u} + (\lambda\mathbf{B})\mathbf{u} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{u} + \lambda\mathbf{B}\mathbf{u}$$

A jobboldalak a V -beli (S2) axióma miatt azonosak.

Lineáris leképezések szorzása

Legyenek U, V és W ugyanazon T -test feletti vektorterek, $\mathbf{A} \in \text{Hom}(V, W)$, $\mathbf{B} \in \text{Hom}(U, V)$. \mathbf{A} és \mathbf{B} szorzata: $\mathbf{AB}: U \rightarrow W$ leképezés, melyre

$$(\mathbf{AB})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u}).$$

Lényeges: Ugyanaz!!!

Először a másodiknak írt \mathbf{B} -t alkalmazzuk!!

Két lineáris leképezés szorzata is lineáris.

A szorzás nem kommutatív, \mathbf{AB} létezése esetén \mathbf{BA} nem is biztos, hogy létezik (például, ha U, V és W mind különbözőek). A többi megszokott azonosság igaz.

Tétel

Ha λ T -beli skalár, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ tetszőleges olyan leképezések, amelyekre az alábbi egyenlőségek valamelyik oldala értelmezve van, akkor a másik oldal is értelmes, és az egyenlőség teljesül.

I $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

II $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (!!!)

III $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$

Lineáris leképezés mátrixa

$\text{Hom}(U, V)$ -beli leképezéseket mátrixokkal jellemezzük. A leképezés megadható U -beli báziselemek képével, melyek felírhatók V -beli báziselemek lineáris kombinációiként.

Definíció

Legyen U egy bázisa $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ a V egy bázisa pedig $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$. Egy $\mathbf{A} \in \text{Hom}(U, V)$ leképezés $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ és $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ bázispár szerinti mátrixán azt a $k \times n$ -es mátrixot értjük, amelyeknek j -ik oszlopában az $\mathbf{A}\mathbf{a}_j$ vektornak a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ bázis szerinti koordinátái állnak. Jele $[\mathbf{A}]_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$

Legyen

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_1 = \alpha_{11}\mathbf{b}_1 + \alpha_{21}\mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_{k1}\mathbf{b}_k$$

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_2 = \alpha_{12}\mathbf{b}_1 + \alpha_{22}\mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_{k2}\mathbf{b}_k$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_n = \alpha_{1n}\mathbf{b}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_{kn}\mathbf{b}_k$$

Ekkor

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

\mathbf{a}_j

\mathbf{b}_i

Szükséges értelmezni egy vektor mátrixát.

Definíció

Legyen $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ bázis a V vektortérben. Minden $\mathbf{v} \in V$ vektor egyértelműen írható $\mathbf{v} = \gamma_1\mathbf{c}_1 + \dots + \gamma_r\mathbf{c}_r$ alakban. A \mathbf{v} vektornak a $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ bázisszerinti mátrixán (koordináta vektorán) a

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{pmatrix} \quad (\text{oszlop})\text{mátrixot értjük}$$

Mátrix szorzás

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \beta_{1i} \alpha_{i1} & \sum_{i=1}^k \beta_{1i} \alpha_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^k \beta_{1i} \alpha_{in} \\ \sum_{i=1}^k \beta_{2i} \alpha_{i1} & \sum_{i=1}^k \beta_{2i} \alpha_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^k \beta_{2i} \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k \beta_{ri} \alpha_{i1} & \sum_{i=1}^k \beta_{ri} \alpha_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^k \beta_{ri} \alpha_{in} \end{pmatrix}$$

Tétel

Legyen az U bázisa a_1, a_2, \dots, a_n a V egy bázisa pedig b_1, b_2, \dots, b_k , $A \in \text{Hom}(U, V)$ és $v \in U$. Ekkor

$$[Av]_b = [A]_{a,b} [v]_a$$

Bizonyítás

Legyen

$$[v]_a = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$[A]_{a,b} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ekkor } Av &= A(\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n) = \gamma_1 (Aa_1) + \dots + \gamma_n (Aa_n) = \\ &= \gamma_1 (\alpha_{11} b_1 + \alpha_{21} b_2 + \dots + \alpha_{k1} b_k) + \dots + \gamma_n (\alpha_{1n} b_1 + \alpha_{2n} b_2 + \dots + \alpha_{kn} b_k) = \\ &= (\alpha_{11} \gamma_1 + \alpha_{12} \gamma_2 + \dots + \alpha_{1n} \gamma_n) b_1 + \dots + (\alpha_{k1} \gamma_1 + \alpha_{k2} \gamma_2 + \dots + \alpha_{kn} \gamma_n) b_k
 \end{aligned}$$

Tétel

Ha $\dim U = n$, $\dim V = k$, akkor $\text{Hom}(U, V) \cong T^{k \times n}$

Bizonyítás

Legyen az U bázisa a_1, a_2, \dots, a_n a V egy bázisa pedig b_1, b_2, \dots, b_k . Az $A \in \text{Hom}(U, V)$ leképezésnek feleltessük meg az adott bázispár szerinti mátrixát:

$$A \mapsto [A]_{a,b}$$

1. Minden $A \in \text{Hom}(U, V)$ -hez egyértelműen hozzárendeltünk egy $k \times n$ -es mátrixot.
2. Bármely mátrixnak pontosan egy ősképe van, ugyanis a mátrix pont a báziselemek képét adja meg.
3. $(A+B)a_j = Aa_j + Ba_j$, és a rögzített V -beli bázis miatt az $[A+B]$ mátrix j -ik oszlopa éppen az $[A]$ és $[B]$ j -ik oszlopának összege lesz, azaz $[A+B] = [A] + [B]$

Tétel

Legyen U egy bázisa a_1, a_2, \dots, a_n a V egy bázisa b_1, b_2, \dots, b_k W egy bázisa pedig c_1, c_2, \dots, c_r . Legyen továbbá $A \in \text{Hom}(V, W)$, $B \in \text{Hom}(U, V)$. Ekkor

$$[AB]_{a,c} = [A]_{b,c} [B]_{a,b}$$

A szorzat leképezés mátrixa a leképezések mátrixainak szorzata.

Bizonyítás

$$[A]_{b,c} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rk} \end{pmatrix} \text{ és } [B]_{a,b} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (AB)a_j &= A(Ba_j) = A(\beta_{1j} b_1 + \dots + \beta_{kj} b_k) = \\ &= \beta_{1j} Ab_1 + \dots + \beta_{kj} Ab_k = \beta_{1j} (\alpha_{11} c_1 + \dots + \alpha_{r1} c_r) + \\ &\dots + \beta_{kj} (\alpha_{1k} c_1 + \dots + \alpha_{rk} c_r) = (\beta_{1j} \alpha_{11} + \dots + \beta_{kj} \alpha_{1k}) c_1 + \dots \\ &+ (\beta_{1j} \alpha_{r1} + \dots + \beta_{kj} \alpha_{rk}) c_r
 \end{aligned}$$

Itt c_j együtthatója pont $\beta_{1j} \alpha_{11} + \dots + \beta_{kj} \alpha_{1k}$ ami pont az $[A]$ mátrix k -ik sorának és $[B]$ mátrix j -ik oszlopának szorzata.