

Bevezetés a Számításelméletbe II. 3. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi és Információelméleti Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 február 26.

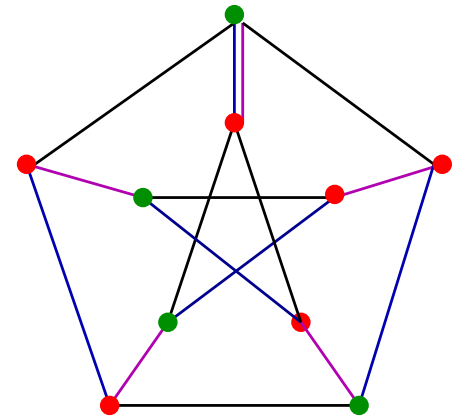
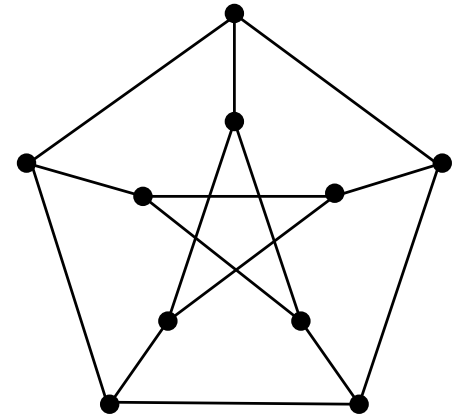
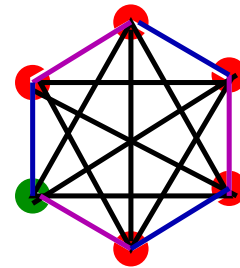
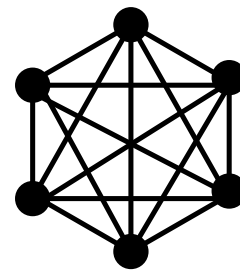
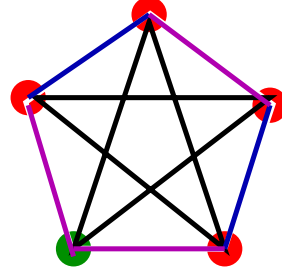
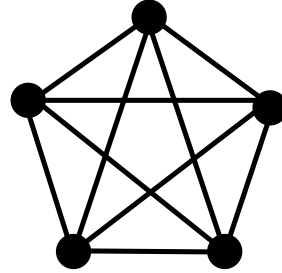
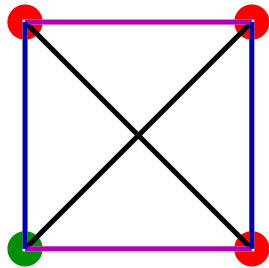
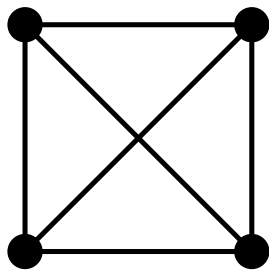
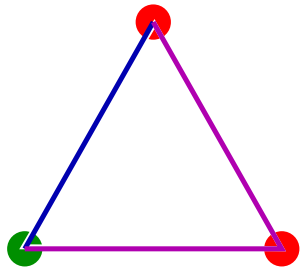
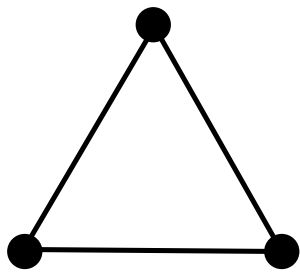
König és Gallai tételei

1. Definíció. Jelöljük $\nu(G)$ -vel a G gráfban található független élek maximális számát. $X \subseteq V(G)$ egy lefogó ponthalmaz, ha G minden élének legalább egyik végpontját tartalmazza. A lefogó pontok minimális számát $\tau(G)$ -vel jelöljük. $Y \subseteq E(G)$ lefogó élhalmaz, ha minden pontot lefog. A lefogó élek minimális számát $\rho(G)$ jelöli. $X \subseteq V(G)$ független ponthalmaz, ha nincs benne két szomszédos pont. A független pontok maximális száma $\alpha(G)$.

Megjegyzés: Ha X független $\left\{ \begin{array}{c} \text{él-} \\ \text{pont-} \end{array} \right\}$ halmaz és $X' \subseteq X$, akkor X' is független $\left\{ \begin{array}{c} \text{él-} \\ \text{pont-} \end{array} \right\}$ halmaz.

Ha X lefogó $\left\{ \begin{array}{c} \text{él-} \\ \text{pont-} \end{array} \right\}$ halmaz és $X \subseteq X'$, akkor X' is lefogó $\left\{ \begin{array}{c} \text{él-} \\ \text{pont-} \end{array} \right\}$ halmaz.

Példák



$$\alpha(K_n) = 1 \quad \tau(K_n) = n - 1 \quad \nu(K_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\rho(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$$\alpha = 4 \quad \tau = 6$$

$$\nu = 5 \quad \rho = 5$$

Egyszerű becslések

2. Tétel. $\nu(G) \leq \tau(G)$ minden G gráfra.

BIZONYÍTÁS Legyen M egy maximális méretű független élhalmaz. M éleinek lefogatásához már $\nu(G) = |M|$ pontra van szükség, ezért $\tau(G) \geq |M| = \nu(G)$

3. Tétel. $\alpha(G) \leq \rho(G)$ minden G gráfra.

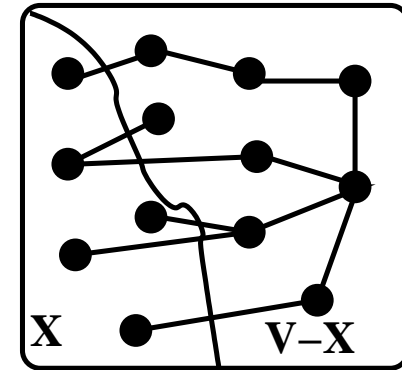
BIZONYÍTÁS Legyen M egy maximális méretű független pontthalmaz. M pontjainak lefogatásához már $\alpha(G) = |M|$ élre van szükség, ezért $\rho(G) \geq |M| = \alpha(G)$

Általában nem teljesül az egyenlőség, például páratlan n -re K_n mindkét esetben szigorú egyenlőtlenséget ad.

4. Tétel (Gallai). **Gallai tételei**
 $\tau(G) + \alpha(G) = v(G) = |V(G)|$ minden hurokmentes G gráfra.

BIZONYÍTÁS Egy X halmaz pontjai akkor és csak akkor függetlenek, ha a $V(G) - X$ halmaz lefogó ponthalmaz. $\implies \tau(G) \leq |V(G) - X|$ minden X független ponthalmazra. $\implies \tau(G) + \alpha(G) \leq v(G)$.

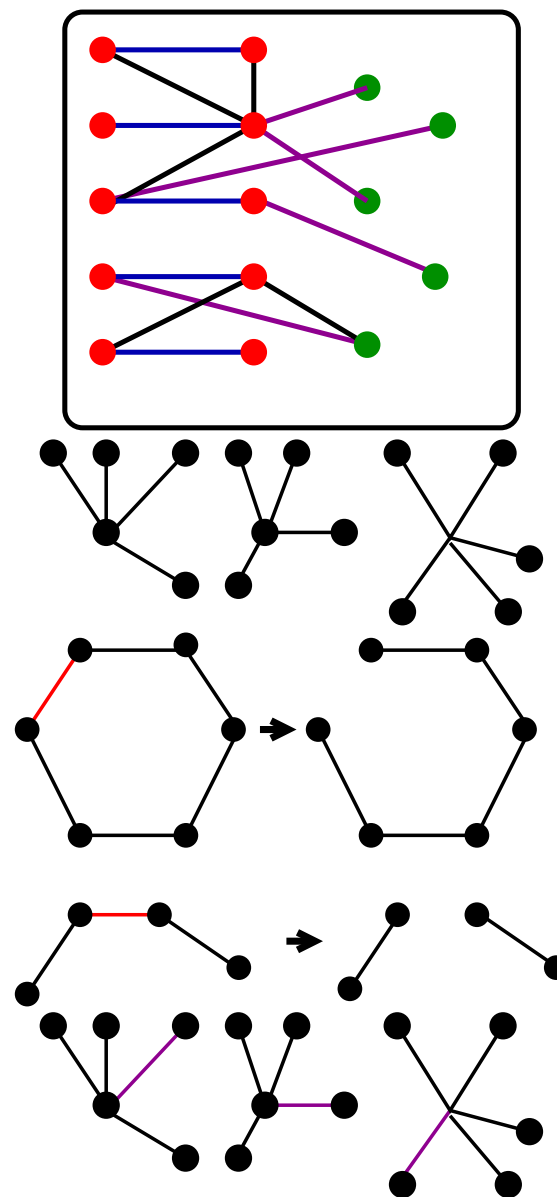
Hasonlóan $\alpha(G) \geq |V(G) - Y|$ minden Y lefogó ponthalmazra. $\implies \tau(G) + \alpha(G) \geq v(G)$



5. Tétel (Gallai). $\nu(G) + \rho(G) = v(G)$ minden G gráfra, amelyben nincs izolált pont.

BIZONYÍTÁS Egy $\nu(G)$ elemű X független élhalmaz lefog $2\nu(G)$ különböző pontot. A többi pont (mivel nincs köztük izolált) lefogható $v(G) - 2\nu(G)$ éllel. $\implies \nu(G) + v(G) - 2\nu(G) = v(G) - \nu(G) \geq \rho(G)$.

Ha Y egy minimális lefogó élhalmaz, akkor Y néhány (mondjuk k darab) diszjunkt csillag egyesítése. Ha Y tartalmazna kört, akkor annak bármely élét, ha pedig 3 hosszú utat, akkor annak középső élét el lehetne hagyni Y -ből. $\implies \rho(G) = v(G) - k$ (k komponensű erdőről van szó). Vegyünk ki minden csillagból egy élet, a kapott élhalmaz független. Tehát $\nu(G) \geq k = v(G) - \rho(G)$.



König tétele

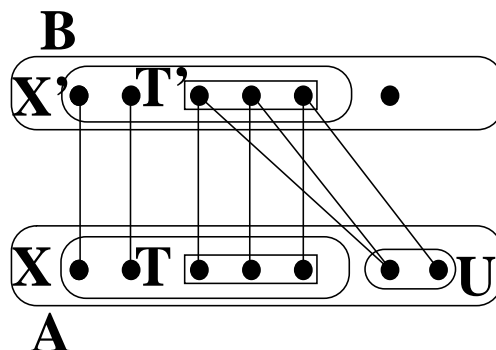
6. Tétel (König). *Ha $G = (A, B)$ páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. Ha nincs G -ben izolált pont, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$ is teljesül.*

BIZONYÍTÁS $\nu(G) = \tau(G)$: Elég $\tau(G) \leq \nu(G)$ -t látni, mert a 2. Tétel szerint $\tau(G) \geq \nu(G)$.

$\alpha(G) = \rho(G)$: Gallai két tétele miatt $\nu(G) + \rho(G) = \tau(G) + \alpha(G)$.

Legyen M párosítás, ami nem növelhető javító úttal. $U = A - X$, legyen T' azon B -beli pontok halmaza, amelyek elérhetők U -ból alternáló úttal.

Álljon T a T' -beli pontok párjaiból, $T \subseteq X$.



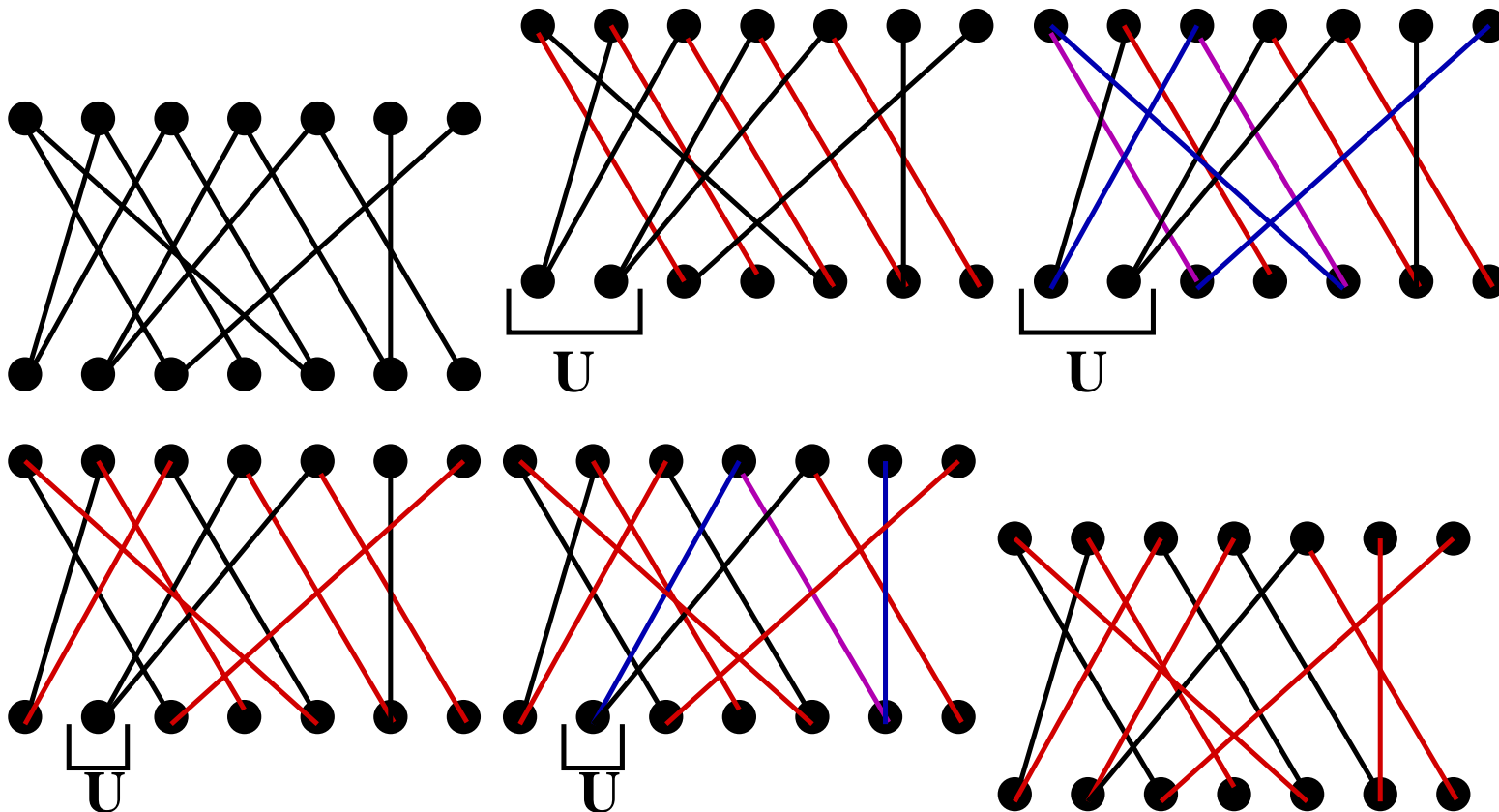
$N(T) = T'$: Világos, hogy $T' \subseteq N(T)$. $\{x, y\}$ él, hogy $x \in T$ és $y \notin T'$. Legyen P egy alternáló út $u \in U$ -ból x' -be. Ekkor P nem megy át x -en(!).

P -t folytatva $\{x', x\}$ -szel majd $\{x, y\}$ -nal egy alternáló utat kaptunk u -ból $y \notin T'$ -be, ellentmondás.

Legyen $Y = T' \cup (X - T)$. Ennek a halmaznak éppen $|M|$ pontja van. Ezek minden élet lefognak, mert $T \cup U \subseteq A$ halmazra $N(T \cup U) = T'$. $\implies \tau(G) \leq |M| \leq \nu(G)$.

Magyar módszer újra

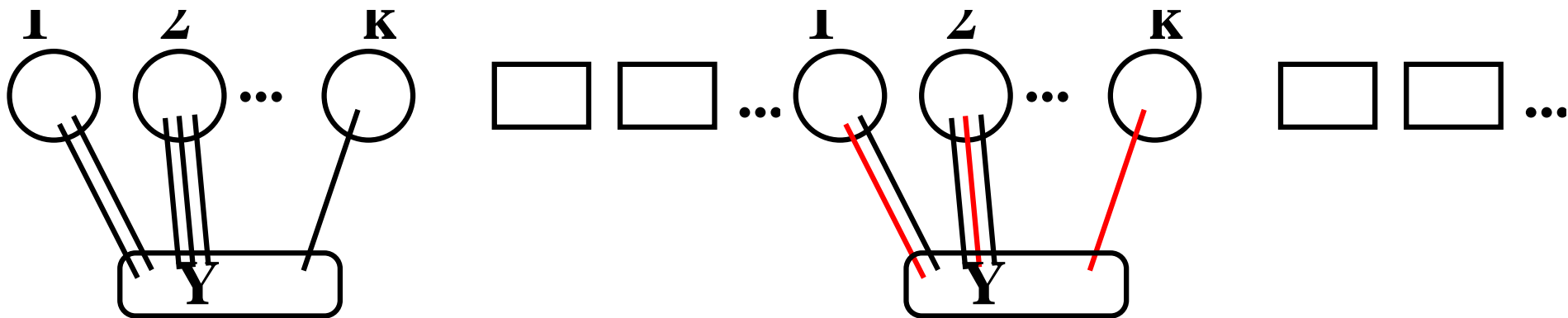
Az előző bizonyítás szerint a Magyar módszer valóban megtalál egy maximális párosítást és ugyanakkor egy minimális lefogó ponthalmazt egy tetszőleges G páros gráfban.



Párosítás tetszőleges gráfban

7. Állítás. *Ha egy G gráfból elhagyva az Y pontthalmazt $|Y| < k$ páratlan pontszámú komponens keletkezik, akkor G -ben nincs teljes párosítás.*

BIZONYÍTÁS A páratlan komponensekből a teljes párosításban minimum egy él kimegy és csak Y -ba futhatna be.



Speciálisan, ha $Y = \emptyset$, akkor G -nek csupa páros pontszámú komponense kell legyen.

Tutte tétele

$c_p(H)$ -val jelöljük a H gráf páratlan (vagyis páratlan sok pontot tartalmazó) komponenseinek számát.

8. Tétel (Tutte). *Egy G gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha minden $X \subseteq V(G)$ -re $c_p(G - X) \leq |X|$, azaz akárhogy hagyunk el a gráfból néhány pontot, a maradékban a páratlan komponensek száma ennél több nem lehet.*

BIZONYÍTÁS Fakultatív, lásd új jegyzet.

Tutte tétel egy alkalmazása: Petersen tétele

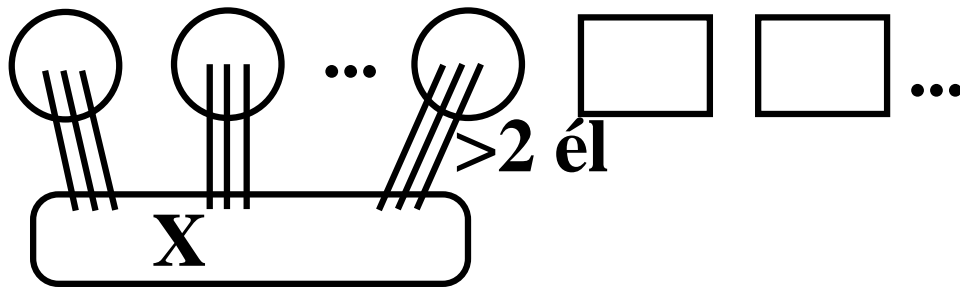
9. Definíció. *Egy gráf 2-szeresen összefüggő, ha bárhogy hagyunk el a gráfból 2-nél kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő.*

10. Tétel (Petersen). *Ha G 3-reguláris, 2-szeresen összefüggő gráf, akkor létezik benne teljes párosítás.*

Kedvencünk, a Petersen-gráf ilyen!

BIZONYÍTÁS Legyen $X \subset V(G)$ tetszőleges. Ekkor X és $G - X$ egy páratlan komponense közt legalább 3 él fut: Pontosan kettő ugyanis nem futhat (a páratlan komponens minden pontjából 3 él indul ki, ez összesen páratlan, a komponensen belül futó éleket kétszer kell levonni, így páratlan szám marad), ha viszont csak egy futna, akkor ezt az élet elhagyva szétesne a gráf, vagyis nem lenne 2-szeresen élösszefüggő.

Jelöljük t -vel az összes olyan él számát, amely az X halmaz és valamelyik páratlan komponens között fut. Az előbbiek szerint így $t \geq 3c_p(G - X)$. Mivel G 3-reguláris, $t \leq 3|X|$. Ezeket összevetve kapjuk, hogy $c_p(G - X) \leq |X|$. Így pedig a Tutte-tételből következik az állítás.



Javító utak újra

Egy páratlan hosszú út *javító út* egy M párosításra nézve, ha minden második éle M -beli, és első (és utolsó) éle nem M -beli.

11. Tétel (Berge). *Akkor és csak akkor létezik G -ben javító út egy M párosításra nézve, ha M nem maximális élszámú párosítás.*

BIZONYÍTÁS Ha van javító út, akkor M nyilván nem maximális, hiszen a javító út mentén megcserélve az éleket, eggyel nagyobb párosításhoz jutunk.

Tegyük fel, hogy nem létezik javító út, de van egy N párosítás, hogy $|N| > |M|$.

Feltehetjük, hogy $|N| = |M| + 1$. Tekintsük az $M \triangle N = (M \cup N) - (M \cap N)$ élhalmaz által meghatározott H részgráfot.

Ez csak izolált pontokból, páros körökből és utakból állhat. Mivel azonban $|N| = |M| + 1$, $|E(H)|$ páratlan, így H -ban kell lenni páratlan útnak is. De $|N| > |M|$, így van olyan páratlan út is amelynek első és utolsó éle N -beli. Ez pedig épp egy javító út.

