

Gráfok és mátrixok

Szomszédsági mátrix

n pontú G gráf esetén $n \times n$ -es $A(G) = (a_{ij})$ mátrix.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha az } i - \text{ik és } j - \text{ik pont nem szomszédos} \\ k, & \text{ha az } i - \text{ik és } j - \text{ik pont között } k \text{ darab párhuzamos él halad} \\ l, & \text{ha } i = j \text{ és az } i - \text{ik ponthoz } l \text{ darab hurokél illeszkedik} \end{cases}$$

Az $A(G)$ mátrix a G gráf szomszédsági mátrixa.

Ha G irányítatlan gráf, akkor $A(G)$ szimmetrikus mátrix.

Ha G irányított gráf, akkor a_{ij} az i kezdőpontú j végpontú élek száma. Ekkor $A(G)$ nem feltétlenül szimmetrikus mátrix.

Legyen $A = A(G)$. Ekkor $A^2 = (c_{ij})$ esetén $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{kj}$

ennyi él megy i -ből k -ba

ennyi él megy k -ból j -be

Tehát $a_{ik} \cdot a_{kj}$ az i -ből j -be a k -n átmenő 2 hosszú séták száma. Azaz c_{ij} az i -ből j -be menő összes 2 hosszú séták száma.

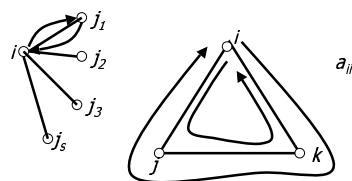
Állítás

Legyen $A = A(G)$. Ekkor $A^t = (m_{ij})$ esetén m_{ij} az i -ből j -be menő t élű séták száma.

Bizonyítás teljes indukcióval.

Ha G egyszerű irányítatlan gráf, akkor $A(G)^2$ diagonális elemei pont az egyes pontok fokszámai.

Ha G nem tartalmaz hurokéleket, akkor $A(G)^3$ diagonális elemeinek összege a G -ben található 3 hosszú körök hatszorosa.



Gráfok és sajátértékek

$A(G)$ sajátértékeiből sok, a G gráfra vonatkozó információ olvasható ki.

Állítás

Legyen az $A(G)$ legnagyobb sajátértéke λ , a maximális fok G -ben Δ . Ekkor $\lambda \leq \Delta$, és reguláris gráfra egyenlőség áll.

Megjegyzés

Irányítatlan gráfra $A(G)$ szimmetrikus mátrix, belátható, hogy \mathbb{R}^n -nek van $A(G)$ sajátvektoraiból álló bázisa és minden sajátértéke valós.

Bizonyítás

Legyen $A(G)$ legnagyobb sajátértéke λ , egy hozzá tartozó sajátvektor $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ (az \mathbb{R}^n szokásos koordináta-rendszerében). Feltehető, hogy $\max |v_i| = v_k = 1$. Ekkor

$$A(G) \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v} \text{ melynek } k\text{-ik koordinátája } \lambda = a_{k1}v_1 + a_{k2}v_2 + \dots + a_{kn}v_n \leq a_{k1} + a_{k2} + \dots + a_{kn} = k\text{-ik pont fokszáma} \leq \Delta.$$

Ha most G r -reguláris, akkor $A(G)$ minden sorában az elemek összege r . Ez azt jelenti, hogy $A(G) \cdot (1, 1, \dots, 1)^T = (r, r, \dots, r)^T$, azaz r egy sajátérték.

Illeszkedési mátrix

Villamosságtani szempontból legfontosabb mátrixreprezentáció. Legyen G egy irányított gráf, n ponton e éllel. Az $n \times e$ -es $B(G)$ mátrixot a G gráf illeszkedési mátrixának nevezzük, ha

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j\text{-ik él nem illeszkedik az } i\text{-ik ponthoz} \\ 1, & \text{ha a } j\text{-ik él kezdőpontja az } i\text{-ik pont} \\ -1, & \text{ha a } j\text{-ik él végpontja az } i\text{-ik pont} \end{cases}$$

$b_{ij} = 1$, ha a j -ik él az i -ik ponthoz illeszkedő hurokél. Irányítatlan esetben az él kezdő és végpontjánál is 1 a mátrix elem.

Példa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tétel

Az n pontú c összefüggő komponensből álló, hurokélmentes irányított gráf illeszkedési mátrixának rangja $n-c$.

Összefüggőség irányított gráfban: az éleket irányítás nélkül tekintjük, és akkor ugyanaz, mint irányítatlan esetben.

Bizonyítás

Ha $c > 1$, akkor komponensenként sorolva fel a pontokat és éleket, $B(G)$ blokkdiagonális szerkezetű lesz.

C_1		0
0		C_c

Elég tehát egy p pontú összefüggő komponensre belátni, hogy a neki megfelelő blokk rangja $p-1$.

Egy ilyen blokk sorainak száma p , és a sorok összege $(0, 0, \dots, 0)$, mert minden oszlopban pont egy $+1$ és egy -1 áll. (nincs hurokél, minden élnek pontosan egy kezdő és egy végpontja van, és ezek különbözőek): a rang tehát legfeljebb $p-1$.

Legyen F egy feszítőfa ebben a komponensben: $p-1$ élű. Legyen v_1 az F egy elsőfokú pontja, e_1 a hozzá illeszkedő él. Ekkor $(F - \{v_1\})$ is egy fa, legyen v_2 egy elsőfokú pontja és e_2 a hozzá illeszkedő él. Általában, v_{i+1} legyen az $(F - \{v_1, v_2, \dots, v_i\})$ fa egy elsőfokú pontja, e_{i+1} a hozzá illeszkedő él. Ha a blokk sorait v_1, v_2, \dots, v_p sorrendben soroljuk fel, az oszlopait pedig az e_1, e_2, \dots, e_{p-1} felsorolással kezdjük, akkor a mátrix megfelelő $p \times p-1$ -es része a következő alakú:

$$\begin{matrix} v_1 & \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{p-1} \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \pm 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix} \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{matrix}$$

Azaz $p-1$ lineárisan független oszlopot tiáltunk.

Tétel

Vegyük a p pontú összefüggő hurokél mentes irányított G gráf illeszkedési mátrixában $p-1$ oszlopot. Ezek pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a megfelelő $p-1$ él G egy feszítőfáját alkotja.

Bizonyítás

Az előző tétel szerint, ha fa, akkor lineárisan független. Tegyük fel, hogy van egy kör, azaz az e_1, e_2, \dots, e_p élek kört alkotnak ebben a sorrendben.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -e \\ -a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & e \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d, e \in \{-1, 1\}$

Az e_1, e_2, \dots, e_p éleknek megfelelő oszlopokban a többi elem 0.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -e \\ -a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & e \end{pmatrix} a^2$$

Legyenek az oszlopok u_1, u_2, \dots, u_{p-1} a diagonálisban álló elemek a_1, a_2, \dots, a_p . Ekkor $a_1 u_1 + \dots + a_p u_p = 0$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -e \\ -a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & e \end{pmatrix}$$

$$a^2 - e^2 = -a^2 + b^2 = \dots = -d^2 + e^2 = 0$$

Legyenek az oszlopok u_1, u_2, \dots, u_p a diagonálisban álló elemek a_1, a_2, \dots, a_p . Ekkor $a_1 u_1 + \dots + a_p u_p = 0$.

A feszítőfához tartozó $p \times p-1$ -es részmatrix bármely sorát elhagyva a maradék determinánsa ± 1 , ugyanis minden esetben pontosan egy nemnulla kifejtési tag van.

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{matrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{p-1} \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \pm 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

0

elhagyott sor

Tétel

Hagyjunk el a G összefüggő p pontú gráf illeszkedési matrixából egy tetszőleges sort. A keletkező B_0 matrixból képzett $B_0 \cdot B_0^T$ matrix determinánsa éppen a G feszítőfáinak száma.

A bizonyításhoz használjuk:

Tétel (Binet, Cauchy)

Ha M egy $p \times r$ -es, N egy $r \times p$ -es matrix (ahol $p \leq r$), akkor az $M \cdot N$ matrix determinánsa $\sum \det(M_i) \det(N_i)$ ahol M_i az M valamely p oszlopából, N_i pedig N ugyanazon sorszámu soraiból áll, és a szummázás az összes lehetséges p elemű oszlophalmazra történik.

Példa

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & g & h \\ d & e & i & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & g & h \\ d & f & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & i & j \\ e & f & k & l \end{vmatrix}$$

B_0 -ból $p-1$ oszlopot kivéve, pontosan a feszítőfának megfelelő determinánsa lesz nem nulla, mégpedig ± 1 . B_0^T megfelelő soraiból álló részmatrix pont ennek transzponáltja, azaz a determinánsa ugyanaz, azaz a kettő szorzata $+1$. Pontosán annyi $+1$ -et adunk össze, ahány különböző feszítőfa van.

Ha $B_0 \cdot B_0^T = (d_{ij})$, akkor d_{ij} meghatározható

$$d_{ij} = \begin{cases} \text{az } i - \text{ik pont foka,} & \text{ha } i = j \\ \text{az } i \text{ és } j \text{ pontok közötti bármilyen irányban} \\ \text{haladó élek számának } (-1) - \text{szerese,} & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Ugyanis B_0 i -ik sorát szorozzuk a j -ik sorával, hogy d_{ij} -t kapjuk.

Ezt felhasználjuk Cayley tételének újabb bizonyításához.

Az n pontú teljes gráf

$$B_0 \cdot B_0^T = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$|B_0 \cdot B_0^T| = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Körmatrix

Ha a G irányított gráf egy 2 pólusú alkatrészekből álló hálózat kapcsolási gráfja (irányítás: mérőirányok), akkor Kirchoff csomóponti törvényei (áram egyenletek) a $B(G) \cdot i = 0$ alakban írható, ahol az i vektor elemei az egyes alkatrészek áramai.

Kirchoff feszültség egyenleteit a körmatrix segítségével lehet leírni: $C \cdot u = 0$

Írjuk elő minden egyes kör "körüljárási irányát" (tetszőlegesen, majd rögzítsük.) Ha G -nek k darab köre van, akkor $C(G) = (c_{ij})$ egy $k \times k$ -es matrix, melyre $c_{ij} = 0$, ha a j -ik él nem része az i -ik körnek, $c_{ij} = 1$, ha j -ik él benne van az i -ik körben és annak körüljárási irányába mutat, $c_{ij} = -1$, ha j -ik él benne van az i -ik körben és annak körüljárási irányával ellenkező irányba mutat.



Megjegyzés

A szomszédsági és az illeszkedési mátrixok izomorfia erejéig meghatározzák a gráfot. A körmátrix nem, például egy síkbarajzolható gráf két különböző (nem izomorf módon) lerajzolt duálisának ugyanaz a körmátrixa. Általában két gyengén izomorf gráfnak ugyanaz a körmátrixa, ha a körüljárási irányokat megfelelően jelöljük ki.

Tétel

Az n pontú, e élű, c komponensű irányított gráf körmátrixának rangja $e - n + c$.



Tétel

Tekintsünk a p pontú, e élű összefüggő irányított gráf körmátrixában $e - p + 1$ oszlopot. Ezek pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a megfelelő $e - p + 1$ él a G egy feszítőfájának komplementere.



Vágásmátrix



A körmátrixhoz hasonlóan definiálható: Minden vágás egy komponenset vág szét X_1, X_2 részhalmazokra. Egy (u, v) él irányítása megegyezik a vágással, ha $u \in X_1$ és $v \in X_2$, ellentétes vele, ha $u \in X_2$ és $v \in X_1$.

Tétel

Legyen B, C és Q rendre egy hurokmentes irányított gráf illeszkedési, kör-, illetve vágásmátrixa. Tegyük fel, hogy oszlopaik ugyanabban a sorrendben felelnek meg G éleinek. Ekkor

$$B \cdot C^T = 0 \text{ és } Q \cdot C^T = 0.$$