






Gráfelmélet

Alapfogalmak

Definíció



Egy gráf egy rendezett pár, $G=(V,E)$, ahol V egy nemüres halmaz, E pedig az ebből a halmazból képezett (rendezetlen) párok egy listája.

V elemeit pontoknak, illetve csúcsoknak nevezzük, E elemeit pedig éleknek.

Egy G gráf pontjainak halmaza $V(G)$, éleinek halmaza $E(G)$, ezek számossága rendre $|V(G)|$, illetve $|E(G)|$.

Rendezetlen pár: $\{u,v\}$, ahol $u,v \in V$ és $u=v$ megengedett.

Lista: Egy adott $\{u,v\}$ rendezetlen pár többször is szerepelhet.



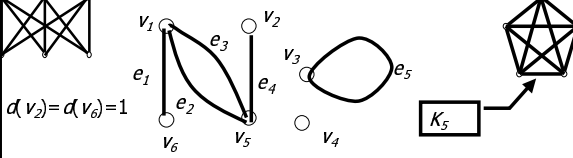



Ha $ae \in E$ az $\{u,v\}$ párnak felel meg, akkor u és v az e két végpontja. Ha $u=v$, akkor e hurokél.

Ha több különböző él is ugyanannak az $\{u,v\}$ párnak felel meg, akkor azok párhuzamos vagy többszörös élek.

Ha egy gráfban nincs többszörös él, vagy hurokél, akkor egyszerű gráfnak nevezzük.

Az e és f élek szomszédosak, ha van közös végpontjuk. Az u és v pontok szomszédosak, ha $\{u,v\} \in E$. Az u csúcs illeszkedik az e élre, ha annak egyik végpontja.



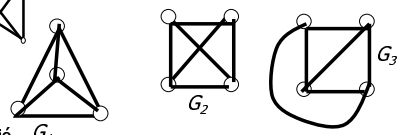
$d(v_2)=d(v_6)=1$

Egy pont izolált pont, ha nincs vele szomszédos pont, azaz nem illeszkedik rá él. Egy pontra illeszkedő élek száma a pont fokszáma (hurokél kettőt számít). v fokszámát $d(v)$ jelöli.

Maximális fokot Δ -val, a minimális fokot δ -val jelöljük. k -reguláris a gráf, ha minden pont foka k . Ha egy n pontú egyszerű gráf bármely két pontja szomszédos, akkor az az n -pontú teljes gráf, jele K_n .

Példa

$G=(V,E)$. $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$. e_2 és e_3 párhuzamos, e_5 hurokél, v_4 izolált pont. $d(v_1)=d(v_5)=3$, $d(v_2)=2$.

Definíció G_1

A $G=(V,E)$ és a $G_1=(V_1,E_1)$ gráfok izomorfak, ha van egy $f:V \rightarrow V_1$ bijekció (kölcsonősen egyértelmű ráképezés), hogy



$$\forall u,v \in V: \{u,v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u),f(v)\} \in E_1$$

Ekkor f egy izomorfizmus a két gráf között. Jelölés: $G \sim G_1$.

Ha adott egy f izomorfizmus, akkor azt könnyű ellenőrizni, hogy tényleg az-e, azaz hogy a két gráf izomorf-e. Azonban az izomorfizmus megtalálása nagyon nehéz!

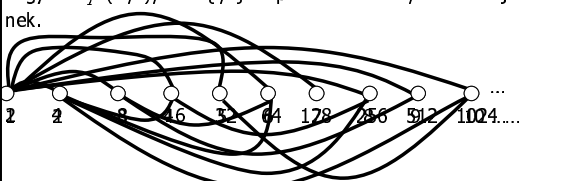
Példa

$G \sim G_2 \sim G_3$






Példa

Legyen $G_1=(\mathbb{N},E)$, ahol $\{i,n\} \in E$ pontosan akkor, ha i osztója n -nek.



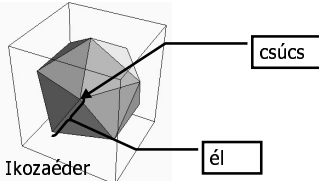
Legyen $G_2=(V_2,E_2)$, ahol $V_2=\{2,4,8,16,32,\dots,2^n,\dots\}$ és $\{a,b\} \in E$ pontosan akkor, ha b az a hatványa. Ekkor $G_1 \sim G_2$ az $f:\mathbb{N} \rightarrow V_2$ leképezés, melyre $f(n)=2^n$, izomorfizmus.



Példa

K_n egy n -1-reguláris gráf. A tetraéder csúcs-él gráfja 3-reguláris, ráadásul izomorf K_4 -el.

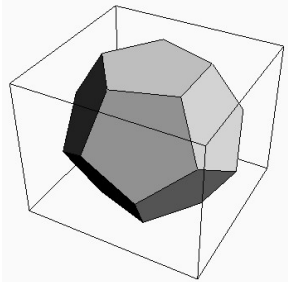
Az ikozaéder csúcs-él gráfja 5-reguláris. (Ez egy extrémális gráf olyan értelemben, hogy a minimális foka a lehető legnagyobb az olyan gráfok között, melyek konvex testek csúcs-él gráfjai)





Ikozaéder

A dodekaéder csúcs-él gráfja pedig 3-reguláris.





Definíció



A $G'=(V',E')$ gráf a $G=(V,E)$ gráf részgráfja, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$, valamint egy pont és egy él pontosan akkor illeszkedik egymásra G' -ben, ha G -ben illeszkednek.

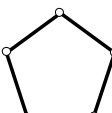
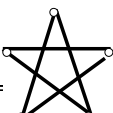
Példa


Ha G az  akkor  egy részgráfja.



Definíció

A G' részgráf (G -beli) komplementere az a G'' részgráf, melyre $V''=V$ és $E''=E-E'$. Egy G gráf komplementerén azt a G gráfot értjük, amelyik a G gráf $K_{V(G)}$ teljes gráfbeli komplementere.

A $G \cong$  gráf komplementere $G' \cong$ 



$K_5 =$ 






Definíció

G' a G feszített részgráfja, ha E' mindazon E -beli élekből áll, melyek mindkét végpontja V' -ben van.

Példa

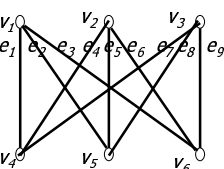
$G =$  $G \cong$ 

Definíció

Egy $(v_1, e_{11}, v_{11}, e_{21}, v_{21}, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k)$ sorozatot élsorozatnak vagy sétának nevezünk, ha e_i a v_{i-1} -t és v_i -t összekötő él. Ha $v_0 = v_k$ akkor a séta zárt. Ha a csúcsok mind különbözőek, akkor a séta az út. Ha $v_0 = v_k$ de különben a csúcsok mind különbözőek, akkor kör. Az út vagy kör hossza az éleinek száma.

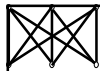
Példa



A $(v_1, e_{21}, v_{51}, e_{52}, v_{22}, e_{42}, v_{43}, v_{11}, e_{31}, v_{61}, e_{63}, v_{33}, e_{73}, v_{44}, v_{11})$ egy zárt séta.

$(v_1, e_{21}, v_{51}, e_{52}, v_{22}, e_{42}, v_{43})$ egy út, hossza 3.

$(v_1, e_{21}, v_{51}, e_{52}, v_{22}, e_{42}, v_{43}, v_{11})$ egy kör, hossza 4.



1. Állítás

Ha egy G gráfban v_0 és v_k két különböző csúcs, és létezik egy $(v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k)$ séta, akkor létezik út is v_0 és v_k között.

Bizonyítás

Legyen $(v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k)$ a legkevesebb élű séta v_0 és v_k között. Ha ez nem út, akkor van két azonos csúcsa, $v_i = v_{i+b}$. Ekkor azonban $(v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_i e_{i+b+1} v_{i+b+1} \dots v_{k-1} e_k v_k)$ egy rövidebb séta lenne v_0 és v_k között.



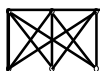
Összefüggőség, komponensek

Állítás

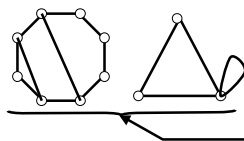
Legyen $G=(V,E)$ egy gráf. Defináljuk a \sim relációt V elemein úgy, hogy $v \sim w$ pontosan akkor ha van G -ben v -t w -vel összekötő út. Ekkor ez egy ekvivalencia reláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Bizonyítás

Reflexív: 0 hosszú út. Szimmetrikus: ha van út v -ből w -be, akkor annak a megfordítása út w -ból v -be. Tranzitív: Legyen $v \sim w$ és $w \sim z$. Ekkor ha $(v_1 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k w)$ út v -ből w -be és $(w_1 f_1 w_1 f_2 w_2 \dots w_{m-1} f_m z)$ út w -ből z -be, akkor $(v_1 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k w_1 f_1 w_1 f_2 w_2 \dots w_{m-1} f_m z)$ séta v -ből z -be, azaz az 1. Állítás szerint út is van v -ből z -be.



A \sim reláció ekvivalencia osztályokra bontja a gráf csúcshalmazát. Ezek a gráf összefüggő komponensei. Egy gráf összefüggő, ha egyetlen komponense van.

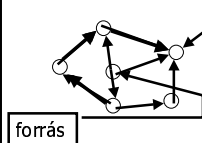


Két komponensű nem egyszerű gráf



Írányított gráfok

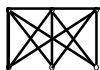
Egy gráf irányított gráf, ha élei nem $\{v_1 v_2\}$ alakú rendezetlen párok, hanem $(v_1 v_2)$ alakú rendezett párok. v_1 az él kezdőpontja, v_2 az él végpontja. Rajzban: $v_1 \rightarrow v_2$. Egy csúcs forrás, ha egyetlen élnek sem végpontja, nyelő, ha egyetlen élnek sem kezdőpontja.



nyelő

forrás

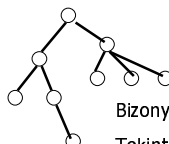
Írányított gráfban egy $(v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k)$ utat irányított útnak hívunk, ha $e_i = (v_{i-1} v_i)$, $e_j = (v_j v_{j+1})$, $e_k = (v_{k-1} v_k)$. Irányított kör, ha $v_0 = v_k$. Egy irányított gráf erősen összefüggő, ha bármely pontjából bármely más pontjába vezet irányított út.



Fák

Definíció

Összefüggő, körmentes gráf az fa.

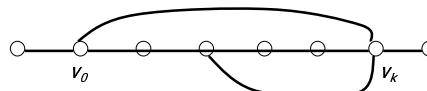


Tétel

Minden legalább 2 pontú fában van legalább két elsőfokú pont.

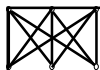
Bizonyítás

Tekintsük a fában található leghosszabb utat. Ennek mindkét végpontja első fokú, hiszen ha nem az, akkor vezet belőle még él a fa egy más pontjába.



Ha nem az úton levő pontba menne a második él v_0 -ból vagy v_k -ből, akkor lenne hosszabb út.

Ha pedig az úton levő pontba menne, akkor lenne kör.



Tétel

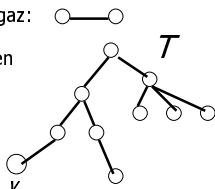
Egy n pontú fa éleinek száma $n-1$.

Bizonyítás

Teljes indukció n -re. $n=2$ -re igaz:

Legyen $n < n_0$ -ra igaz, és legyen T egy n_0 pontú fa, v egy elsőfokú pontja.

Hagyjuk el v -t, és a hozzá tartozó éleket. A maradék egy $n-1$ pontú fa, melynek indukció szerint $n-2$ éle van



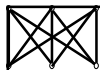
Tétel

Egy n pontú $n-1$ élű körmentes G gráf az fa.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G -nek van k komponense. Azok összefüggőek és körmentesek, azaz fák. Ha a komponensek csúcsszáma rendre n_1, n_2, \dots, n_k akkor G éleinek száma $n-1 = (n_1-1) + (n_2-1) + \dots + (n_k-1) = n-k$, azaz $k=1$, vagyis G összefüggő.

Az olyan gráfokat, melyeknek minden komponense fa, azaz a körmentes gráfokat, erdőnek nevezzük.

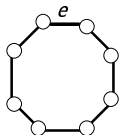


Tétel

Legyen a G gráf összefüggő, és tegyük fel, hogy $n-1$ éle és n pontja van. Ekkor G fa.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G -ben van kör. Hagyjunk el abból egy éleket, akkor az összefüggőség nem sérül. Az e élen átmenő utakból e kiváltható a kör másik ágával.



Ezt addig csináljuk, amíg van kör a gráfban. A maradék egy összefüggő körmentes gráf, azaz fa, n ponton, $n-1$ éllel. Tehát G -ből nem hagyhattunk el éleket.

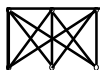


Az előbbi bizonyításból adódik:

Minden összefüggő G gráfban van feszítőfa, azaz olyan fa, melynek csúcsai megegyeznek G csúcsaival, élei pedig G élei közül valók.

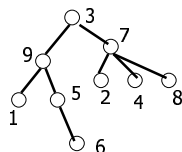
A fákat az alábbi három tulajdonság közül bármely kettő jellemzi:

- Összefüggő
- Körmentes
- n pont esetén $n-1$ éle van



Prüfer-kód

n számozott ponton levő F fa esetén hagyjuk el a legkisebb indexű elsőfokú pontot, és írjuk fel a szomszédját, legyen az v_i . Ismételjük ezt a maradék fával, amíg csak egy pont marad. Ennek indexe biztosan n , hiszen mindig van legalább két elsőfokú pont. Ezt már nem is írjuk fel.



9, 7, 7, 5, 9, 7, 3, 9

Definíció

Az így kapott $n-2$ hosszú számsorozat v_1, v_2, \dots, v_{n-2} az F fa Prüfer-kódja.

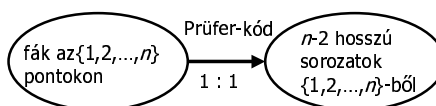


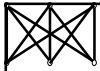
Tétel (Cayley)

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ pontokon n^{n-2} különböző fa adható meg.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy a Prüfer-kód kölcsönösen egyértelműen képezi le az $\{1, 2, \dots, n\}$ pontokon levő fákat az $n-2$ hosszú $\{1, 2, \dots, n\}$ számokból alkotott számsorozatokra. Ez utóbbi halmaz számossága n^{n-2} .





Az, hogy minden fához pontosan egy Prüfer-kód tartozik, világos a definícióból. Azt kell még látni, hogy minden lehetséges számsorozathoz van pontosan egy fa, amelynek az a Prüfer-kódja.

Legyen a sorozat $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1} = n$, a sorozat hossza $n-1$.

Legyen w_k az a csúcs, melynek elhagyásánál v_k -t írtuk fel.

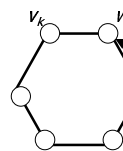
w_1 : a legkisebb olyan szám, ami nem szerepel $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}$ -ben.

w_k pedig a legkisebb olyan, ami nem szerepel a $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ számok között. Ez $n-1$ szám (nem feltétlenül különböző), így mindig van olyan, ami nem fordul elő közöttük.



A fa élei $\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \dots, \{v_{n-1}, w_{n-1}\}$. ($n-1$ darab!)

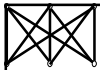
Ezek az élek nem alkotnak kört. Ugyanis tegyük fel indirekt, hogy mégis, a kört a $\{v_k, w_k\}$ él zárta be.



Ezt az élet $\{v_k, w_k\}$ előtt írtuk fel.

Azaz ez a csúcs már szerepelt a w_1, w_2, \dots, w_{k-1} listán, ami ellentmondás.

A $\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \dots, \{v_{n-1}, w_{n-1}\}$ élekből álló fa Prüfer-kódja pont v_1, v_2, \dots, v_{n-2} . Tehát minden lehetséges sorozathoz van pontosan egy fa, melynek az a Prüfer-kódja.



Példa

$3, 3, 5, 1, 7 \Rightarrow n=7$

$2, 3, 5, 1, 7, 7 \quad \{3, 2\}$

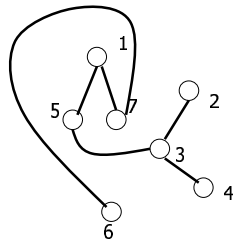
$2, 4, 5, 1, 7, 7 \quad \{3, 4\}$

$2, 4, 3, 1, 7, 7 \quad \{5, 3\}$

$2, 4, 3, 5, 7, 7 \quad \{1, 5\}$

$2, 4, 3, 5, 1, 7 \quad \{1, 7\}$

$2, 4, 3, 5, 1, 6 \quad \{7, 6\}$



Elemi lezámlálások.

Lásd könyv, tábla