

# Bevezetés a Számításelméletbe II. 5. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

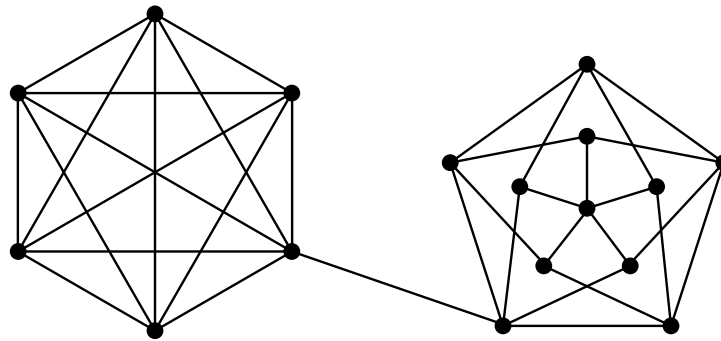
I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 március 12.

## Perfekt gráfok

Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!) Érdekes (?) a gráf, ha  $\chi(G) = \omega(G)$ . Vegyünk egy tetszőleges gráfot. Tegyük mellé egy nagy teljes gráfot.  $\implies \chi(G) = \omega(G)$  lesz. Össze is köthetjük egy éllel a két részt, hogy összefüggő legyen.



**1. Definíció (Berge).** Egy  $G$  gráf **perfekt**, ha  $\chi(G) = \omega(G)$  és  $G$  minden  $G'$  feszített részgráfjára is teljesül, hogy  $\chi(G') = \omega(G')$ .

## „Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfek gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekt. Rendszerint ez a gráfosztály zárt a feszített részgráf képzésre.

Legyen  $\mathcal{G}$  a *Béla*-gráfok osztálya. Tegyük fel, hogy egy Béla-gráf minden feszített részgráfja Béla.

**2. Állítás.**  $\forall G \in \mathcal{G}$  *perfekt*  $\iff \forall G \in \mathcal{G}: \chi(G) = \omega(G)$ .

Azaz nem kell külön foglalkoznunk a feszített részgráfokkal.

Béla-gráfnak fogjuk nevezni az olyan gráfokat, amire a fenti tulajdonság teljesül.

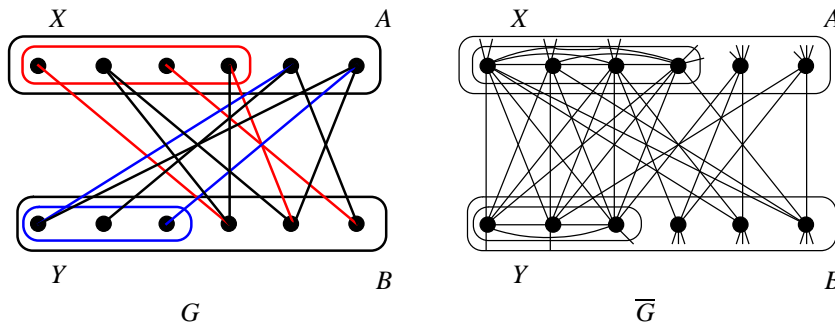
## Példák

**3. Tétel.** *Minden páros gráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf minden feszített részgráfja szintén páros gráf, azaz „páros az Béla”,  $\implies$  elég belátni, hogy minden  $G = (A, B)$  páros gráfra  $\chi(G) = \omega(G)$ .

**4. Tétel.** *Minden  $G$  páros gráf  $\overline{G}$  komplementere perfekt.*

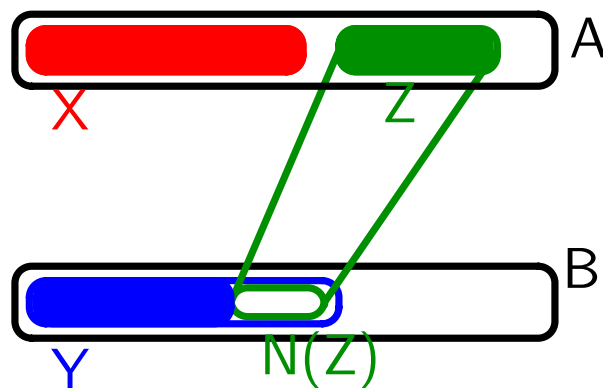
BIZONYÍTÁS Páros gráf komplementere az Béla (!)  $\implies$  elég belátni, hogy  $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$ , azaz hogy  $\overline{G}$  kiszínezhető  $\omega(\overline{G})$  színnel.



$X \cup Y$  egy maximális méretű klikk  $\bar{G}$ -ben,

$X \subseteq A$  és  $Y \subseteq B$ . ( $X \cup Y$  a  $G$  gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van  $G$ -ben párosítás, ami  $A - X$  minden pontjához egy  $Y$ -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétel szerint létezik egy olyan  $Z \subseteq A - X$  ponthalmaz az  $((A - X) \cup Y)$  által feszített páros gráfban, amelyre  $|N(Z)| < |Z|$ . Ekkor  $(X \cup Z) \cup (Y - N(Z))$  egy  $X \cup Y$ -nél nagyobb klikk  $\bar{G}$ -ben. (Üres  $G$ -ben.)



Hasonlóan,  $G$ -ben van párosítás, ami  $B - Y$ -t  $X$ -be párosítja. Így  $\bar{G}$ -ben minden  $(A - X) \cup (B - Y)$ -beli ponthoz rendeltünk egy vele nem szomszédos  $X \cup Y$ -beli pontot.  $X \cup Y$  pontjait kiszínezzük  $\omega(\bar{G})$  színnel, minden további pontot kiszínezhetünk úgy, hogy az előbb definiált párjának színét adjuk neki. Ez jó színezés, hiszen minden szín legfeljebb két ponton fordul elő és ezek biztosan nem szomszédos pontok.

## Példák II.

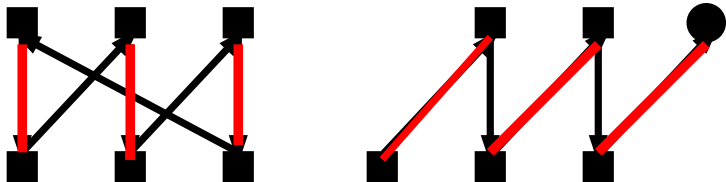
**5. Tétel.** 1. Páros gráf élgráfja perfekt. 2. Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy  $\Delta(G) = \chi_e(G)$ . ( $\Delta(G) = \omega(L(G))$ ,  $\chi_e(G) = \chi(L(G))$ ) Indukció  $\Delta(G)$ -re:  $\Delta(G) = 1$  esetén  $G$  csupa független élből áll  $\implies$  egy színnel élszínezhető.

Legyen  $D$  a  $\Delta$  fokú pontok halmaza  $G$ -ben,  $D' = D \cap A$ ,  $D'' = D \cap B$ .  $D'$  és  $D''$  külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).

$D'$  bepárosítható  $B$ -be,  $D''$   $A$ -ba. Irányítsuk a párosítások éleit  $D'$ -ből  $B$ -be, illetve  $D''$ -ből  $A$ -ba. Ekkor (páros) irányított körök és irányított utak keletkeznek (minden  $d$ -beli pont kifoka 1, minden pont befoka legfeljebb 1). A körök és utak minden **második** élét véve **egy  $M$**  párosítást kapunk, amelyik  $D$  minden pontját lefedi.



$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$ , alkalmazható az indukciós feltétel,  $\Delta(G) - 1$  színnel élszínezhető, az  $M$ -beli éleket pedig a  $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy  $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$ .

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$ : a legnagyobb klikk mérete  $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független ponthalmaz* mérete  $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete  $G$ -ben.  $\implies \omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$ .

$\chi(\overline{L(G)})$ : minimális számú független ponthalmaz (színosztály) amivel  $\overline{L(G)}$  minden pontja lefedhető = minimális számú *klikk* amivel  $L(G)$  minden pontja lefedhető. Klikk  $L(G)$ -ben = egy csúcsra illeszkedő élek  $G$ -ben  $\implies \chi(\overline{L(G)}) = \tau(G)$ .

A 2. állítás tehát nem egyéb, mint *König tétele*:  $\chi(\overline{L(G)}) = \tau(G) = \nu(G) = \omega(\overline{L(G)})$ .

## Részben rendezett halmazok

**6. Definíció.** Legyen  $X$  egy (véges) halmaz. Az  $X$  a  $\preceq$  relációval **részben rendezett halmaz**, ha

1.  $\forall x \in X: x \preceq x$ : *reflexív*
2.  $\forall x, y \in X: x \preceq y$  és  $y \preceq x \implies x = y$ : *antiszimmetrikus*
3.  $\forall x, y, z \in X: x \preceq y$  és  $y \preceq z \implies x \preceq z$  *tranzitív*.



## Példák:

- $\mathbb{N}, (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$  a szokásos  $\leq$  relációval.
- $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x \preceq y \iff x$  osztja  $y$ -t.
- $X = \mathcal{P}(A)$  az  $A$  részhalmazainak halmaza.  $x \preceq y \iff x \subseteq y$ .
- Legyenek  $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$  korlátos zárt intervallumok, és minden  $a_i, b_i$  legyen pozitív egész,  $X = \{I_1, I_2, \dots\}$ .  $I_j \preceq I_k \iff b_j < a_k$  vagy  $j = k$ , azaz  $j \neq k$  esetén  $I_j$  teljesen balra van  $I_k$ -tól. Az ilyen részben rendezést **intervallum rendezés**nek nevezzük.

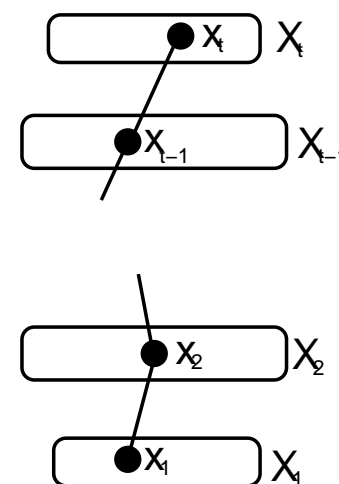
## Összehasonlítási gráfok

**7. Definíció.** Legyen  $P = (X, \preceq)$  egy (véges) részben rendezett halmaz. A  $G = (V, E)$  gráf a  $P$  **összehasonlítási gráfja**, ha  $V = X$  és  $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$  vagy  $y \preceq x$ .

**8. Tétel.** Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen  $G = (V, E)$  gráf a  $P = (X, \preceq)$  összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$  felbontást.  $X_1 = \min P$ , a  $P$  minimális elemeinek halmaza. Ha  $X_1, X_2, \dots, X_k$  már adott, akkor  $X_{k+1} = \min(P - \cup_{i=1}^k X_i)$ . Ha  $x, y \in X_i$ , akkor  $x \not\preceq y$  és  $y \not\preceq x \implies$  A  $G$  gráfban  $X_i$  **független** ponthalmaz. Ha  $x_i \in X_i$ , akkor van  $x_{i-1} \in X_{i-1}$ , hogy  $x_{i-1} \preceq x_i$ .  $\implies$  Létezik egy **lán**c  $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_t$ . Az  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$  klikk a  $G$  gráfban,  $\preceq$  tranzitivitása miatt.  $\implies t \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq t$ .



## Perfekt Gráf Tétel

**9. Tétel (Lovász).** *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

**10. Definíció.** *Legyenek  $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$  korlátos zárt intervallumok, és minden  $a_i, b_i$  legyen pozitív egész. Legyenek  $p_1, p_2, \dots$  egy  $G$  gráf pontjai és  $\{p_i, p_j\}$  akkor és csak akkor legyen él  $G$ -ben, ha  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . Az így előálló gráfokat **intervallumgráfoknak** nevezzük.*

**11. Következmény.** *Minden intervallumgráf perfekt.*

**BIZONYÍTÁS** Az adott intervallum rendszerhez tartozó intervallum gráf komplementere pont az ugyanahhoz a rendszerhez tartozó intervallum rendezés összehasonlítási gráfja.

**HÁZI FELADAT** Milyen állítást kapunk, ha tetszőleges összehasonlítási gráfra alkalmazzuk Lovász tételeit? Azaz mi lesz a komplementer klikkszáma és kromatikus száma?

## Lovász erősebb tétele

**12. Tétel (Lovász).** *Egy  $G$  gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden  $G'$  feszített részgrádjára teljesül, hogy  $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$ .*

### Megjegyzések

1. Ebből a tételből következik a Perfekt Gráf Tétel, ugyanis  $\alpha(\overline{G'}) = \omega(G')$  és  $\omega(\overline{G'}) = \alpha(G')$ , valamint  $|V(G')| = |V(\overline{G'})|$ .
2. A Perfekt Gráf Tétel ekvivalens avval, hogy „Ha  $G$  perfekt, akkor a komplementere is perfekt.”

## Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy  $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$ :  $\chi(G)$  darab egyenként legfeljebb  $\alpha(G)$  méretű színosztály le kell tudja fedni az egész  $V(G)$  szögponthalmazt. Ha  $G$  perfekt és  $G'$  feszített részgráfja, akkor  $\omega(G') = \chi(G') \implies \alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$ .

Azt kell tehát látni, hogy ha  $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$  egy gráf minden feszített részgráfjára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Egy gráf *imperfekt*, ha nem perfekt.  $G$  *minimális imperfekt gráf*, ha ő maga nem perfekt, de minden valódi feszített részgráfja az. Minden imperfekt gráf tartalmaz minimális imperfekt gráfot feszített részgráfként.

Azt fogjuk igazolni, hogy ha  $G$  minimális imperfekt gráf, akkor  $\alpha(G) \cdot \omega(G) < |V(G)|$ .

## A bizonyítás 1. Lemmája

**13. Lemma.** *Ha  $G$  minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges  $A \subset V(G)$  független halmazára  $\omega(G - A) = \omega(G)$ .*

**BIZONYÍTÁS** Tegyük fel indirekt, hogy  $\omega(G - A) < \omega(G)$ .  $G$  minimális imperfekt  $\implies G - A$  perfekt  $\implies \chi(G - A) = \omega(G - A)$ . Viszont  $\chi(G) \leq \chi(G - A) + 1$ , mert  $A$ -beli pontok egy újabb színnel színezhetők.  $\implies \chi(G) \leq \chi(G - A) + 1 = \omega(G - A) + 1 \leq \omega(G)$ .

Tehát  $G$  maga is perfekt, hiszen nemcsak minden részgráfja, hanem ő maga is kiszínezhető annyi színnel, amennyi a benne levő legnagyobb klikk mérete, ellentmondás.

## A bizonyítás 2. Lemmája

**14. Lemma.** Legyen  $G$  minimális imperfekt gráf.  $G$  függetlenségi számát jelölje  $\alpha$ , klikkszámát  $\omega$ . Ekkor megadható  $G$  független halmazainak egy  $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$  és klikkjeinek egy  $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$  rendszere úgy, hogy

1.  $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$  és
2.  $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$ .

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$  egy tetszőleges maximális méretű független halmaz  $G$ -ben.  $G - \{a_1\}$  perfekt, és az 1. Lemma szerint  $\omega$  a klikkszáma.  $\implies G - \{a_1\}$   $\omega$  színnel jól színezzhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai  $A_1, A_2, \dots, A_\omega$ . Általánosságban legyenek  $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$  a  $G - \{a_i\}$  perfekt gráf egy optimális színezésének színosztályai. Ha  $0 \leq j \leq \alpha \cdot \omega$ , akkor a  $G - A_j$  gráf perfekt, és az 1. Lemma szerint  $\omega$  a klikkszáma. Legyen  $B_j$  a  $G - A_j$  gráf egy rögzített  $\omega$  méretű klikkje.

$B_j$  definíciója miatt  $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ . Belátjuk, hogy  $i \neq j$  esetén  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ .  $|A_i \cap B_j| = 1$ , hiszen egy klikknek és egy független halmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet.

Egy  $\omega$  méretű klikkbe  $\omega$  színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy  $B_i$ -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$  Ekkor  $B_i$  minden  $G - \{a_k\}$  gráfban  $\omega$  méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$  minden  $j \neq 0$ -ra.

$A_0 \cap B_i = \{a_k\}$   $B_i$  minden  $G - \{a_j\}$   $j \neq k$  gráfban  $\omega$  méretű klikk, minden színosztályt metsz. A  $G - \{a_k\}$  gráfban  $\omega - 1$  méretű klikk lesz, azaz *egy kivételével* minden színosztályt metsz. Vagyis az  $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$  független halmazok közül  $B_i$  ismét csak pontosan egytől lehet diszjunkt, ez pedig akkor csakis az az  $A_i$  lehet, aminek párjául választottuk.



## A bizonyítás 3. Lemmája

**15. Lemma.** Legyenek  $A_1, A_2, \dots, A_m$  és  $B_1, B_2, \dots, B_m$  egy  $n$  elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy

1.  $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$  és
2.  $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$ .

Ekkor  $m \leq n$ .

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $\mathbb{A}$  az az  $m \times n$ -es mátrix, amelynek sorai az  $A_i$  halmazok ún. karakterisztikus vektorai. Ez annyit jelent, hogy e mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme 1, ha az alaphalmaz  $j$ -edik eleme benne van  $A_i$ -ben, és 0, ha nincs. Például, ha  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $A_2 = \{1, 3\}$  és  $n = 3$ , akkor  $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Hasonlóan, legyen  $\mathbb{B}$  az az  $n \times m$  méretű mátrix, melynek oszlopai a  $B_i$  halmazok karakterisztikus vektorai.

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$   $m \times m$ -es mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme éppen  $|A_i \cap B_j|$ .

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{D}$  teljes rangú:  $\det \mathbb{D} = (-1)^{m-1}(m-1)$

$m = \text{rang}(\mathbb{D}) \leq \text{rang}(\mathbb{B})$ . (Lásd előző félév!) Mivel  $\mathbb{B}$   $n \times m$ -es, ezért  $m \leq \text{rang}(\mathbb{B})$  csak úgy lehet, ha  $m \leq n$ .

## A Tétel bizonyításának befejezése

Ha  $G$  minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik  $G$  csúcshalmazának két olyan, egyenként  $\alpha \cdot \omega + 1$  méretű részalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma részalmazrendszereire vonatkozó feltételt.

Alkalmazhatjuk tehát a 3. Lemmát  $m$  helyébe  $\alpha \cdot \omega + 1$ -et,  $n$  helyébe  $|V(G)|$ -t írva.

Azt kaptuk tehát, hogy minimálisan imperfekt  $G$  gráfra  $\alpha(G)\omega(G) + 1 \leq |V(G)|$ . Pontosan ennyi hiányzott a bizonyítás befejezéséhez, ezzel tehát készen vagyunk.



## Erős perfekt gráf sejtés

Nem perfekt egy legalább öt hosszú páratlan kör, hiszen ebben a maximális klikk mérete 2, viszont kromatikus száma 3. Az előbbi tétel szerint a legalább öt hosszú páratlan körök komplementerei sem perfektek. A definícióból így rögtön következik, hogy nem perfekt egy olyan gráf sem, amiben van egy páratlan kör vagy komplementere feszített részgráfként.

Berge azt sejt, hogy ez az egyetlen akadály:

**16. Sejtés (Erős perfekt gráf sejtés).** *Egy  $G$  gráf akkor és csak akkor perfekt, ha sem  $G$ , sem  $\overline{G}$  nem tartalmaz feszített részgráfként legalább öt hosszú<sup>1</sup> páratlan kört.*

---

<sup>1</sup>Hiba a jegyzetben!!