

Bevezetés a Számításelméletbe II. 4. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 március 5.

Gráfok színezése

Térkép színezés \implies duálisban csúcsok színezése: szomszédosak különböző színűek.

1. Definíció. Egy G hurokmentes gráf k színnel kiszínezhető, hogyha minden csúcsot ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen. G kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem. Egy ilyen színezésnél az azonos színt kapott pontok halmazát **színosztálynak** nevezzük.

Másképp fogalmazva: Legyen $G = (V, E)$ egy hurokél mentes gráf, $|C| = k$. Egy $f: V \rightarrow C$ leképezés a G egy **jó színezése C színeivel (k -színnel)**, ha $\{v_1, v_2\} \in E$ -ből $f(v_1) \neq f(v_2)$ következik. G kromatikus száma $\chi(G) = k$ az a legkisebb k szám, melyre G -nek van jó színezése k színnel.

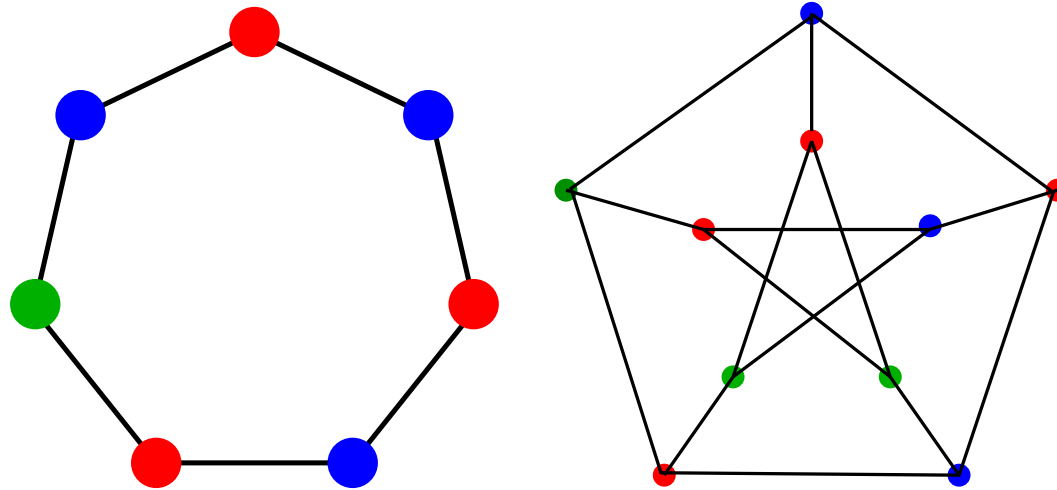
Megjegyzések: 1. Végtelen gráfra is értelmes a definíció, k lehet végtelen számosság.
2. Hurokél nem lehet, párhuzamos él nem számít \implies egyszerű gráfokat tekintünk csak.

Példák

K_n kromatikus száma n . Általában $\chi(G) \leq v(G)$.

Egy páratlan kör kromatikus száma 3.

A Petersen gráf kromatikus száma 3.



Legyen $G = (V, E)$ ahol $V = \mathbb{R}$, $\{x, y\} \in E \iff x - y \in \mathbb{Q}$ $\chi(G) = \aleph_0$.

Egyszerű észrevételek

2. Tétel. *Egy legalább egy élet tartalmazó G gráf akkor és csak akkor páros, ha $\chi(G) = 2$.*

BIZONYÍTÁS Van él $\implies \chi(G) \geq 2$. $V(G) = A \cup B \implies f(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v \in A \\ 2 & \text{if } v \in B \end{cases}$ egy jó színezés. $\implies \chi(G) \leq 2$.

Ha $\chi(G) = 2$, akkor a két színosztály épp a páros gráf definíciójában szereplő felbontásnak megfelelő két halmaz lesz.

3. Definíció. G egy teljes részgráfját **klikknek** nevezzük. A G -ben található maximális méretű klikk méretét, azaz pontszámát $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf **klikkszámának** nevezzük.

4. Tétel. Minden G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Mohó színezés

Legyen $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$.

$f(v_0) := 1;$

for ($i=1; i < n, i++$)

$f(v_i) := \min\{j : j \notin \{f(v_k) : k < i, \{v_i, v_k\} \in E(G)\}\};$

Első csúcsot színezzük

Sorban a többieket

Legelső színnel, amit nem használtunk v_i eddigi szomszédainál.

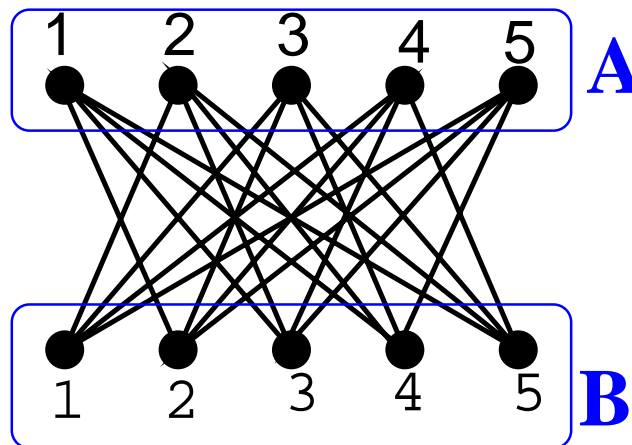
5. Állítás. $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Mohó színezés függ a sorrendtől

Tekintsük a $G = K_{n,n}$ gráfot. $V(G) = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ $E(G) = \{\{a_i, b_j\} : i \neq j\}$, vagyis a $K_{n,n}$ teljes gráfból elhagyjuk az $\{a_i, b_i\}$ éleket.

$1 < i < n$ esetén az $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n$ sorrendben a mohó színezés $i+1$ színt használ.

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sorrendben kettőt.



Becslések pontossága

Általában egyiknél sem lehet jobbat mondani:

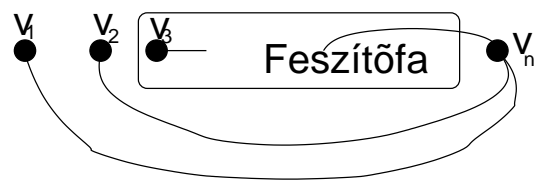
$\chi(G) \geq \omega(G)$: Páros gráfok, teljes gráfok, perfekt gráfok – sok különböző példa.

$\chi(G) \leq \Delta + 1$: Teljes gráfok, (húr nélküli) páratlan körök – kevés különböző példa.

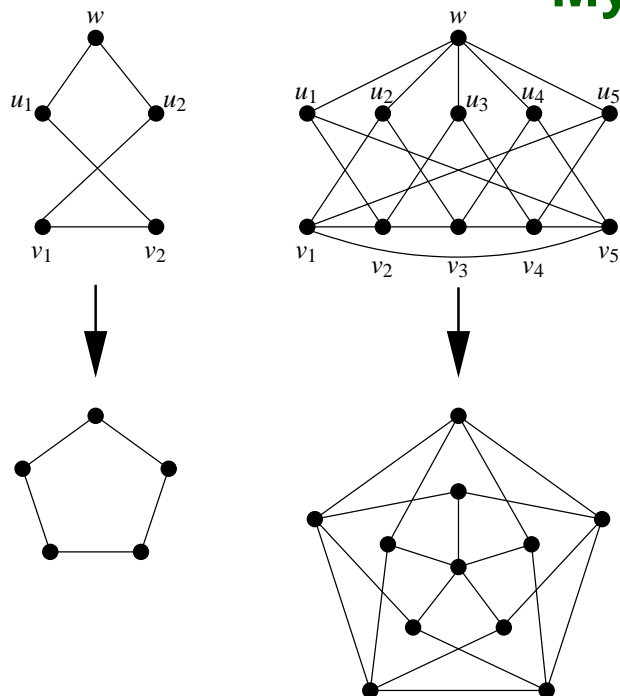
6. Tétel (Brooks). *Ha G egyszerű, összefüggő gráf, nem teljes gráf, és nem egy páratlan hosszúságú kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta = \max_{x \in V(G)} d(x)$.*

Brooks tétel bizonyítás vázlata

- $\Delta = 2$ esetén a gráf egyszerű út vagy egy kör.
- $\Delta \geq 3$: indukció pontszámra. Ha G egy vagy két ponttal szétvágható, akkor a részek színezését összerakhatjuk G színezésévé (!!)
- Legyenek v_1, v_2, v_n olyan pontjai G -nek, amelyekre $\{v_1, v_n\} \in E(G)$, $\{v_2, v_n\} \in E(G)$, de $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$. Ilyen pontok biztosan vannak, ha G nem teljes gráf és összefüggő.
- $G - \{v_1, v_2\}$ gráf összefüggő. \implies Van fészítőfája a fészítőfának van v_n -től különböző elsőfokú pontja. Ez legyen v_3 . A $G - \{v_1, v_2, v_3\}$ gráf összefüggő marad, így hasonlóan kapjuk v_4 -et stb. Az így kapott sorrend olyan, hogy minden pontnak van nagyobb indexű szomszédja. \implies Mohó színezés jól színez (!!).



Mycielski konstrukciója



7. Tétel (Mycielski konstrukciója). $\forall k \geq 2$ -re van G_k : $\omega(G_k) = 2$ és $\chi(G_k) = k$.

BIZONYÍTÁS $G_2 = K_2$. $G_k \implies G_{k+1}$: $V(G_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. $n + 1$ darab új pont: u_1, u_2, \dots, u_n és w . Új élek: $\{u_i, v_j\} \in E(G_{k+1}) \iff \{v_i, v_j\} \in E(G_k)$ és $\forall i: \{w, u_i\} \in E(G_{k+1})$

Indukció k -ra

G_{k+1} -ben nincs háromszög: Nem lehet mindhárom csúcsa G_k -ban. Ha w a háromszög egyik csúcsa, akkor a másik kettő csak u_i és u_j lehetne, ezek viszont nem szomszédosak. Ha u_i a háromszög egyik csúcsa és a másik két csúcs v_x és v_y : u_i szomszédai megegyeznek v_i szomszédaival, ekkor nem csak u_i, v_x és v_y , hanem v_i, v_x és v_y is egy háromszöget alkotna G_k -ban.

$\chi(G_{k+1}) \leq k+1$: Legyen $f: V(G_k) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ a G_k egy jószínezése.

$$c(x) = \begin{cases} f(v_i) & \text{ha } x = v_i \\ f(v_i) & \text{ha } x = u_i \\ k & \text{ha } x = w \end{cases} \quad \text{a } G_{k+1} \text{ egy jószínezése.}$$

$$\chi(G_{k+1}) > k$$

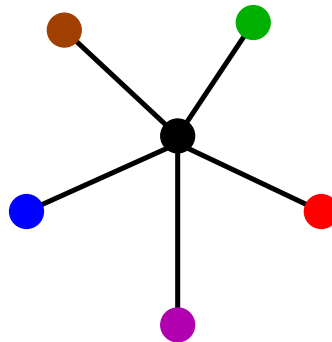
Tegyük fel indirekt, hogy $\chi(G_{k+1}) = k$, $c: V(G_{k+1}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ a G_{k+1} egy jószínezése. Legyen $c(w) = k$. Mivel w minden u_i -vel össze van kötve, az u_i pontok mindegyikére $c(u_i) \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Megadunk egy c' színezést a v_i pontok által feszített részgráfon. (Ez éppen G_k -val izomorf részgráf). Ha $c(v_i) = k$, akkor legyen $c'(v_i) = c(u_i)$, különben $c'(v_i) = c(v_i)$, vagyis a k színűeket színezzük át a „párjuk” színére.

c' egy $k-1$ színnel való jó színezése G_k -nak: Olyan élnek, amelyeknek egyik végpontja sem volt k színű, végpontjainak színét nem változtattuk meg. Tegyük fel, hogy $c(v_i) = k$ és v_i -nek van egy olyan v_j szomszédja, amelyre $c'(v_j) = c'(v_i)$. Mivel $c(v_j) \neq k$ (hiszen az eredeti színezés jó volt), ezért $c'(v_j) = c(v_j)$, másrészt $c'(v_i) = c(u_i)$. Így $c(v_j) = c(u_i)$, ami viszont ellentmondás, hiszen v_j és u_i szomszédosak G_{k+1} -ben, ha v_j és v_i szomszédosak G_k -ban.

4+1-szín tétel

8. Tétel (5-szín tétel). *Ha G síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 5$.*

BIZONYÍTÁS Feltehető, hogy G egyszerű. Indukció a pontszámra. Legyen v egy legfeljebb 5 fokú pont G -ben. $G - v$ 5 színnel jólszínezhető az indukciós feltétel szerint. Egyetlen baj: v -nek 5 szomszédja van, és azok mind különböző színűek. Legyen G síkba rajzolva, és legyenek a szomszédai az alábbi módon színezve.

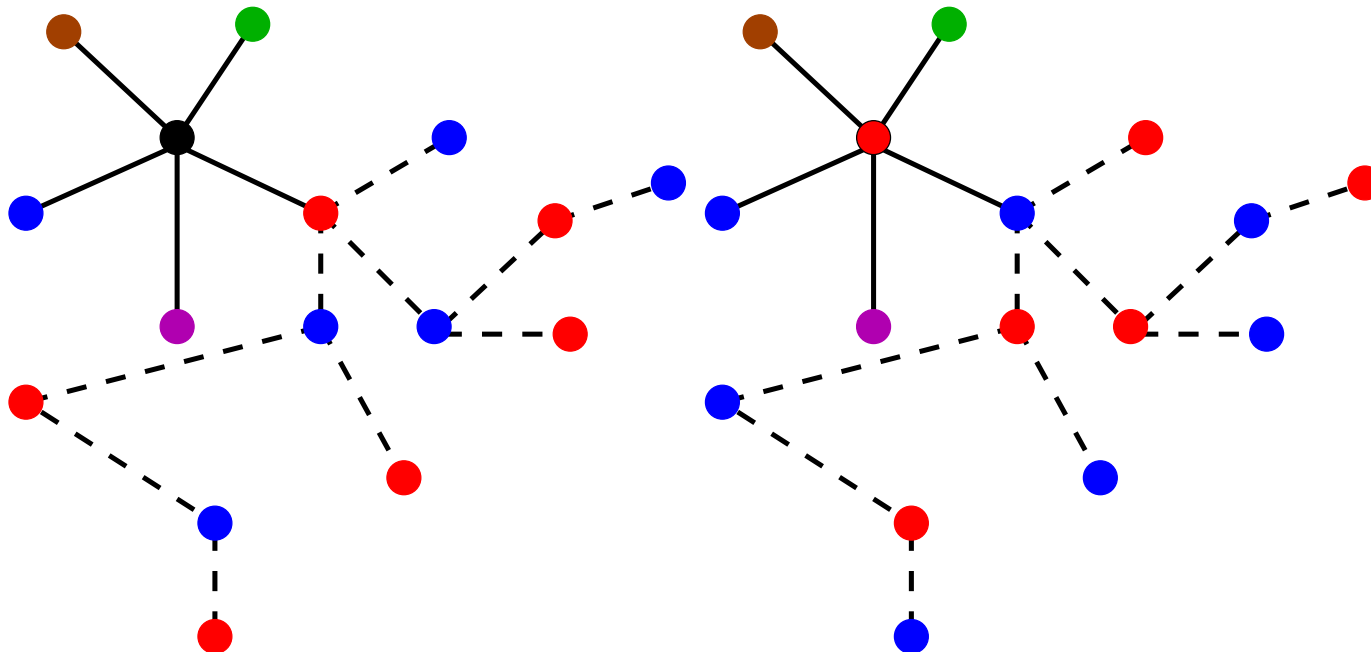


Ha ez nincs, akkor v megkaphatja azt a színt, ami nem szerepel a szomszédai közt.

Átszínezés

Próbáljuk átszínezni a piros csúcsot kékre, annak kék szomszédait pirosra, majd így tovább.

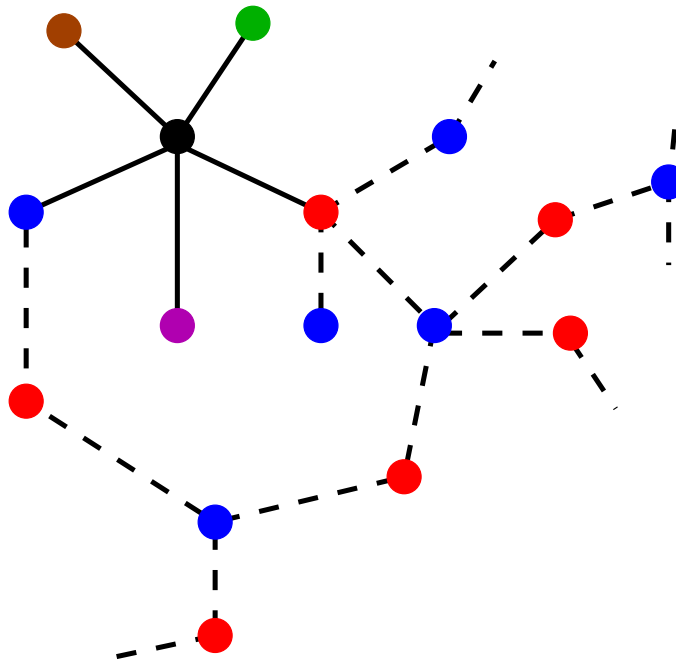
Ha ez sikerül, akkor v lehet piros.



Akadály

v kék szomszédját is át kéne színezni pirosra, mert van egy piros-kék út v két szomszédja közt.

Ekkor viszont a lila csúcs *be van kerítve* így ha abból indítunk egy lila-zöld színcserét, az nem érheti el v zöld szomszédját.



4-szín tétel

Appel és Haken [1977] bebizonyította a 4-szín tételt is, de bizonyításuk több száz oldalas, és felhasználtak hozzá számítógépes módszereket is.

9. Tétel (4-szín tétel). *Ha G síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 4$.*

Élkromatikus szám

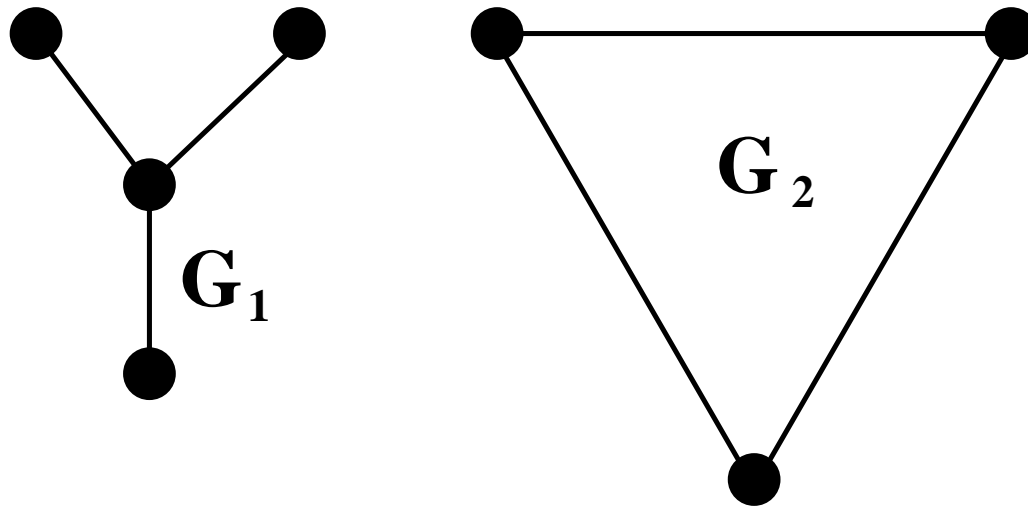
10. Definíció. Egy G gráf élei k színnel kiszínezhetők, ha minden élet ki lehet színezni k szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen. G élkromatikus száma $\chi_e(G) = k$, ha G élei k színnel kiszínezhetők, de $k - 1$ színnel nem.

Az élkromatikus szám az élgráf kromatikus száma.

11. Definíció. A $G = (V, E)$ gráf élgráfja az $L(G)$ gráf, melyre $V(L(G)) = E$ és $\{e_1, e_2\} \in E(L(G)) \iff e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$.

12. Állítás. $\omega(L(G)) \geq \Delta(G)$. Ha G egyszerű és $\Delta(G) \geq 3$, akkor egyenlőség áll.

$$L(G_1) \simeq L(G_2)$$



13. Állítás. $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$.

Vizing-tétel

14. Tétel (Vizing). *Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta + 1$.*

*Annak eldöntése viszont **NP**-teljes, hogy egy adott gráfra $\chi_e = \Delta$ vagy $\chi_e = \Delta + 1$.*