

Bevezetés a Számításelméletbe II. 1. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

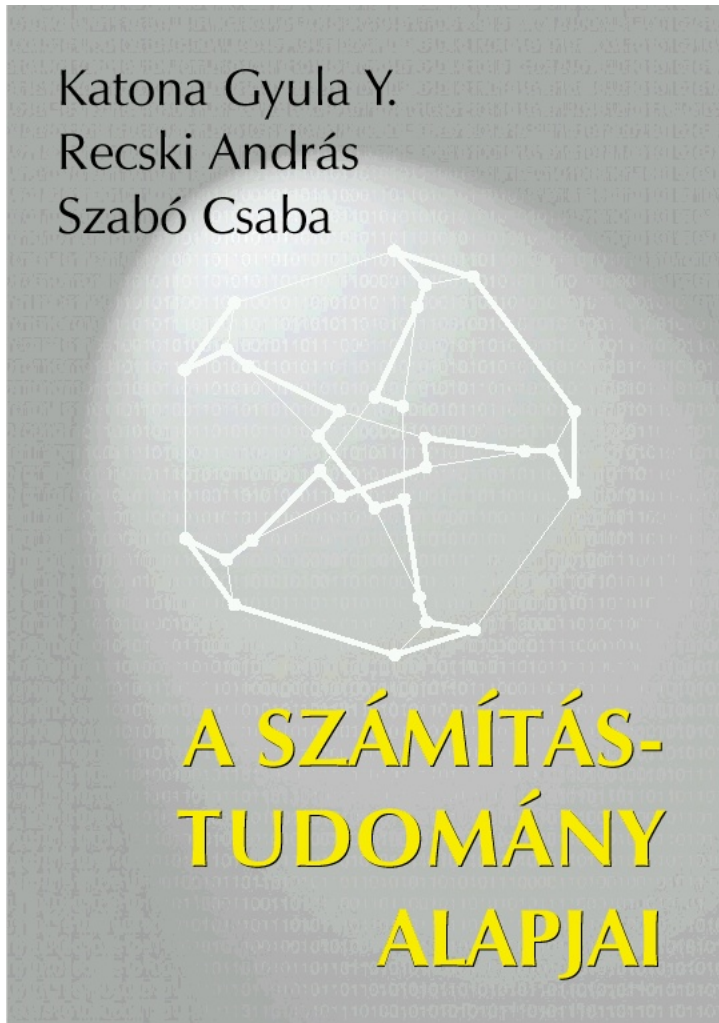
Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 Február 9.

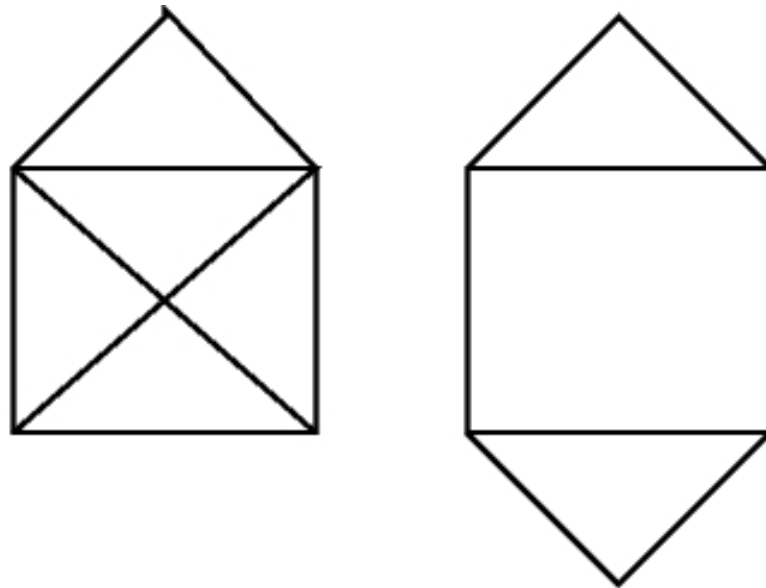
Források



- Katona Gyula Y. – Recski András – Szabó Csaba: **A számítástudomány alapjai**, TYPOT_EX, 2001
- Feladatgyűjtemény letölthető:
<http://www.renyi.hu/~sali/bsz.html>
- Egyéb információk, hirdetések ugyanitt.

Euler- és Hamilton körök

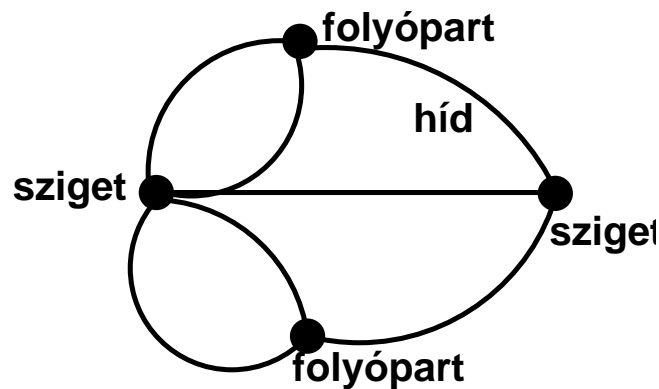
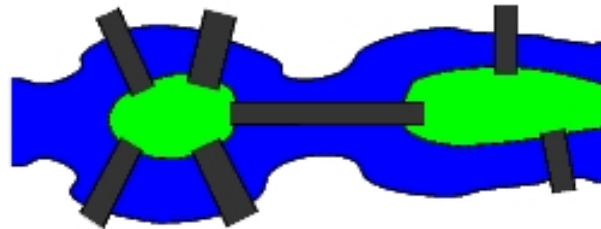
Melyik rajzolható le egy vonallal a ceruza felemelése nélkül?



A szemétkgyűjtő (kukás) autónak a körzete minden utcáján végig kell mennie. Meg tudja úgy tenni, hogy minden utcán pontosan egyszer megy végig?

Königsbergi hidak

Eulertől megkérdezték Königsberg lakói, hogy miért nem tudnak átmenni a város hídjain úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer mentek át:



Euler-kör, Euler-út

1. Definíció. A G gráf **Euler-körének** nevezünk egy zárt élsorozatot, ha az élsorozat pontosan egyszer tartalmazza G összes élét. Ha az élsorozat nem feltétlenül zárt, akkor **Euler-utat** kapunk.

- Euler-kör \implies Euler-út.
- Euler-kör *nem* igazi kör a gráfban, Euler-út *nem* igazi út, hanem zárt (nyílt) séta.

Euler-kör

Szükséges feltétel: Euler-kör esetén minden pontba pont ugyanannyiszor megyünk be mint ki. \implies minden pont foka páros.

2. Tétel. *Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-kör, ha G minden pontjának foka páros.*

BIZONYÍTÁS Szükségességet láttuk. A másik irányt G pontszámára való indukcióval bizonyítjuk.

- **indukciós feltétel** Tegyük fel, hogy minden $k < n$ -re igaz az állítás, és legyen G egy n pontú gráf.

- **létezik zárt élsorozat** Induljunk el a gráf egy tetszőleges pontjából, és haladjunk az élek mentén úgy, hogy egy élen kétszer nem megyünk át. Ha egy olyan pontba érünk, amelyből nem vezet ki olyan él, amelyen még nem haladtunk át, akkor ez csak a kiinduló pont lehet, mivel minden pont foka páros.
- **indirekt feltevés** Legyen a H egy olyan zárt élsorozata G -nek, amelyben az előforduló élek száma maximális. Mivel a kiindulópontból már nem tudtunk tovább menni, az ebből a pontból kiinduló minden él H -beli. Indirekt tegyük fel, hogy H nem egy Euler-köre G -nek.
- **indirekt feltevés következménye** Vizsgáljuk a G' gráfot, amelyet úgy kaptunk, hogy a G gráfból elhagytuk a H -ban szereplő éleket. G' nem feltétlenül összefüggő, viszont összesen n -nél kevesebb pontja van, hiszen a kiindulópont nincs benne.

- **indukciós feltétel használata** Az indukciós feltevés miatt minden komponensében van Euler-kör. Mivel G összefüggő, G' valamelyik komponensének van olyan pontja, amelyik H -ban szerepel. Nevezzük az ebben a komponensben található Euler-kört H' -nek.
- **ellentmondás** Ha elindulunk az előbb talált közös pontból, és először bejárjuk H -t majd H' -t, akkor egy H élszámánál nagyobb élszámú zárt élsorozatot találtunk, ami ellentmond a feltevésünknek. Vagyis H Euler-kör.

Euler-út

3. Tétel. *Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha G -ben a páratlan fokú pontok száma 0 vagy 2.*

BIZONYÍTÁS Szükségesség: A 2. tétel bizonyításához hasonlóan belátható.

Elégségesség:

- 0 páratlan fokú pont A 2. tétel
- 2 páratlan fokú pont kössük össze ezeket egy újabb e éllel. A keletkező G' gráfban minden pont foka páros lesz, így a 2. tétel értelmében van benne Euler-kör, ami definíció szerint tartalmazza az e élet is. Hagyjuk el ebből az Euler-körből az e élet, így egy Euler-utat kaptunk G -ben.

Utazó Ügynök Probléma

Egy ügynöknek meg kell látogatnia bizonyos városokat útja során (és végül haza kell térnie). Adott:

- mely városokból mely másik városokba van járat(közvetlen út)
- milyen költséggel tud eljutni egyik városból másikba (repülőjegy, autóút ára).

Cél: az utak összköltségét minimalizálni. Ez a feladat sok alkalmazás során felmerül, és csak bizonyos speciális esetekben ismeretesek jó algoritmusok a megoldására.

Ha bármely két város közt, melyek között van összeköttetés az 1 költségű, és az ügynöknek minden várost meg kell látogatnia, akkor a feladat a Hamilton-kör létezésére vezet.

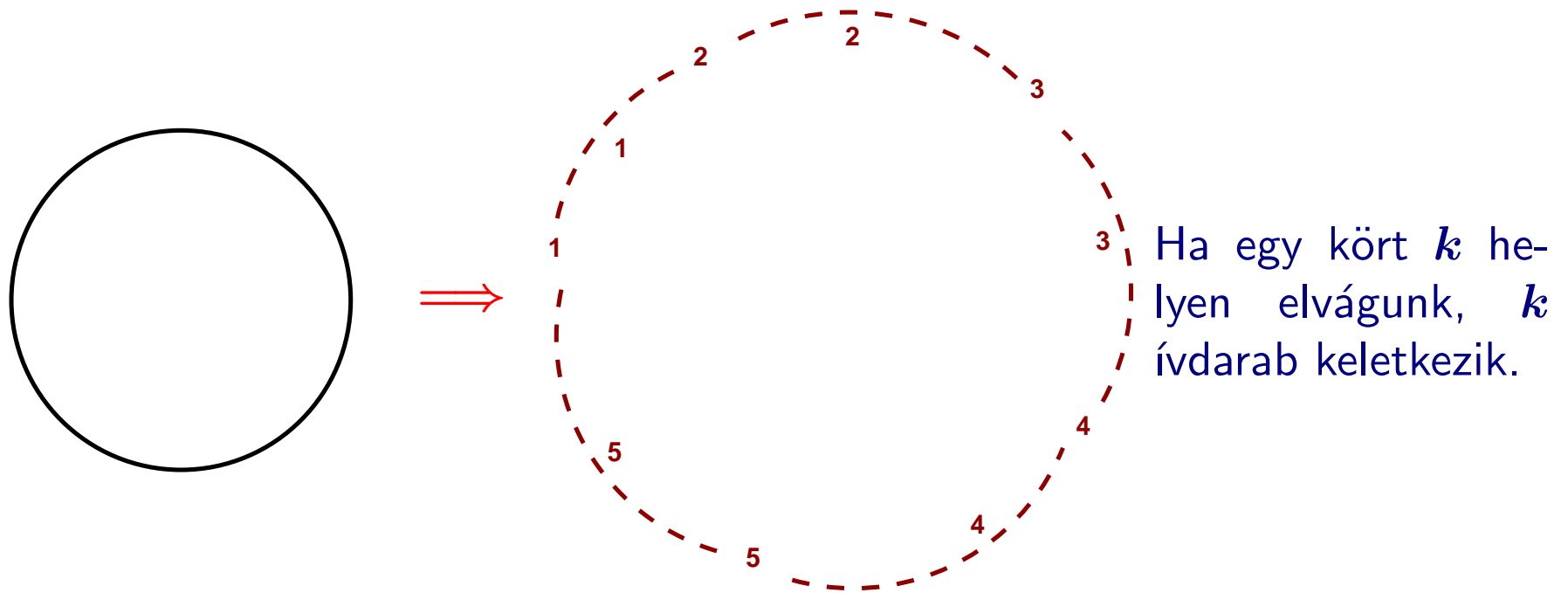
Hamilton Kör

4. Definíció. Egy G gráfban **Hamilton-körnek** nevezünk egy H kört, ha G minden pontját (pontosan egyszer) tartalmazza. Egy utat pedig **Hamilton-útnak** nevezünk, ha G minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

Hamilton-kör és a Hamilton-út egy speciális kör, illetve út a gráfban, ellentétben az Euler-körrel és -úttal.

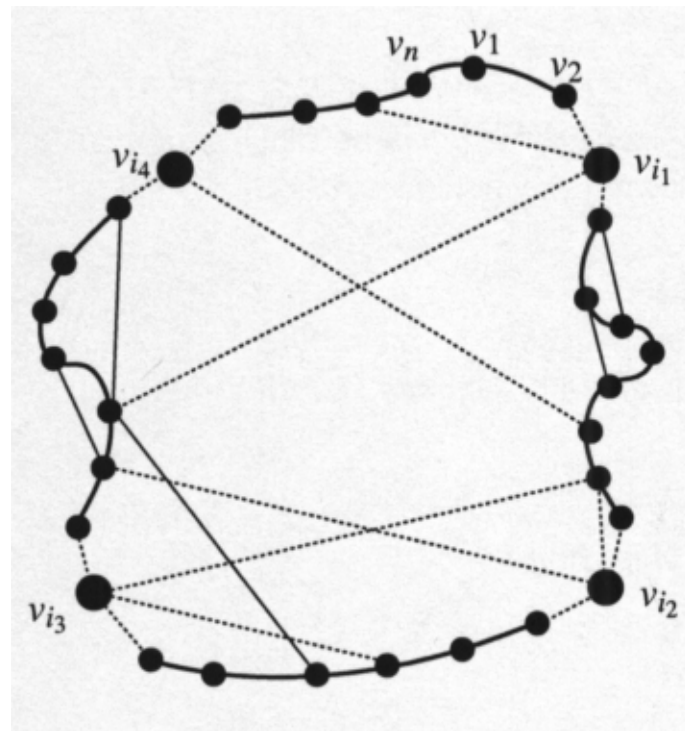
A 2.Tétellel ellentétben nem ismeretes szükséges és elégséges feltétel Hamilton-kör létezésére.

Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére



5. Tétel. Ha a G gráfban létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a gráf több mint k komponensre esik, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-kör. Ha létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a gráf több mint $k + 1$ komponensre esik, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-út.

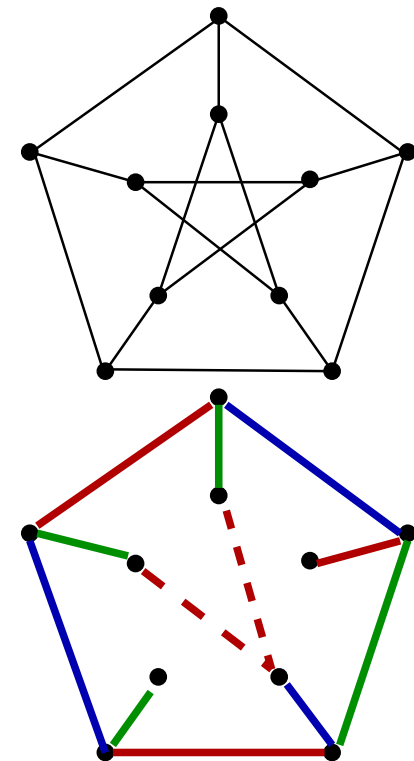
BIZONYÍTÁS Indirekt tegyük fel, hogy van a gráfban Hamilton-kör, legyen ez (v_1, v_2, \dots, v_n) és legyen $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ az a k pont, melyet elhagyva a gráf több mint k komponensre esik. Az elhagyott pontok közötti „ívek” biztosan összefüggő komponenseket alkotnak. Pl. a $(v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, \dots, v_{i_2-1})$ ív is összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti Hamilton-kör egy éle fut. Mivel éppen k ilyen ívet kapunk, nem lehet több komponens k -nál. (Kevesebb lehet, hiszen különböző ívek között futhatnak élek.) Hamilton-útra hasonlóan bizonyítható.



Szükséges feltétel nem elégséges

Legyen G a Petersen-gráf. Teljesíti a szükséges feltételt: Ha elhagyunk $n = k + b$ pontot, k a külső, b a belső körből, akkor a külső kör k a belső b ívdarabra bomlik. Azaz G legfeljebb $n = k + b$ komponensre.

G -ben nincs Hamilton-kör: Ha lenne, az 10 élet jelentene, minden pontba 2 futna be. Színezzük ki a H -kör éleit felváltva pirossal és kékkel. Ekkor minden pontból *pontosan* egy kiinduló él nincs még színezve: fessük zöldre. Tehát, ha van H -kör, akkor az élek színezhetők 3 színnel, hogy minden pontba 3 különböző színű él fut be. A külső ötszög öt élet lényegileg egyféleképpen lehet 3-színezni (eltekintve a színek permutációjától) 2 kék, 2 piros, 1 zöld. Ez meghatározza az „összekötő” élek színét. Viszont ekkor a két szagattottal jelölt élnek pirosnak kéne lennie, ellentmondás.



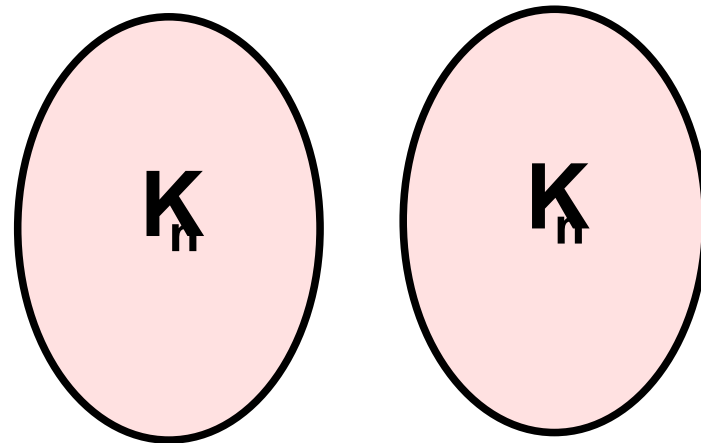
Elégséges feltételek

A K_n teljes gráfnak nyilván van H -köre. Általában ha „sok” él van, akkor várható a H -kör létezése. Sok élet garantálhatunk „nagy” fokszámokkal.

Ha a pontok fokszáma $< \frac{n}{2}$, akkor a gráf még nem feltétlenül összefüggő: két diszjunkt n -pontú teljes gráf uniója $2n$ -pontú gráf, minden pont foka $n - 1$.

6. Tétel (Dirac). *Ha egy n pontú G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.*

Ez a korlát lehetőlegjobb



További elégséges feltételek

Ha nem uniform fokszám korlátot adunk meg, akkor több is mondható.

7. Tétel (Ore). *Ha az n pontú G gráfban minden olyan $x, y \in V(G)$ pontpárra, amelyre $\{x, y\} \notin E(G)$ ¹ teljesül az is, hogy $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.*

Ore a szomszédos pontpárok fokszámainak összegéről nem mond semmit.

8. Állítás. $Ore \implies Dirac$.

BIZONYÍTÁS Ha Dirac feltétele teljesül, azaz ha minden pont foka legalább $n/2$, akkor teljesül az Ore-tétel feltétele, mivel bármely x, y pontpárra $d(x) + d(y) \geq n$.

¹Sajtóhiba az új jegyzetben!!

Pósa és Chvátal tételei

9. Tétel (Pósa). *Jelöljük G pontjai fokszámát nagyság szerint rendre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ -nel. Ha minden $k < n/2$ -re $d_k \geq k + 1$, akkor G -ben van Hamilton-kör.*

A kis fokszámú pontok foka „nem nagyon kicsi”.

10. Állítás. $Pósa \implies Ore$.

BIZONYÍTÁS Tegyük fel indirekt, hogy G olyan gráf, melyre az Ore-feltétel teljesül, de a Pósa-féle nem. Van $k < \frac{n}{2}$, hogy $d_k \leq k$. $d_1 \leq d_k < \frac{n}{2}$ ezért az első k csúcs közül bármely kettő fokszámösszege kisebb, mint n . Ore-feltétel alapján ezek páronként össze vannak kötve. Ez $k - 1$ szomszédot jelent mindegyiknek. A fokszámuk azonban legfeljebb k , így a maradék $n - k$ csúcsból legfeljebb egyvel lehetnek összekötve. De $n - k > k$, azaz a maradék $n - k$ csúcs között lesz olyan, amelyik az első k közül egyel sincs összekötve. Ennek fokszáma tehát

legfeljebb $n - k - 1$. Azaz, ezen csúcs és az első k közül bármelyik foksám összege legfeljebb $n - k - 1 + k = n - 1$, ugyanakkor nincsenek összekötve, ami ellentmond az Ore-feltételnek.

11. Tétel (Chvátal). *Jelöljük G pontjai foksámát nagyság szerint rendre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ -nel.*

1. *Ha minden k -ra, amelyre $d_k \leq k < n/2$, teljesül, hogy $d_{n-k} \geq n - k$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.*
2. *Ha $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ pozitív egészekre a fenti feltétel nem teljesül, akkor van olyan Hamilton-kört nem tartalmazó gráf, melynek $d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_n$ foksámaira $\forall i: d'_i \geq d_i$.*

12. Állítás. *Chvátal \implies Pósa.*