

Bevezetés a Számításelméletbe II. 7. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 március 26.

Hálózat

Hálózat

1. Definíció. Legyen G egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy $c(e)$ nem-negatív valós számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljünk ki továbbá két s, t pontot G -ben, melyeket **forrásnak (termelőnek)** illetve **nyelőnek (fogyasztónak)** hívunk. Ekkor a $(G; s; t; c)$ négyest **hálózatnak** nevezzük.

Hálózat

1. Definíció. Legyen G egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy $c(e)$ nem-negatív valós számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljünk ki továbbá két s, t pontot G -ben, melyeket **forrásnak (termelőnek)** illetve **nyelőnek (fogyasztónak)** hívunk. Ekkor a $(G; s; t; c)$ négyest **hálózatnak** nevezzük.

Szemléltetésképp feltehetjük, hogy a hálózattal egy olajvezetékrendszert ábrázolunk.



Hálózat

1. Definíció. Legyen G egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy $c(e)$ nem-negatív valós számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljünk ki továbbá két s, t pontot G -ben, melyeket **forrásnak (termelőnek)** illetve **nyelőnek (fogyasztónak)** hívunk. Ekkor a $(G; s; t; c)$ négyest **hálózatnak** nevezzük.

Szemléltetésképp feltehetjük, hogy a hálózattal egy olajvezetékrendszert ábrázolunk. A kapacitások a vezeték vastagságát jelentik, vagyis azt, hogy egységnyi idő alatt mennyi olaj folyhat át azon a vezetékdarabon.



Hálózat

1. Definíció. Legyen G egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy $c(e)$ nem-negatív valós számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljünk ki továbbá két s, t pontot G -ben, melyeket **forrásnak (termelőnek)** illetve **nyelőnek (fogyasztónak)** hívunk. Ekkor a $(G; s; t; c)$ négyest **hálózatnak** nevezzük.

Szemléltetésképp feltehetjük, hogy a hálózattal egy olajvezetékrendszert ábrázolunk. A kapacitások a vezeték vastagságát jelentik, vagyis azt, hogy egységnyi idő alatt mennyi olaj folyhat át azon a vezetékdarabon. A kérdés az, hogy egy adott hálózaton mennyi olaj folyhat át s -ből t -be.



Hálózat

1. Definíció. Legyen G egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy $c(e)$ nem-negatív valós számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljünk ki továbbá két s, t pontot G -ben, melyeket **forrásnak (termelőnek)** illetve **nyelőnek (fogyasztónak)** hívunk. Ekkor a $(G; s; t; c)$ négyest **hálózatnak** nevezzük.

Szemléltetésképp feltehetjük, hogy a hálózattal egy olajvezetékrendszert ábrázolunk. A kapacitások a vezeték vastagságát jelentik, vagyis azt, hogy egységnyi idő alatt mennyi olaj folyhat át azon a vezetékdarabon. A kérdés az, hogy egy adott hálózaton mennyi olaj folyhat át s -ből t -be. Szoktak beszélni úthálózatokról is, ahol a kapacitás az utak áteresztőképessége, és árukat kell eljuttatni a termelőtől a fogyasztókhöz.



Hálózat

1. Definíció. Legyen G egy irányított gráf. Rendeljük minden éléhez egy $c(e)$ nem-negatív valós számot, amit az él **kapacitásának** nevezünk. Jelöljük ki továbbá két s, t pontot G -ben, melyeket **forrásnak (termelőnek)** illetve **nyelőnek (fogyasztónak)** hívunk. Ekkor a $(G; s; t; c)$ négyest **hálózatnak** nevezzük.

Szemléltetésképp feltehetjük, hogy a hálózattal egy olajvezetékrendszert ábrázolunk. A kapacitások a vezeték vastagságát jelentik, vagyis azt, hogy egységnyi idő alatt mennyi olaj folyhat át azon a vezetékdarabon. A kérdés az, hogy egy adott hálózaton mennyi olaj folyhat át s -ből t -be. Szoktak beszélni úthálózatokról is, ahol a kapacitás az utak áteresztőképessége, és árukat kell eljuttatni a termelőtől a fogyasztókhöz. De beszélhetünk számítógép hálózatokról és adatátviteli sávszélességről is.



Folyam

2. Definíció. Az $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ függvény **megengedett függvény**, ha $f(e) \leq c(e)$ minden élre, és

$$m(v) = \sum \{f(e) \mid e \text{ végpontja } v\} - \sum \{f(e) \mid e \text{ kezdőpontja } v\} = 0$$

minden $v \in V(G)$ -re, kivéve az s és t pontokat. Egy megengedett függvényt **folyamnak** hívunk. Könnyen belátható, hogy $m(t) = -m(s)^*$.

Folyam

2. Definíció. Az $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ függvény **megengedett függvény**, ha $f(e) \leq c(e)$ minden élre, és

$$m(v) = \sum \{f(e) \mid e \text{ végpontja } v\} - \sum \{f(e) \mid e \text{ kezdőpontja } v\} = 0$$

minden $v \in V(G)$ -re, kivéve az s és t pontokat. Egy megengedett függvényt **folyamnak** hívunk. Könnyen belátható, hogy $m(t) = -m(s)^*$.

*: $\sum m(v) = 0$, mivel minden e élre az $f(e)$ érték az él végpontjánál pozitív, kezdőpontjánál negatív előjellel adódik össze.

Folyam

2. Definíció. Az $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ függvény **megengedett függvény**, ha $f(e) \leq c(e)$ minden élre, és

$$m(v) = \sum \{f(e) \mid e \text{ végpontja } v\} - \sum \{f(e) \mid e \text{ kezdőpontja } v\} = 0$$

minden $v \in V(G)$ -re, kivéve az s és t pontokat. Egy megengedett függvényt **folyamnak** hívunk. Könnyen belátható, hogy $m(t) = -m(s)^*$.

*: $\sum m(v) = 0$, mivel minden e élre az $f(e)$ érték az él végpontjánál pozitív, kezdőpontjánál negatív előjellel adódik össze. $0 = \sum m(v) = m(t) + m(s) + \sum_{v \neq s, t} m(v) = m(t) + m(s)$.

Folyam

2. Definíció. Az $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ függvény **megengedett függvény**, ha $f(e) \leq c(e)$ minden élre, és

$$m(v) = \sum \{f(e) \mid e \text{ végpontja } v\} - \sum \{f(e) \mid e \text{ kezdőpontja } v\} = 0$$

minden $v \in V(G)$ -re, kivéve az s és t pontokat. Egy megengedett függvényt **folyamnak** hívunk. Könnyen belátható, hogy $m(t) = -m(s)^*$. Ezt a közös értéket a **folyam értékének** nevezzük és m_f -el jelöljük. Egy élet **telítettnek** hívunk egy folyamban, ha $f(e) = c(e)$, és **telítetlennek**, ha $f(e) < c(e)$.

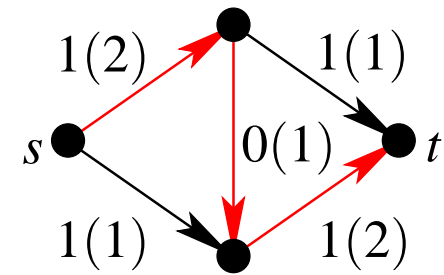
*: $\sum m(v) = 0$, mivel minden e élre az $f(e)$ érték az él végpontjánál pozitív, kezdőpontjánál negatív előjellel adódik össze. $0 = \sum m(v) = m(t) + m(s) + \sum_{v \neq s, t} m(v) = m(t) + m(s)$.

A feladat a maximális értékű folyam meghatározása.

A feladat a maximális értékű folyam meghatározása.
Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

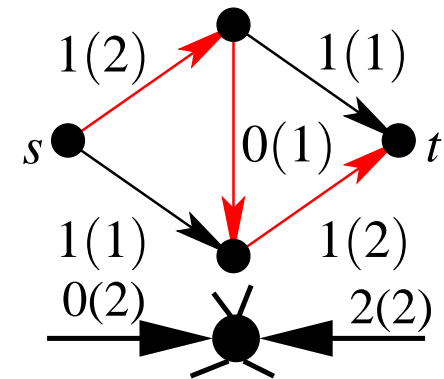
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása.
Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.



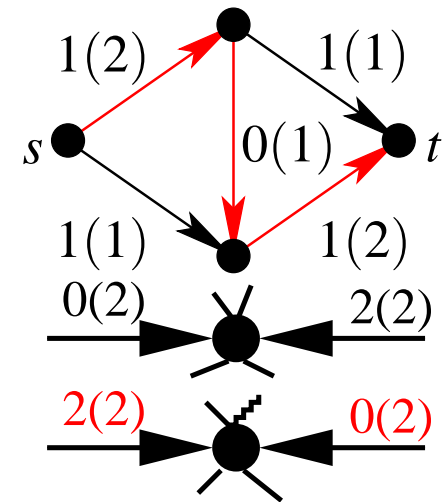
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása.
Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget.



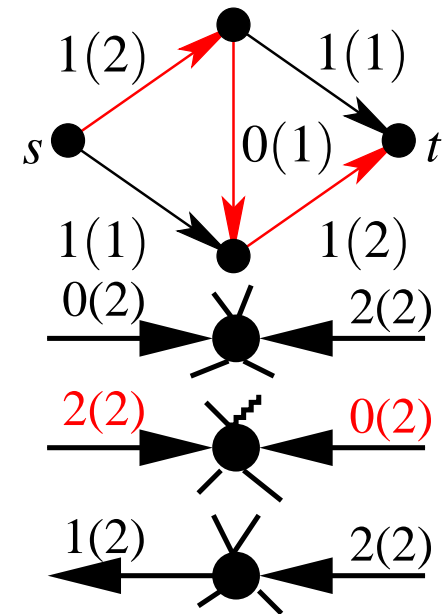
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása. Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él



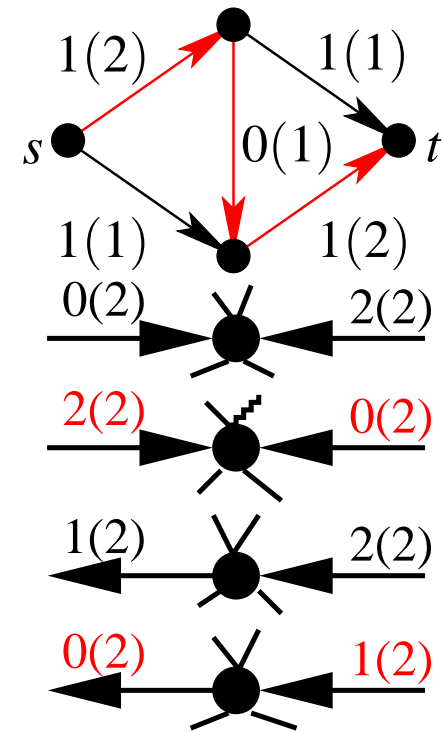
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása. Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él van egy pozitív kifutó él.



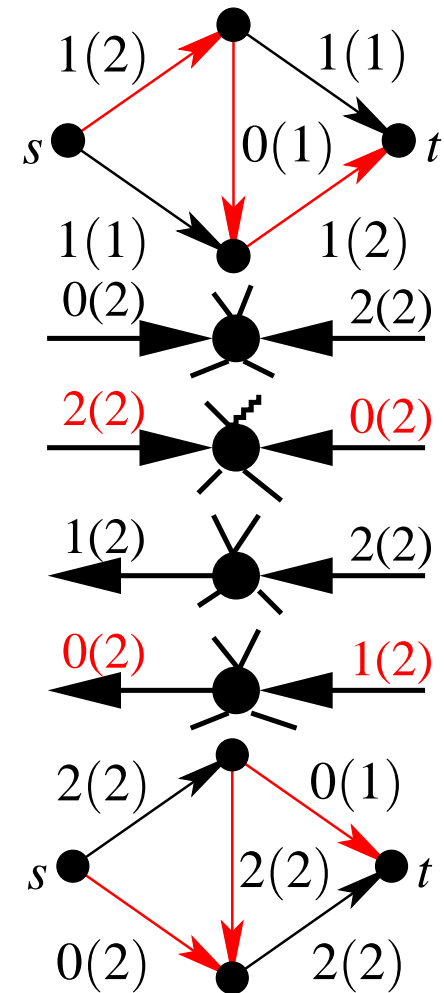
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása.
Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él van egy pozitív kifutó él.



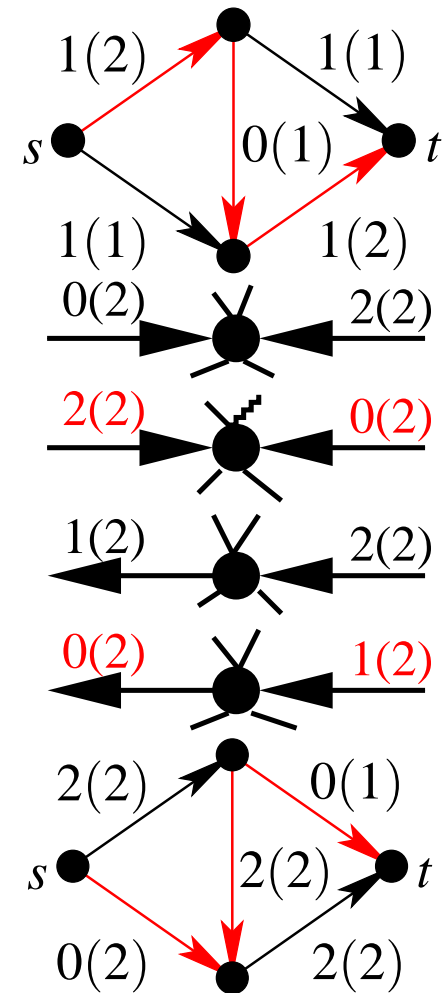
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása. Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él van egy pozitív kifutó él. Legyen a gráfban $s = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = t$ egy út, nem feltétlenül az irányítás szerint. Növelhetjük a folyam értékét, ha minden $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ -re vagy $e_i = (v_i, v_{i+1})$ és $f(e_i) < c(e_i)$, vagy $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ és $f(e_i) > 0$. Ekkor az első típusú éleken növeljük a folyam értékét, míg a második típusúakon csökkentjük,



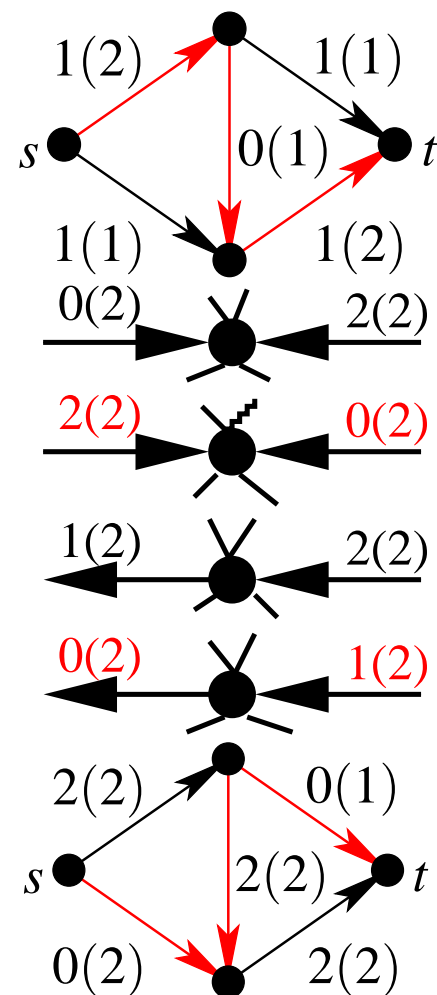
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása. Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él van egy pozitív kifutó él. Legyen a gráfban $s = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = t$ egy út, nem feltétlenül az irányítás szerint. Növelhetjük a folyam értékét, ha minden $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ -re vagy $e_i = (v_i, v_{i+1})$ és $f(e_i) < c(e_i)$, vagy $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ és $f(e_i) > 0$. Ekkor az első típusú éleken növeljük a folyam értékét, míg a második típusúakon csökkentjük, így az össz folyamérték nő.



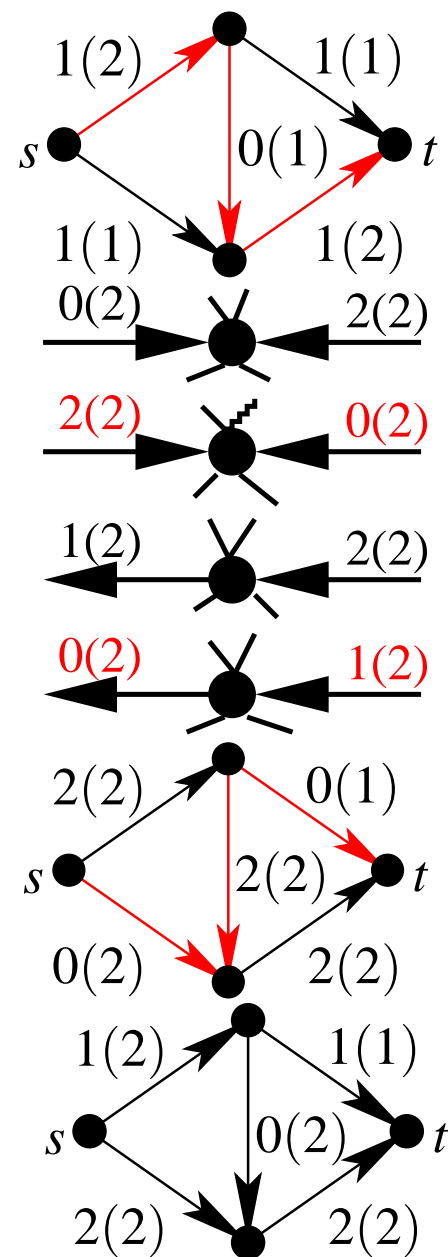
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása. Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él van egy pozitív kifutó él. Legyen a gráfban $s = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = t$ egy út, nem feltétlenül az irányítás szerint. Növelhetjük a folyam értékét, ha minden $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ -re vagy $e_i = (v_i, v_{i+1})$ és $f(e_i) < c(e_i)$, vagy $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ és $f(e_i) > 0$. Ekkor az első típusú éleken növeljük a folyam értékét, míg a második típusúakon csökkentjük, így az össz folyamérték nő. Az ilyen utakat *javító útnak* hívjuk.



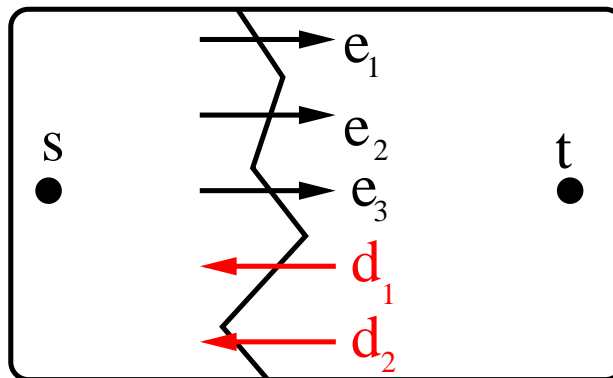
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása. Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út s -ből t -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen megnövelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él van egy pozitív kifutó él. Legyen a gráfban $s = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = t$ egy út, nem feltétlenül az irányítás szerint. Növelhetjük a folyam értékét, ha minden $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ -re vagy $e_i = (v_i, v_{i+1})$ és $f(e_i) < c(e_i)$, vagy $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ és $f(e_i) > 0$. Ekkor az első típusú éleken növeljük a folyam értékét, míg a második típusúakon csökkentjük, így az össz folyamérték nő. Az ilyen utakat *javító útnak* hívjuk.



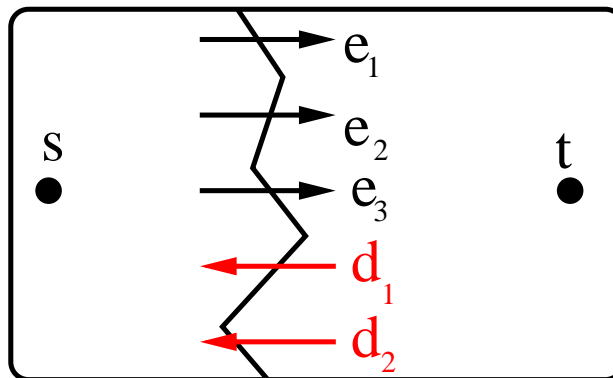
Vágás

3. Definíció. Legyen $s \in X \subseteq V(G) - \{t\}$, így nyilvánvaló, hogy sem X , sem $V(G) - X$ nem üres halmaz. Azoknak az éleknek a C halmazát, amelyeknek egyik végpontja X -beli, másik $V(G) - X$ -beli, a hálózati folyam egy (s, t) -vágásának nevezzük.



Vágás

3. Definíció. Legyen $s \in X \subseteq V(G) - \{t\}$, így nyilvánvaló, hogy sem X , sem $V(G) - X$ nem üres halmaz. Azoknak az éleknek a C halmazát, amelyeknek egyik végpontja X -beli, másik $V(G) - X$ -beli, a hálózati folyam egy (s, t) -vágásának nevezzük. A **vágás értéke**, $c(C)$, azon éleken levő kapacitások összege, amelyek egy X -beli pontból egy $V(G) - X$ -beli pontba mutatnak. (e_1, e_2, \dots) Ezeket előremutató éleknek nevezzük. Tehát a vágás értékében nem játszanak szerepet a visszafelé mutató élek (d_1, d_2, \dots), vagyis azok, amelyek egy X -beli pontba mutatnak.



4. Állítás. *Legyen G egy hálózat, f egy folyam, $C = (X, V(G) - X)$ egy vágás. Ekkor $m_f \leq c(C)$.*

4. Állítás. Legyen G egy hálózat, f egy folyam, $C = (X, V(G) - X)$ egy vágás. Ekkor $m_f \leq c(C)$.

BIZONYÍTÁS Legyenek e_1, e_2, \dots, e_r az előre (X -ből $V(G) - X$ -be) mutató élek, d_1, d_2, \dots, d_s pedig a visszafelé mutató élek. Ekkor

$$m_f = \sum_{i=1}^r f(e_i) - \sum_{j=1}^s f(d_j) \leq \sum_{i=1}^r c(e_i) = c(C).$$

Javító út – maximális folyam

Javító út – maximális folyam

5. Tétel. *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s -ből t -be.*

Javító út – maximális folyam

5. Tétel. *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s -ből t -be.*

BIZONYÍTÁS Legyen P egy javító út. Ekkor P minden előre mutató élére a $c(e_i) - f(e_i)$, visszafelé mutatóra pedig az $f(e_i)$ érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek a minimuma d .

Javító út – maximális folyam

5. Tétel. *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s -ből t -be.*

BIZONYÍTÁS Legyen P egy javító út. Ekkor P minden előre mutató élére a $c(e_i) - f(e_i)$, visszafelé mutatóra pedig az $f(e_i)$ érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek a minimuma d . Az első típusú élekre növeljük $f(e_i)$ -t d -vel, a második típusúaknál pedig csökkentsük $f(e_i)$ -t d -vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont d -vel nőtt.

Javító út – maximális folyam

5. Tétel. *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s -ből t -be.*

BIZONYÍTÁS Legyen P egy javító út. Ekkor P minden előre mutató élére a $c(e_i) - f(e_i)$, visszafelé mutatóra pedig az $f(e_i)$ érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek a minimuma d . Az első típusú élekre növeljük $f(e_i)$ -t d -vel, a második típusúaknál pedig csökkentsük $f(e_i)$ -t d -vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont d -vel nőtt.

Tegyük most fel, hogy nincs javító út s -ből t -be. Legyen $X \subset V(G)$ s -ből javító úton elérhető pontok halmaza. Ekkor sem X , sem $V(G) - X$ nem üres, hiszen $s \in X, t \in V(G) - X$.

Javító út – maximális folyam

5. Tétel. *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s -ből t -be.*

BIZONYÍTÁS Legyen P egy javító út. Ekkor P minden előre mutató élére a $c(e_i) - f(e_i)$, visszafelé mutatóra pedig az $f(e_i)$ érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek a minimuma d . Az első típusú élekre növeljük $f(e_i)$ -t d -vel, a második típusúaknál pedig csökkentsük $f(e_i)$ -t d -vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont d -vel nőtt.

Tegyük most fel, hogy nincs javító út s -ből t -be. Legyen $X \subset V(G)$ s -ből javító úton elérhető pontok halmaza. Ekkor sem X , sem $V(G) - X$ nem üres, hiszen $s \in X, t \in V(G) - X$. Tekintsünk egy olyan e élet, amely egy X -beli x pontból egy nem X -beli y -ba mutat. Ekkor $f(e) = c(e)$, hiszen ellenkező esetben az s -ből x -be vezető javító út e -vel meghosszabbítva egy s -ből y -ba vezető javító utat szolgáltatna.

Javító út – maximális folyam

5. Tétel. *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s -ből t -be.*

BIZONYÍTÁS Legyen P egy javító út. Ekkor P minden előre mutató élére a $c(e_i) - f(e_i)$, visszafelé mutatóra pedig az $f(e_i)$ érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek a minimuma d . Az első típusú élekre növeljük $f(e_i)$ -t d -vel, a második típusúaknál pedig csökkentsük $f(e_i)$ -t d -vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont d -vel nőtt.

Tegyük most fel, hogy nincs javító út s -ből t -be. Legyen $X \subset V(G)$ s -ből javító úton elérhető pontok halmaza. Ekkor sem X , sem $V(G) - X$ nem üres, hiszen $s \in X, t \in V(G) - X$. Tekintsünk egy olyan e élet, amely egy X -beli x pontból egy nem X -beli y -ba mutat. Ekkor $f(e) = c(e)$, hiszen ellenkező esetben az s -ből x -be vezető javító út e -vel meghosszabbítva egy s -ből y -ba vezető javító utat szolgáltatna. Ugyanígy egy olyan élre, amelyik egy nem X -beliből egy X -belibe mutat, teljesül, hogy $f(e) = 0$.

Javító út – maximális folyam

5. Tétel. *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út s -ből t -be.*

BIZONYÍTÁS Legyen P egy javító út. Ekkor P minden előre mutató élére a $c(e_i) - f(e_i)$, visszafelé mutatóra pedig az $f(e_i)$ érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek a minimuma d . Az első típusú élekre növeljük $f(e_i)$ -t d -vel, a második típusúaknál pedig csökkentsük $f(e_i)$ -t d -vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont d -vel nőtt.

Tegyük most fel, hogy nincs javító út s -ből t -be. Legyen $X \subset V(G)$ s -ből javító úton elérhető pontok halmaza. Ekkor sem X , sem $V(G) - X$ nem üres, hiszen $s \in X, t \in V(G) - X$. Tekintsünk egy olyan e élet, amely egy X -beli x pontból egy nem X -beli y -ba mutat. Ekkor $f(e) = c(e)$, hiszen ellenkező esetben az s -ből x -be vezető javító út e -vel meghosszabbítva egy s -ből y -ba vezető javító utat szolgáltatna. Ugyanígy egy olyan élre, amelyik egy nem X -beliből egy X -belibe mutat, teljesül, hogy $f(e) = 0$. Tehát erre a vágásra teljesül, hogy $m_f = c(C)$, ami a 4. Állítás szerint azt jelenti, hogy f maximális.

Ford-Fulkerson tétel

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

BIZONYÍTÁS A maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágásnál a 4. Állítás szerint.

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

BIZONYÍTÁS A maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágásnál a 4. Állítás szerint. Az 5. Tétel bizonyítása egy maximális folyamhoz egy vele egyező értékű vágást konstruál. Ezzel a bizonyítás kész

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

BIZONYÍTÁS A maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágásnál a 4. Állítás szerint. Az 5. Tétel bizonyítása egy maximális folyamhoz egy vele egyező értékű vágást konstruál. Ezzel a bizonyítás kész **????**

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

BIZONYÍTÁS A maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágásnál a 4. Állítás szerint. Az 5. Tétel bizonyítása egy maximális folyamhoz egy vele egyező értékű vágást konstruál. Ezzel a bizonyítás kész **????** Honnan tudjuk, hogy **létezik** maximális folyam?

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

BIZONYÍTÁS A maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágásnál a 4. Állítás szerint. Az 5. Tétel bizonyítása egy maximális folyamhoz egy vele egyező értékű vágást konstruál. Ezzel a bizonyítás kész **????** Honnan tudjuk, hogy **létezik** maximális folyam? Egy algoritmust adunk maximális folyam keresésére.

Ford-Fulkerson tétel

6. Tétel (Ford–Fulkerson). *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

BIZONYÍTÁS A maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágásnál a 4. Állítás szerint. Az 5. Tétel bizonyítása egy maximális folyamhoz egy vele egyező értékű vágást konstruál. Ezzel a bizonyítás kész **????** Honnan tudjuk, hogy **létezik** maximális folyam? Egy algoritmust adunk maximális folyam keresésére.

E tétel segítségével könnyen bebizonyítható egy adott folyamról (amit valahogy megsejtettünk), hogy az maximális. Ha megsejtünk egy ugyanilyen értékű vágást, akkor a Ford–Fulkerson tétel biztosítja, hogy a folyam értéke maximális.

Maximális folyam algoritmus

Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét.

Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

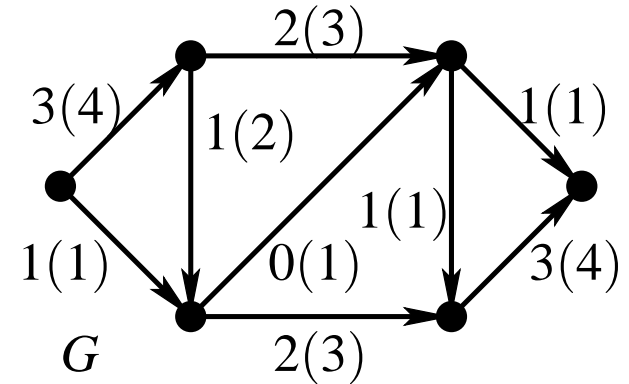
Segéd gráf

Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

Segéd gráf

Adott G gráfhoz és f folyamhoz definiálunk egy G_f irányított gráfot:

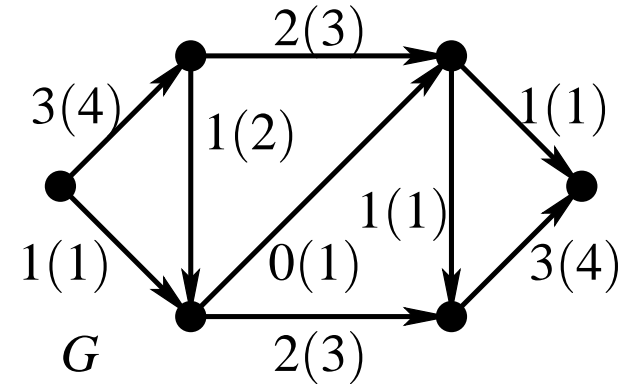


Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

Segéd gráf

Adott G gráfhoz és f folyamhoz definiálunk egy G_f irányított gráfot: Legyen $V(G_f) = V(G)$ és G_f -ben fusson egy irányított él x -ből y -ba, ha vagy (1) $(x,y) \in E(G)$ és $f(x,y) < c(x,y)$,

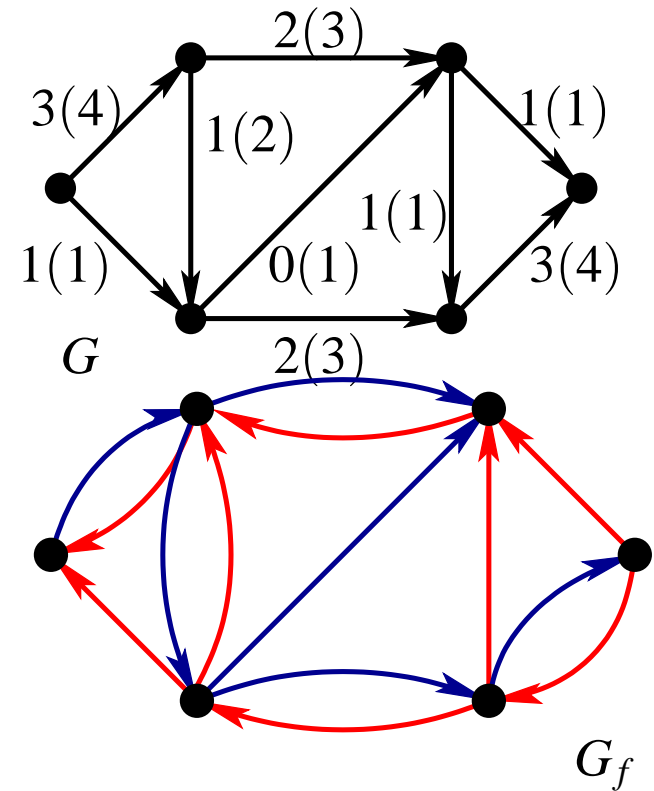


Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

Segéd gráf

Adott G gráfhoz és f folyamhoz definiálunk egy G_f irányított gráfot: Legyen $V(G_f) = V(G)$ és G_f -ben fusson egy irányított él x -ből y -ba, ha vagy (1) $(x,y) \in E(G)$ és $f(x,y) < c(x,y)$, vagy (2) $(y,x) \in E(G)$ és $f(y,x) > 0$.



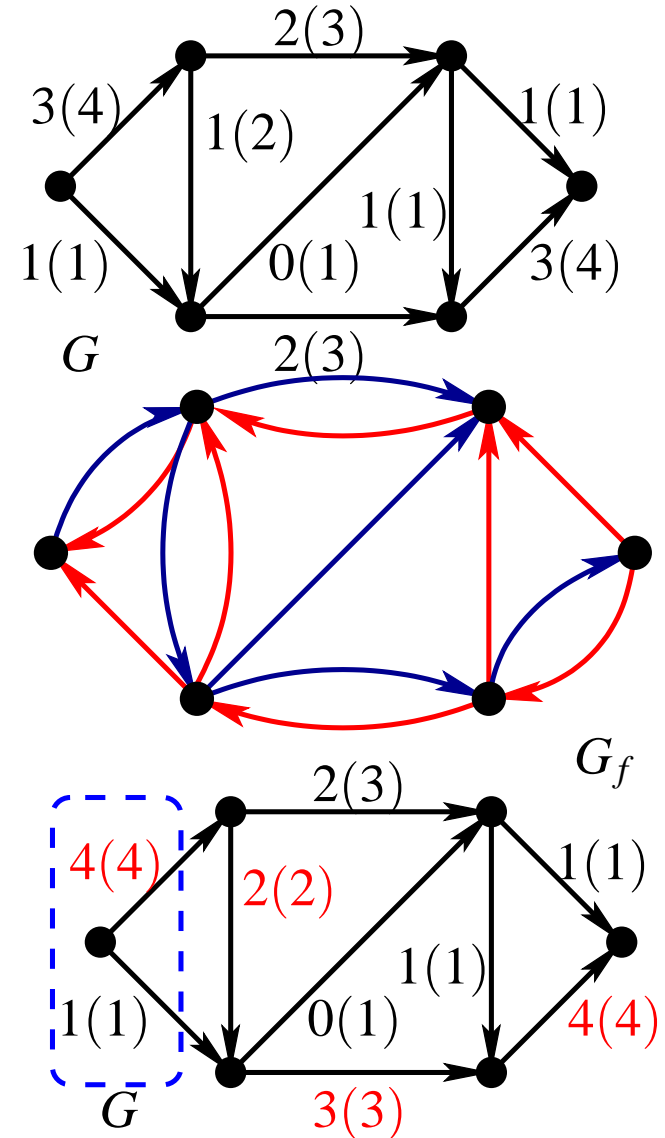
Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

Segéd gráf

Adott G gráfhoz és f folyamhoz definiálunk egy G_f irányított gráfot: Legyen $V(G_f) = V(G)$ és G_f -ben fusson egy irányított él x -ből y -ba, ha vagy (1) $(x,y) \in E(G)$ és $f(x,y) < c(x,y)$, vagy (2) $(y,x) \in E(G)$ és $f(y,x) > 0$.

Ha G_f -ben van egy irányított út s -ből t -be, akkor az ennek az útnak megfelelő élek G -ben épp egy javító utat adnak az f folyamra nézve.



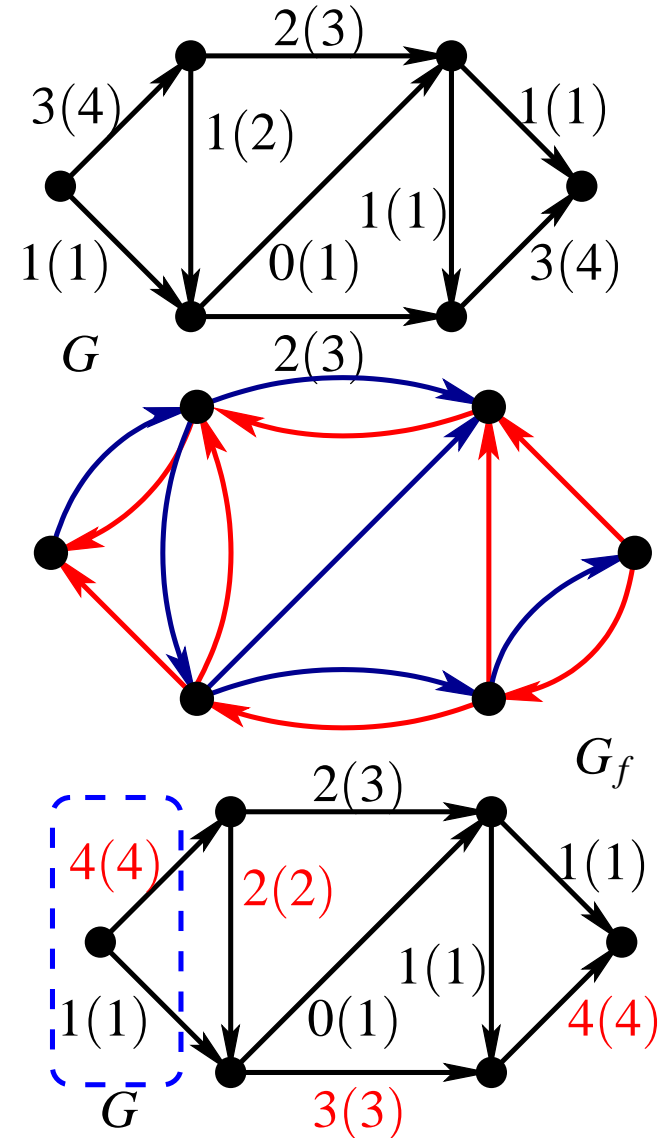
Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

Segéd gráf

Adott G gráfhoz és f folyamhoz definiálunk egy G_f irányított gráfot: Legyen $V(G_f) = V(G)$ és G_f -ben fusson egy irányított él x -ből y -ba, ha vagy (1) $(x,y) \in E(G)$ és $f(x,y) < c(x,y)$, vagy (2) $(y,x) \in E(G)$ és $f(y,x) > 0$.

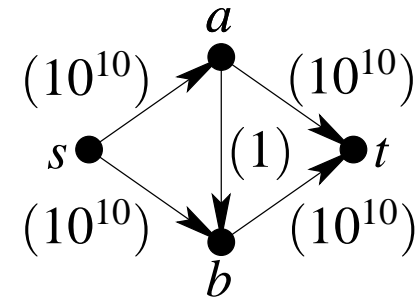
Ha G_f -ben van egy irányított út s -ből t -be, akkor az ennek az útnak megfelelő élek G -ben épp egy javító utat adnak az f folyamra nézve. Ha pedig van javító út G -ben, akkor lesz irányított út s -ből t -be G_f -ben.



1. Nem mindegy, hogy a G_f gráfban melyik s - t utat választjuk.

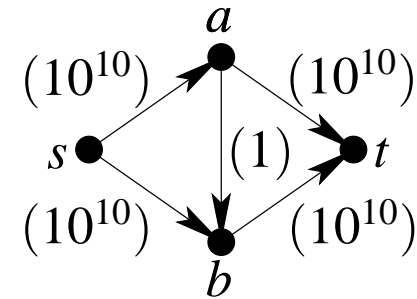
1. Nem mindegy, hogy a G_f gráfban melyik s - t utat választjuk.

(a) Lehet, hogy az algoritmus túl sok lépésből fog állni. Felváltva az s, a, b, t és s, b, a, t utakat vesszük, akkor a maximális folyam értékéhez csak $2 \cdot 10^{10}$ lépésben jutunk el, míg ha az első lépésben az s, a, t javító utat vesszük, akkor 2 lépésben jutunk a maximumhoz.



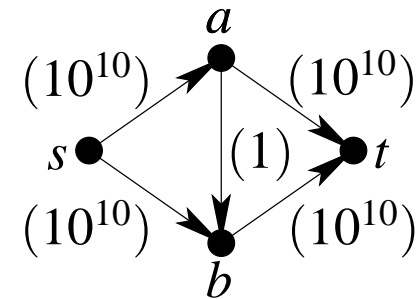
1. Nem mindegy, hogy a G_f gráfban melyik s - t utat választjuk.

- (a) Lehet, hogy az algoritmus túl sok lépésből fog állni. Felváltva az s, a, b, t és s, b, a, t utakat vesszük, akkor a maximális folyam értékéhez csak $2 \cdot 10^{10}$ lépésben jutunk el, míg ha az első lépésben az s, a, t javító utat vesszük, akkor 2 lépésben jutunk a maximumhoz.
- (b) Ford és Fulkerson konstruáltak olyan példát is, ahol javítások egy végtelen sorozata történik. A folyamértékek (monoton növekvő és korlátos, tehát konvergens) sorozata a maximális folyam $1/4$ -hez tart.



1. Nem mindegy, hogy a G_f gráfban melyik s - t utat választjuk.

- (a) Lehet, hogy az algoritmus túl sok lépésből fog állni. Felváltva az s, a, b, t és s, b, a, t utakat vesszük, akkor a maximális folyam értékéhez csak $2 \cdot 10^{10}$ lépésben jutunk el, míg ha az első lépésben az s, a, t javító utat vesszük, akkor 2 lépésben jutunk a maximumhoz.
- (b) Ford és Fulkerson konstruáltak olyan példát is, ahol javítások egy végtelen sorozata történik. A folyamértékek (monoton növekvő és korlátos, tehát konvergens) sorozata a maximális folyam $1/4$ -hez tart.



2. Ha a kapacitások egész számok, akkor a maximális folyam értéke egész szám, és ez olyan f függvényrel is megvalósítható, mely minden élen egész értéket vesz fel.

Edmonds-Karp tétel

Edmonds-Karp tétel

Akkor most van algoritmus, vagy nincs?

Edmonds-Karp tétel

Akkor most van algoritmus, vagy nincs?

Ha egészek a kapacitások, akkor az azonosan 0 folyamból indulva mindig egész számmal növeljük a folyam értéket

Edmonds-Karp tétel

Akkor most van algoritmus, vagy nincs?

Ha egészek a kapacitások, akkor az azonosan 0 folyamból indulva mindig egész számmal növeljük a folyam értéket \implies Az algoritmus véges sok lépésben véget ér.

Edmonds-Karp tétel

Akkor most van algoritmus, vagy nincs?

Ha egészek a kapacitások, akkor az azonosan 0 folyamból indulva mindig egész számmal növeljük a folyam értéket \implies Az algoritmus véges sok lépésben véget ér. De lehet hogy túl lassan.

Edmonds-Karp tétel

Akkor most van algoritmus, vagy nincs?

Ha egészek a kapacitások, akkor az azonosan 0 folyamból indulva mindig egész számmal növeljük a folyam értéket \implies Az algoritmus véges sok lépésben véget ér. De lehet hogy túl lassan.

7. Tétel (Edmonds-Karp). *Ha mindig a legrövidebb javító utat vesszük, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával.*

A folyamprobléma általánosításai

A folyamprobléma általánosításai

- Több termelő s_1, s_2, \dots, s_k és több fogyasztó t_1, t_2, \dots, t_l .

A folyamprobléma általánosításai

- Több termelő s_1, s_2, \dots, s_k és több fogyasztó t_1, t_2, \dots, t_l .
- Pontokhoz is rendelünk $\bar{c}(v)$ kapacitásokat, és megköveteljük, hogy minden v -re $\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u, v) \leq \bar{c}(v)$.

A folyamprobléma általánosításai

- Több termelő s_1, s_2, \dots, s_k és több fogyasztó t_1, t_2, \dots, t_l .
- Pontokhoz is rendelünk $\bar{c}(v)$ kapacitásokat, és megköveteljük, hogy minden v -re $\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u,v) \leq \bar{c}(v)$.
- Megengedünk irányítatlan éleket.

Ez utóbbi esetben ilyen c kapacitású $\{u, v\}$ él helyett felvesszünk két c kapacitású (u, v) és (v, u) irányított élet.

A folyamprobléma általánosításai

- Több termelő s_1, s_2, \dots, s_k és több fogyasztó t_1, t_2, \dots, t_l .
- Pontokhoz is rendelünk $\bar{c}(v)$ kapacitásokat, és megköveteljük, hogy minden v -re $\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u,v) \leq \bar{c}(v)$.
- Megengedünk irányítatlan éleket.

Ez utóbbi esetben ilyen c kapacitású $\{u, v\}$ él helyett felveszünk két c kapacitású (u, v) és (v, u) irányított élet.

Ha a kapacitás minden élen 1 vagy 0, akkor van olyan maximális folyam, melynek minden élén a folyam értéke vagy 1 vagy 0.

A folyamprobléma általánosításai

- Több termelő s_1, s_2, \dots, s_k és több fogyasztó t_1, t_2, \dots, t_l .
- Pontokhoz is rendelünk $\bar{c}(v)$ kapacitásokat, és megköveteljük, hogy minden v -re $\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u,v) \leq \bar{c}(v)$.
- Megengedünk irányítatlan éleket.

Ez utóbbi esetben ilyen c kapacitású $\{u, v\}$ él helyett felvesszünk két c kapacitású (u, v) és (v, u) irányított élet.

Ha a kapacitás minden élen 1 vagy 0, akkor van olyan maximális folyam, melynek minden élén a folyam értéke vagy 1 vagy 0. Ha elhagyjuk ez utóbbi éleket, akkor diszjunkt utakat kapunk s -ből t -be. (Esetleg maradhatnak további irányított körök is.)

Több termelő és több fogyasztó

A feladat az összes termelőtől az összes fogyasztóig eljutó termékmennyiség maximalizálása.

Több termelő és több fogyasztó

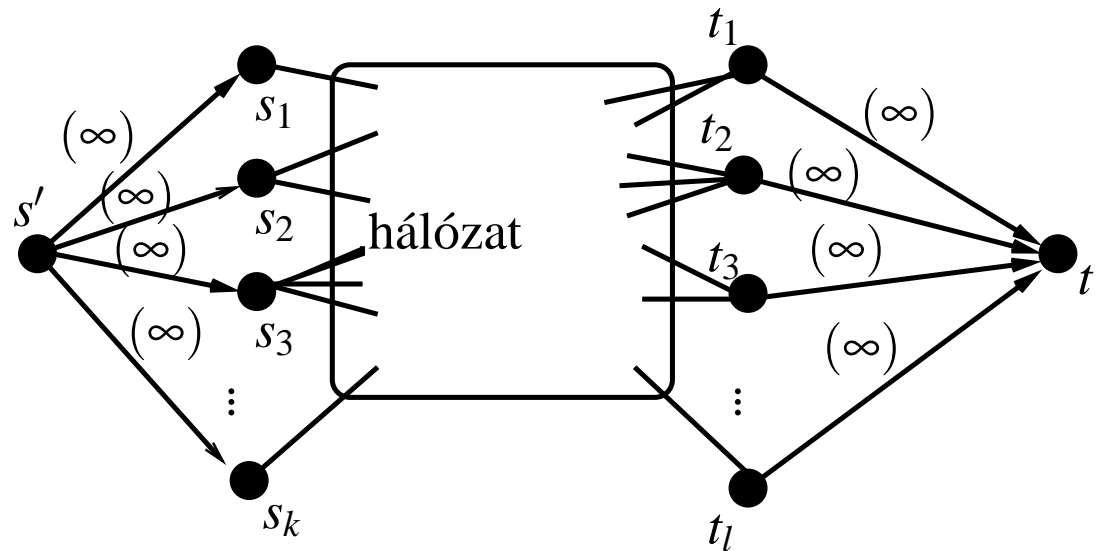
A feladat az összes termelőtől az összes fogyasztóig eljutó termékmennyiség maximalizálása.

Vegyünk fel két új s', t' pontot, és kössük össze s' -t s_1, \dots, s_k -val, t_1, \dots, t_l -t pedig t' -vel, az új élek mindegyikének kapacitása legyen ∞ .

Több termelő és több fogyasztó

A feladat az összes termelőtől az összes fogyasztóig eljutó termékmennyiség maximalizálása.

Vegyünk fel két új s', t' pontot, és kössük össze s' -t s_1, \dots, s_k -val, t_1, \dots, t_l -t pedig t' -vel, az új élek mindegyikének kapacitása legyen ∞ . Ha ebben a hagyományos hálózatban meghatározzuk a maximális folyamot, akkor az eredeti éleken szereplő folyamértékek pontosan a keresett értékek.



Pontkapacitások

A pontokhoz is rendelünk $\bar{c}(v)$ kapacitásokat, és megköveteljük, hogy a ponton csak ennyi víz folyhat át, azaz minden v -re

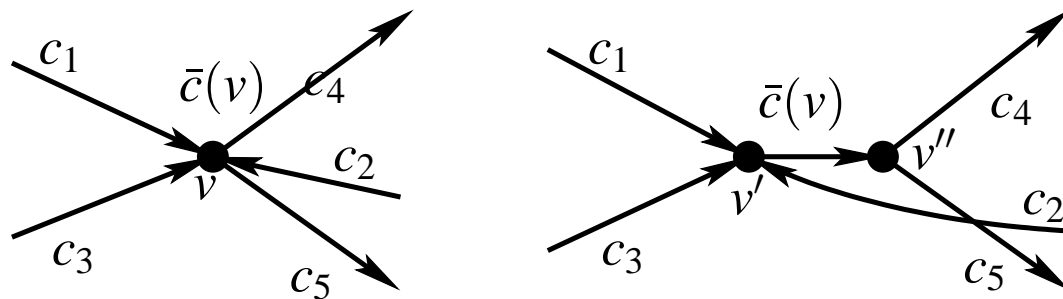
$$\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u,v) \leq \bar{c}(v).$$

Pontkapacitások

A pontokhoz is rendelünk $\bar{c}(v)$ kapacitásokat, és megköveteljük, hogy a ponton csak ennyi víz folyhat át, azaz minden v -re

$$\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u,v) \leq \bar{c}(v).$$

konstruálunk hozzá egy hagyományos hálózatot. Minden v pontot helyettesítsünk két v', v'' ponttal. Ha egy él az u pontból a v pontba mutatott, akkor helyette vegyünk fel egy u'' -ből v' -be mutató élet a hozzá tartozó kapacitással együtt. Ezenkívül pedig minden v' -ből mutasson egy él v'' -be és ennek kapacitása $\bar{c}(v)$ legyen.



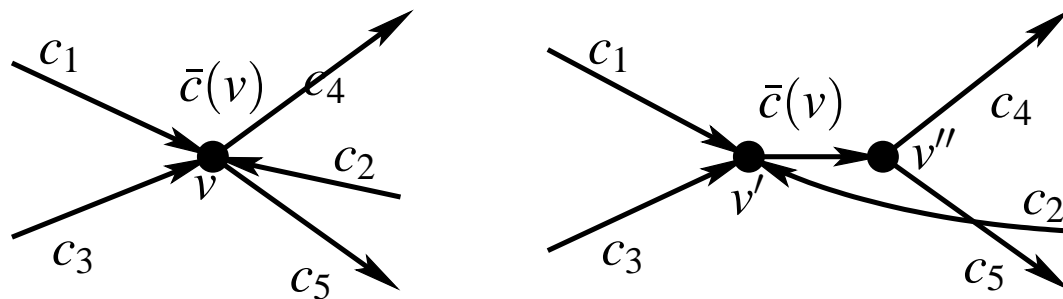
Pontkapacitások

A pontokhoz is rendelünk $\bar{c}(v)$ kapacitásokat, és megköveteljük, hogy a ponton csak ennyi víz folyhat át, azaz minden v -re

$$\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u,v) \leq \bar{c}(v).$$

konstruálunk hozzá egy hagyományos hálózatot. Minden v pontot helyettesítsünk két v', v'' ponttal. Ha egy él az u pontból a v pontba mutatott, akkor helyette vegyünk fel egy u'' -ből v' -be mutató élet a hozzá tartozó kapacitással együtt. Ezenkívül pedig minden v' -ből mutasson egy él v'' -be és ennek kapacitása $\bar{c}(v)$ legyen.

Ebben a hálózatban egy „hagyományos” maximális folyam megfelel a pontkapacitásos hálózat egy maximális folyamának.



Menger tételei

Menger tételei

8. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$, akkor az s -ből t -be vezető páronként $\left\{ \begin{array}{c} \text{élidegen} \\ \text{pontidegen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \text{irányított} \\ \text{irányítatlan} \end{array} \right\}$ utak maximális száma megegyezik az összes $\left\{ \begin{array}{c} \text{irányított} \\ \text{irányítatlan} \end{array} \right\} s - t$ utat lefogó $\left\{ \begin{array}{c} \text{élek} \\ \text{pontok} \end{array} \right\}$ minimális számával.*

Menger tételei

8. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$, akkor az s -ből t -be vezető páronként $\left\{ \begin{array}{c} \text{élidegen} \\ \text{pontidegen} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{c} \text{irányított} \\ \text{irányítatlan} \end{array} \right\}$ utak maximális száma megegyezik az összes $\left\{ \begin{array}{c} \text{irányított} \\ \text{irányítatlan} \end{array} \right\}$ $s - t$ utat lefogó $\left\{ \begin{array}{c} \text{élek} \\ \text{pontok} \end{array} \right\}$ minimális számával.*

Világos, hogy $\max\{\} \leq \min\{\}$.

Irányított, élidegen

Irányított, élidegen

Tegyük fel, hogy az $s - t$ utakat lefogó élek minimális száma k .

Irányított, élidegen

Tegyük fel, hogy az $s - t$ utakat lefogó élek minimális száma k .
Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a minimális vágás értéke tehát legalább k . Ekkor a Ford–Fulkerson tétel miatt a maximális folyam is legalább k értékű.

Irányított, élidegen

Tegyük fel, hogy az $s - t$ utakat lefogó élek minimális száma k .
Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a minimális vágás értéke tehát legalább k . Ekkor a Ford–Fulkerson tétel miatt a maximális folyam is legalább k értékű. Van olyan maximális folyam, melyben minden élen a folyamérték 0 vagy 1.

Irányított, élidegen

Tegyük fel, hogy az $s - t$ utakat lefogó élek minimális száma k . Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a minimális vágás értéke tehát legalább k . Ekkor a Ford–Fulkerson tétel miatt a maximális folyam is legalább k értékű. Van olyan maximális folyam, melyben minden élen a folyamérték 0 vagy 1. A telített éleken át van egy út s -ből t -be: élein változtassuk a kapacitást 0-ra (hagyjuk el őket).

Irányított, élidegen

Tegyük fel, hogy az $s - t$ utakat lefogó élek minimális száma k . Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a minimális vágás értéke tehát legalább k . Ekkor a Ford–Fulkerson tétel miatt a maximális folyam is legalább k értékű. Van olyan maximális folyam, melyben minden élen a folyamérték 0 vagy 1. A telített éleken át van egy út s -ből t -be: élein változtassuk a kapacitást 0-ra (hagyjuk el őket). Így a folyam értéke legalább $k - 1$ lesz. Ekkor viszont ismét kell lennie $s - t$ útnak (ha $k - 1 \geq 1$), és ennek nyilván nincs közös éle az előbbi úttal.

Irányított, élidegen

Tegyük fel, hogy az $s - t$ utakat lefogó élek minimális száma k . Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a minimális vágás értéke tehát legalább k . Ekkor a Ford–Fulkerson tétel miatt a maximális folyam is legalább k értékű. Van olyan maximális folyam, melyben minden élen a folyamérték 0 vagy 1. A telített éleken át van egy út s -ből t -be: élein változtassuk a kapacitást 0-ra (hagyjuk el őket). Így a folyam értéke legalább $k - 1$ lesz. Ekkor viszont ismét kell lennie $s - t$ útnak (ha $k - 1 \geq 1$), és ennek nyilván nincs közös éle az előbbi úttal. A gondolatmenetet folytatva k élidegen irányított $s - t$ utat kapunk.

Írányított, pontidegen

Irányított, pontidegen

9. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*

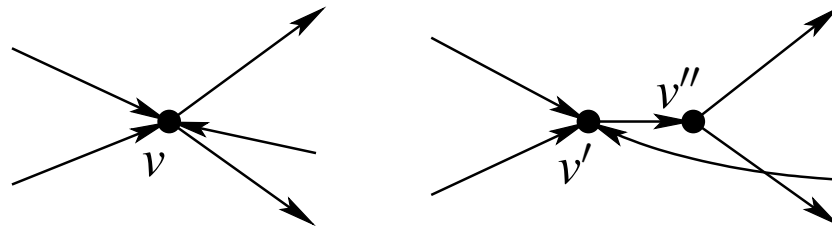
Irányított, pontidegen

9. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*

BIZONYÍTÁS Új G' gráf: minden pontot húzzunk szét két ponttá.

Irányított, pontidegen

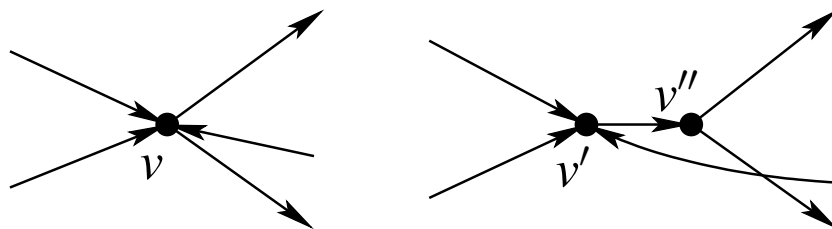
9. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*



BIZONYÍTÁS Új G' gráf: minden pontot húzzunk szét két ponttá. Ha a G gráfban egy minimális pontthalmaz lefogja az irányított $s - t$ utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő (v', v'') élek G' -ben lefogják az irányított $s - t$ utakat.

Irányított, pontidegen

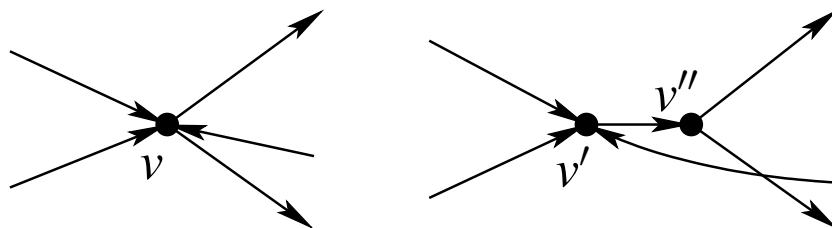
9. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*



BIZONYÍTÁS Új G' gráf: minden pontot húzzunk szét két ponttá. Ha a G gráfban egy minimális pontthalmaz lefogja az irányított $s - t$ utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő (v', v'') élek G' -ben lefogják az irányított $s - t$ utakat. Kevesebb él nem elég, mert ha a lefogó élek között lennének (a'', b') típusú élek, akkor ezeket helyettesíthetjük (b', b'') -vel, ha $b' \neq t$, illetve (a', a'') -vel, ha $b' = t$. Így pedig G -ben egy kisebb lefogó pontthalmazt nyernénk.

Irányított, pontidegen

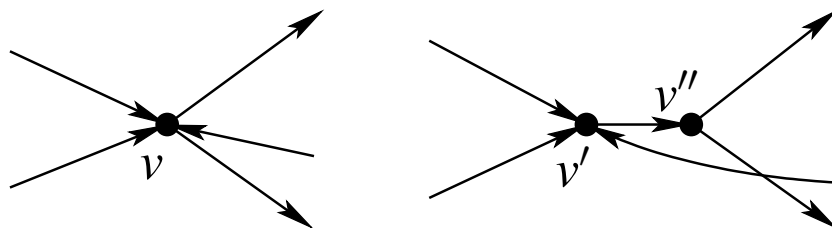
9. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*



BIZONYÍTÁS Új G' gráf: minden pontot húzzunk szét két ponttá. Ha a G gráfban egy minimális pontthalmaz lefogja az irányított $s - t$ utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő (v', v'') élek G' -ben lefogják az irányított $s - t$ utakat. Kevesebb él nem elég, mert ha a lefogó élek között lennének (a'', b') típusú élek, akkor ezeket helyettesíthetjük (b', b'') -vel, ha $b' \neq t$, illetve (a', a'') -vel, ha $b' = t$. Így pedig G -ben egy kisebb lefogó pontthalmazt nyernénk. G -beli lefogó pontok és a G' -beli lefogó élek minimális száma egyenlő.

Irányított, pontidegen

9. Tétel (Menger). *Ha G egy irányított gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*



BIZONYÍTÁS Új G' gráf: minden pontot húzzunk szét két ponttá. Ha a G gráfban egy minimális pontthalmaz lefogja az irányított $s - t$ utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő (v', v'') élek G' -ben lefogják az irányított $s - t$ utakat. Kevesebb él nem elég, mert ha a lefogó élek között lennének (a'', b') típusú élek, akkor ezeket helyettesíthetjük (b', b'') -vel, ha $b' \neq t$, illetve (a', a'') -vel, ha $b' = t$. Így pedig G -ben egy kisebb lefogó pontthalmazt nyernénk. G -beli lefogó pontok és a G' -beli lefogó élek minimális száma egyenlő. G -beli pontdiszjunkt utaknak G' -ben éldiszjunkt utak felelnek meg, és fordítva.

Irányítatlan, élidegen

Irányítatlan, élidegen

G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk.

Irányítatlan, élidegen

G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy G -ben k a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma.

Irányítatlan, élidegen

G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy G -ben k a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma. Ha G' -ben ennél kevesebb él lefogná az irányított utakat, akkor az ezeknek az éleknek G -ben megfelelő élek lefognák az utakat G -ben.

Irányítatlan, élidegen

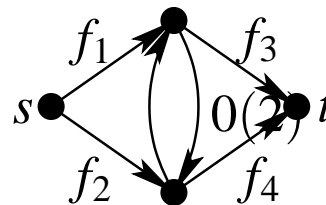
G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy G -ben k a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma. Ha G' -ben ennél kevesebb él lefogná az irányított utakat, akkor az ezeknek az éleknek G -ben megfelelő élek lefognák az utakat G -ben.

Egy G -beli $s - t$ útnak G' -ben megfelel egy irányított $s - t$ út.

Írányítatlan, élidegen

G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy G -ben k a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma. Ha G' -ben ennél kevesebb él lefogná az irányított utakat, akkor az ezeknek az éleknek G -ben megfelelő élek lefognák az utakat G -ben.

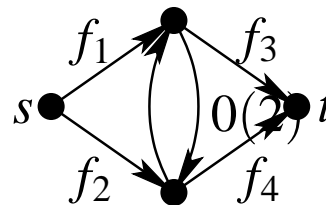
Egy G -beli $s - t$ útnak G' -ben megfelel egy irányított $s - t$ út. Azonban két élidegen G' -beli irányított $s - t$ útnak G -ben megfelelő utak nem feltétlenül élidegenek! Az egyik f_1, e_2, f_4 irányított út, a másik pedig az f_2, e_1, f_3 út, ahol f_i irányított rész-utakat jelöl.



Írányítatlan, élidegen

G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy G -ben k a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma. Ha G' -ben ennél kevesebb él lefogná az irányított utakat, akkor az ezeknek az éleknek G -ben megfelelő élek lefognák az utakat G -ben.

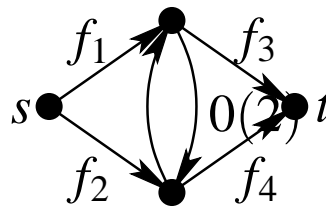
Egy G -beli $s - t$ útnak G' -ben megfelel egy irányított $s - t$ út. Azonban két élidegen G' -beli irányított $s - t$ útnak G -ben megfelelő utak nem feltétlenül élidegenek! Az egyik f_1, e_2, f_4 irányított út, a másik pedig az f_2, e_1, f_3 út, ahol f_i irányított rész-utakat jelöl. A G -ben nekik megfelelő utaknak van közös éle. \implies



Írányítatlan, élidegen

G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy G -ben k a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma. Ha G' -ben ennél kevesebb él lefogná az irányított utakat, akkor az ezeknek az éleknek G -ben megfelelő élek lefognák az utakat G -ben.

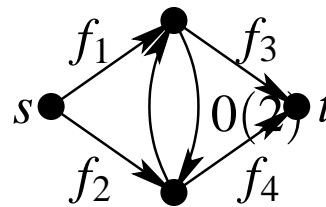
Egy G -beli $s - t$ útnak G' -ben megfelel egy irányított $s - t$ út. Azonban két élidegen G' -beli irányított $s - t$ útnak G -ben megfelelő utak nem feltétlenül élidegenek! Az egyik f_1, e_2, f_4 irányított út, a másik pedig az f_2, e_1, f_3 út, ahol f_i irányított rész-utakat jelöl. A G -ben nekik megfelelő utaknak van közös éle. \implies Helyettesítsük az f_1, f_3 és f_2, f_4 utakkal. Az ezeknek G -ben megfelelő utak már diszjunktak.



Írányítatlan, élidegen

G' gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy G -ben k a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma. Ha G' -ben ennél kevesebb él lefogná az irányított utakat, akkor az ezeknek az éleknek G -ben megfelelő élek lefognák az utakat G -ben.

Egy G -beli $s - t$ útnak G' -ben megfelel egy irányított $s - t$ út. Azonban két élidegen G' -beli irányított $s - t$ útnak G -ben megfelelő utak nem feltétlenül élidegenek! Az egyik f_1, e_2, f_4 irányított út, a másik pedig az f_2, e_1, f_3 út, ahol f_i irányított rész-utakat jelöl. A G -ben nekik megfelelő utaknak van közös éle. \implies Helyettesítsük az f_1, f_3 és f_2, f_4 utakkal. Az ezeknek G -ben megfelelő utak már diszjunktak. Így csökken az utakban szereplő élek száma, tehát véges lépés után már nem fog ilyen helyzet előállni. Ebből tehát látszik, hogy a diszjunkt utak maximális száma G -ben és G' -ben megegyezik.



Irányítatlan, pontidegen

Írányítatlan, pontidegen

10. Tétel (Menger). *Ha G egy írányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető pontidegen írányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes írányítatlan $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*

Írányítatlan, pontidegen

10. Tétel (Menger). *Ha G egy írányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető pontidegen írányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes írányítatlan $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*

Ezt a tételt könnyen visszavezethetjük az előző tételre, ha az írányítatlan élek helyett mindkét irányban húzunk egy irányított élet.

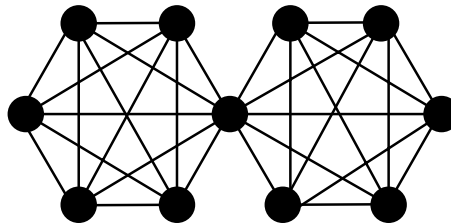
Többszörös összefüggőség

Többszörös összefüggőség

11. Definíció. Egy G gráfot *k -szorosan összefüggőnek* nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf *k -szorosan élösszefüggő*, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, összefüggő gráfot kapunk.

Többszörös összefüggőség

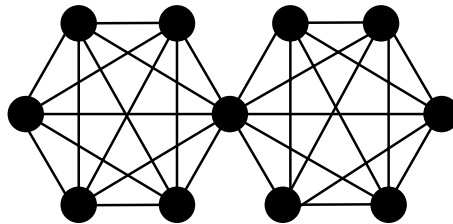
11. Definíció. Egy G gráfot **k -szorosan összefüggőnek** nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf **k -szorosan élösszefüggő**, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, összefüggő gráfot kapunk.



Egyszeresen összefüggő, de $(p - 1)$ -szeresen élösszefüggő.

Többszörös összefüggőség

11. Definíció. Egy G gráfot *k -szorosan összefüggőnek* nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf *k -szorosan élösszefüggő*, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, összefüggő gráfot kapunk.

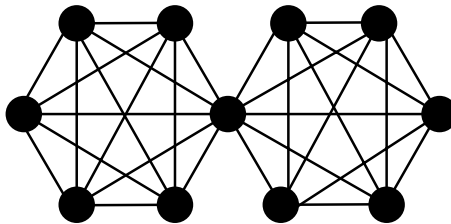


Egyszeresen összefüggő, de $(p - 1)$ -szeresen élösszefüggő.

12. Tétel. A G gráf akkor és csak akkor k -szorosan összefüggő, ha legalább $k + 1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út. Hasonlóan G akkor és csak akkor k -szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

Többszörös összefüggőség

11. Definíció. Egy G gráfot *k -szorosan összefüggőnek* nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf *k -szorosan élösszefüggő*, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, összefüggő gráfot kapunk.



Egyszeresen összefüggő, de $(p - 1)$ -szeresen élösszefüggő.

12. Tétel. A G gráf akkor és csak akkor k -szorosan összefüggő, ha legalább $k + 1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út. Hasonlóan G akkor és csak akkor k -szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

BIZONYÍTÁS Menger idevágó tételei.

Többszörös összefüggőség és körök

13. Tétel (Menger). *A legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.*

Többszörös összefüggőség és körök

13. Tétel (Menger). *A legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.*

BIZONYÍTÁS Két pontidegen $u - v$ út együtt egy kört ad, amely átmegy u -n és v -n.

Többszörös összefüggőség és körök

13. Tétel (Menger). *A legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.*

BIZONYÍTÁS Két pontidegen $u - v$ út együtt egy kört ad, amely átmegy u -n és v -n.
Vegyünk fel két pontot úgy, hogy ezekkel osszuk két részre az e illetve az f élet. \implies Az így kapott gráf is 2-szeresen összefüggő.

Többszörös összefüggőség és körök

13. Tétel (Menger). *A legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.*

BIZONYÍTÁS Két pontidegen $u - v$ út együtt egy kört ad, amely átmegy u -n és v -n. Vegyünk fel két pontot úgy, hogy ezekkel osszuk két részre az e illetve az f élet. \implies Az így kapott gráf is 2-szeresen összefüggő. Az első állítás szerint ezen a két ponton át megy kör, és ez a kör az eredeti gráfban átmegy e -n és f -en.

Többszörös összefüggőség és körök

13. Tétel (Menger). *A legalább 3 pontú G gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.*

BIZONYÍTÁS Két pontidegen $u - v$ út együtt egy kört ad, amely átmegy u -n és v -n. Vegyünk fel két pontot úgy, hogy ezekkel osszuk két részre az e illetve az f élet. \implies Az így kapott gráf is 2-szeresen összefüggő. Az első állítás szerint ezen a két ponton át megy kör, és ez a kör az eredeti gráfban átmegy e -n és f -en.

14. Tétel (Dirac). *Ha $k \geq 2$ és a G gráf k -szorosán összefüggő, akkor bármely x_1, x_2, \dots, x_k pontján át vezet kör.*