

# Bevezetés a Számításelméletbe II. 6. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

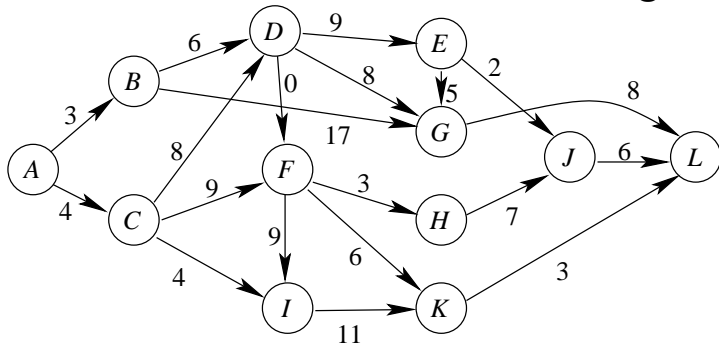
`sali@cs.bme.hu`

2002 március 19.

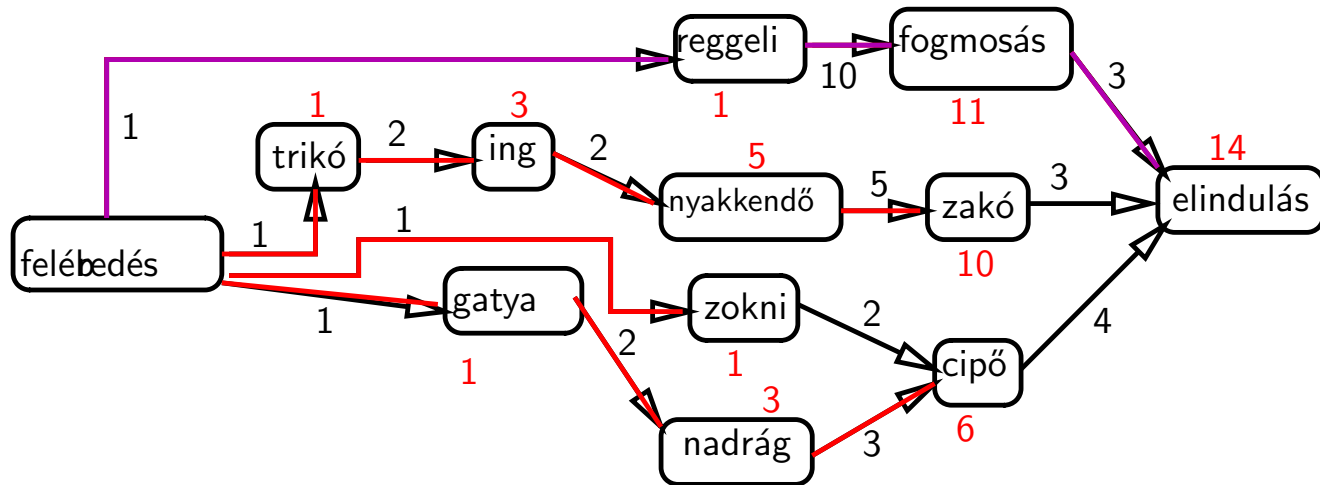
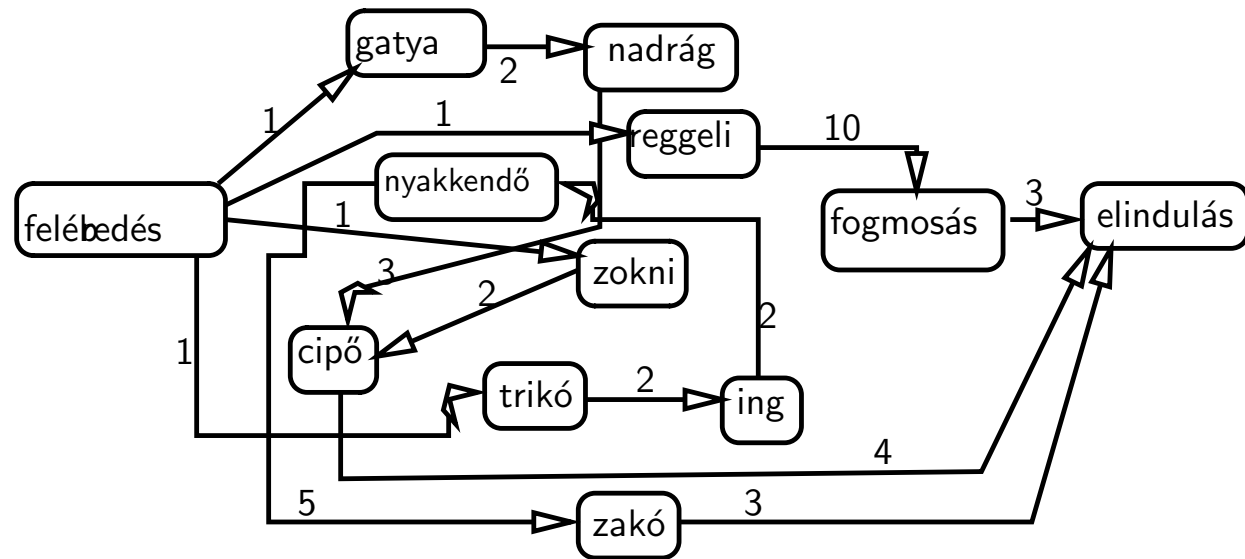
## A kritikus út módszere (PERT-módszer)

Az „emeletekre bontás” fontos alkalmazása az úgynevezett PERT-módszer. Az elnevezés az angol „Program Evaluation and Review Technique” rövidítéséből származik.

Tegyük fel, hogy egy összetett feladatot több alvállalkozóval kell elvégeztetni. Az egyes részfeladatok nem végezhetőek el egymástól függetlenül: pl. egy házépítés során a kőművesmunkák nyilván megelőzik a festési munkákat. A helyzetet egy  $G$  gráffal szemléltethetjük, melynek pontjai a részfeladatok, és egy  $l$  hosszúságú  $(x, y)$  irányított él azt fejezi ki, hogy az  $y$  részfeladat nem kezdhető el korábban, mint az  $x$  kezdése után  $l$  idővel.  $l = 0$  is lehetséges:  $x$  és  $y$  ilyenkor kezdhető egyszerre, vagy  $y$  későbben.



**Mikor tud elindulni Kis Béla?**



A feladat jellegénél fogva egy ilyen gráf nem tartalmazhat irányított kört. Ha egy összehasonlítási gráfot irányítottan tekintünk (azaz  $x \prec y \iff (x, y) \in E$ ), az ilyen. Megfordítva, ha egy irányított körmentes gráfba behúzzuk a *tranzitivitásból* adódó éleket (képezzük a *tranzitív lezártját*), akkor összehasonlítási gráfot kapunk.

A gráf emeletekre bontható: Először a nyelő(ke)t<sup>1</sup> helyezzük a jobbszélső halmazba, ennek elhagyása után keletkező (és szintén irányított kört nem tartalmazó) gráf nyelőit a jobbról második halmazba és így tovább.

Ezek után balról jobbra haladva, szintenként, meghatározhatjuk minden tevékenység elkezdésének lehetséges legkorábbi időpontját. A bal szélső tevékenység(ek) azonnal (0. időpontban) megkezdhető(ek), később egy  $y$  tevékenységhez tekintsük át az összes olyan  $x_1, x_2, \dots$  tevékenységet, melyre  $(x_i, y) \in E(G)$ , és ha ezek legkorábban a  $t_1, t_2, \dots$  időpontban kezdhetőek el, akkor  $y$  elkezdésére legkorábban a  $\max(t_1 + l(x_1, y), t_2 + l(x_2, y), \dots)$  időpontban kerülhet sor.

---

<sup>1</sup>Nyelő: olyan csúcs melyből nem megy ki él

## Kritikus út

Megjelöljük nyelő(k)ből visszafelé azokat az  $(x_i, y)$  éleket, melyeken a fenti maximumok felvételnek. A megjelölt élek a  $G$  gráf kritikus élei, az ezek által meghatározott részgráf mindig tartalmaz legalább egy irányított utat a forrásból a nyelőbe. Ezeket az utakat *kritikus útnak* nevezzük, nyilván ezek a leghosszabb utak a forrásból a nyelőbe.

Az ilyen kritikus utakon lévő pontoknak megfelelő részfeladatok bármelyikének késedelmes elvégzése az egész összetett feladat befejezését késleltetné (innét a kritikus út elnevezés). Ha viszont egy pont nincs kritikus úton, akkor a megfelelő feladat késedelmes elvégzése bizonyos határon belül még elfogadható.

## Bonyolultság

A részfeladatok „beprogramozásához” (vagyis a kezdési időpontok meghatározásához) szükséges lépések száma a  $G$  pontjainak fokszámösszegével (vagyis  $e$ -vel) arányos. Ugyanis minden él hosszát pontosan egyszer vesszük figyelembe a maximumok számításakor. A szintekre bontás is (alkalmas gráf tárolás esetén) fokszám összeggel arányos (minden élet figyelembe kell venni, amikor töröljük az egyik végpontját.)

A leghosszabb út meghatározása – ellentétben a legrövidebb útéval (lásd Algoritmuselmélet) – általában nem végezhető el polinom időben. Ebben a speciális esetben azért tudtunk gyors algoritmust adni, mert  $G$ -ben nincsenek irányított körök.

## Hogyan tároljunk gráfokat?

Egy  $v$  pontú és  $e$  élű  $G$  gráf szomszédossági mátrixa  $v^2$ , illeszkedési mátrixa  $ve$  helyet foglal el. Egyszerűs gráfokra  $e \leq v(v-1)/2$  irányítatlan gráfok esetén és  $e \leq v(v-1)$  irányított gráfok esetén.

Az illeszkedési mátrix mindig feleslegesen sok helyet foglal el (hisz a  $ve$  szám között  $(v-2)e$  darab zérus van); és ha egy gráf *ritka* (vagyis  $cv^2$ -nél jóval kevesebb éle van), akkor a szomszédossági mátrixban is rengeteg a zérus. A feleslegesen nagy tárigény mellett a gráfelméleti algoritmusok lépésszámát (tehát időigényét) is növelné, ha a hasznos információkhoz csak számos felesleges zérus kiolvasásán keresztül jutnánk.

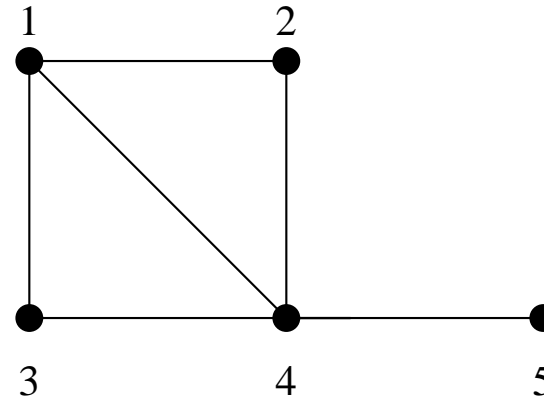
Például egy csúcsról eldönteni hogy nyelő, szomszédossági mátrix esetén annak egy teljes oszlopát ( $|v|$ ) adatot kell kiolvasni.



## Szomszédossági tömbök és listák

Gyakran hasznos a gráfot úgy tárolni, hogy minden pontjához felsoroljuk a szomszédjait.

2 3 4  
1 4  
1 4  
1 2 3 5  
4



A szomszédossági listák általában különböző hosszúságúak,  $\implies$  érdemes őket egy nagy közös tömbben tárolni, és egy külön tömbben tárolni a „mutatókat” (pointer), hogy honnét kezdve kell olvasni egy adott pont szomszédait.

2 3 4 1 4 1 4 1 2 3 5 4 és 1 4 6 8 12

*szomszédossági tömb*

Az 1-1 ponthoz tartozó listák külön-külön lehetnek rendezettek, így hamarabb ellenőrizhetjük, hogy egy pont szomszédai között szerepel-e egy adott másik pont.

Az első tömb hossza a fokszámok összege, vagyis  $2e$ , a második tömbé pedig  $v$ . Így a teljes tárigény  $2e + v$ . Ez az elképzelhető minimális tárigénynek közel kétszerese (az  $\{i, j\}$  élt  $i$  szomszédainál is,  $j$  szomszédainál is felsoroljuk). (megtérül!)

Írányított gráfok esetén minden  $i$  ponthoz felsoroljuk azokat a  $j$  pontokat, melyekbe  $(i, j)$  irányított él vezet  $i$ -ből; vagy azokat a  $k$  pontokat, melyekből  $(k, i)$  irányított él vezet  $i$ -be. Sok esetben az a legjobb, ha mindkét listát megadjuk: a kétszeres tárigény számos algoritmusnál nagyságrenddel csökkenti a lépésszám-igényt.

*Rendezett szomszédossági tömbről* beszélünk, ha az egyes pontok szomszédai már növekvő sorrendben elhelyezve kerülnek tárolásra (a példában is ez volt a helyzet). Világos, hogy a rendezések elvégzése további időt igényel, de ez később megtérülhet.

## Láncolt szomszédossági listák

Ha egy olyan algoritmus (probléma) adódik, amikor gyakran kell a gráfból egy élt (vagy akár pontot) elhagyni, akkor a szomszédsági tömb nem megfelelő: a beszúrandó vagy elhagyandó elem után következők eggyel eltolása akár  $n$  darab további lépést is igényelhet.  $\implies$  Olyan listát adunk, aminek első tömbje a szomszédossági lista elemeit tetszőleges sorrendben tartalmazhatja.

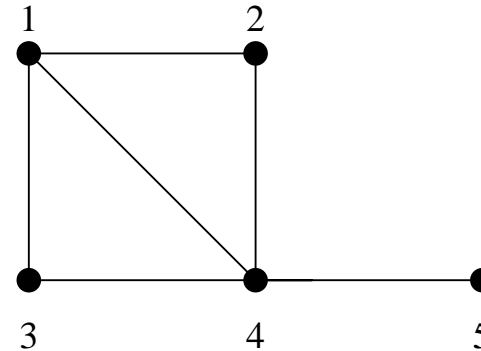
2 3 4

1 4

1 4

1 2 3 5

4



Most két darab, egyenként  $2e$  hosszú és változatlanul egy darab  $v$  hosszú tömb kell:

2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4	1	2	6	3	11
4	12	5	7	10	8	*	*	*	9	*	*					

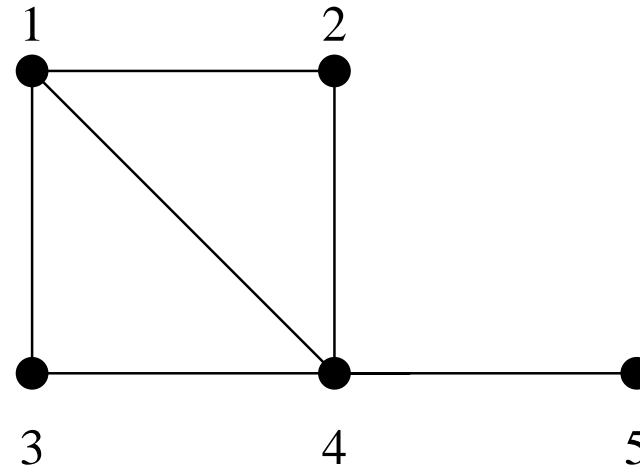
2 3 4

1 4

1 4

1 2 3 5

4



2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4		1	2	6	3	11
4	12	5	7	10	8	*	*	*	9	*	*						

Most is a  $v$  hosszú tömb  $i$ -ik eleme mutatja meg, hogy hol kezdjük el az  $i$ -ik pont szomszédainak kiolvasását az első  $2e$  hosszú tömbből. Azt azonban az alatta lévő szám (tehát a második  $2e$  hosszú tömb megfelelő eleme) mutatja meg, hogy hol folytassuk az olvasást, illetve egy speciális  $*$  szimbólum jelzi, hogy vége van a listának.

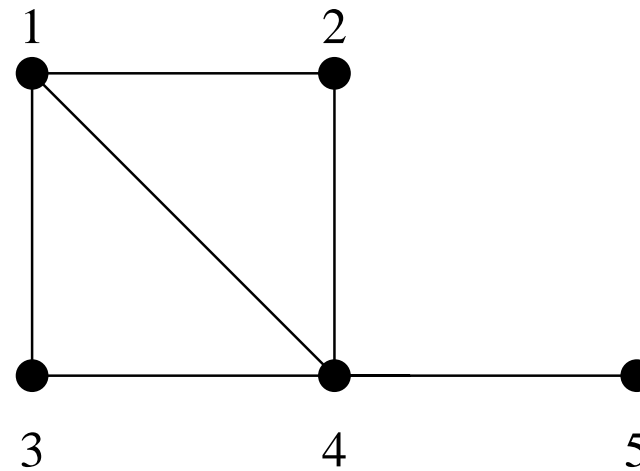
2 3 4

1 4

1 4

1 2 3 5

4



$\{1, 4\}$  él elhagyása után:

2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4		1	2	6	5	11
4	12	*	*	10	8	*	*	*	9	*	*						

$\{2, 5\}$  él bevétele után:

2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4	5	2		1	2	6	3	11
4	12	5	7	10	8	*	*	*	9	14	13	*	*						

Táblázat 1: Tárigény és a különféle gráfelméleti műveletek időigénye, ha a gráfot szomszédossági mátrixszal (**A**), szomszédossági tömbbel (**B**), rendezett szomszédossági tömbbel (**C**) vagy láncolt szomszédossági listával (**D**) adjuk meg.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
Tárigény	$v^2$	$2e + v$	$2e + v$	$4e + v$
Két pont szomszédosságának eldöntése	1	$d$	$\log d$	$d$
Pont szomszédainak megjelölése	$v$	$d$	$d$	$d$
Minden él megjelölése	$v^2$	$e$	$e$	$e$
Új él hozzávétele	1	$e$	$e$	1
Régi él elvétele	1	$e$	$e$	$d$
Régi pont elvétele	$v$	$e$	$e$	$\min(e, d^2)$

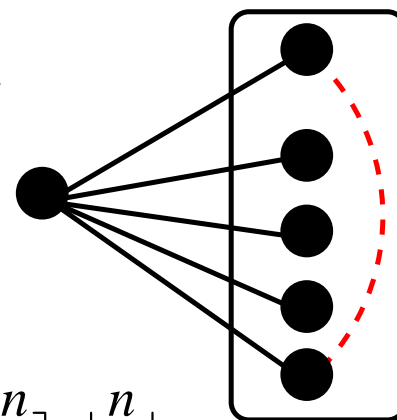
jelölések:  $v$  pontszám,  $e$  élszám,  $d$  maximális fokszám

## Mantel tétele

Legfeljebb hány éle lehet egy  $n$ -csúcsú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz háromszöget?

**Tétel 1.** *Ha egy  $n$ -csúcsú egyszerű gráf nem tartalmaz háromszöget, akkor éleinek száma legfeljebb  $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .*

BIZONYÍTÁS Ha  $G$  nem tartalmaz háromszöget, akkor  $\alpha(G) \geq \Delta(G)$ . Ugyanakkor  $|E(G)| \leq \tau(G) \cdot \Delta(G)$  mindig igaz. Gallai tétele szerint  $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)| = n$ . Összerakva:

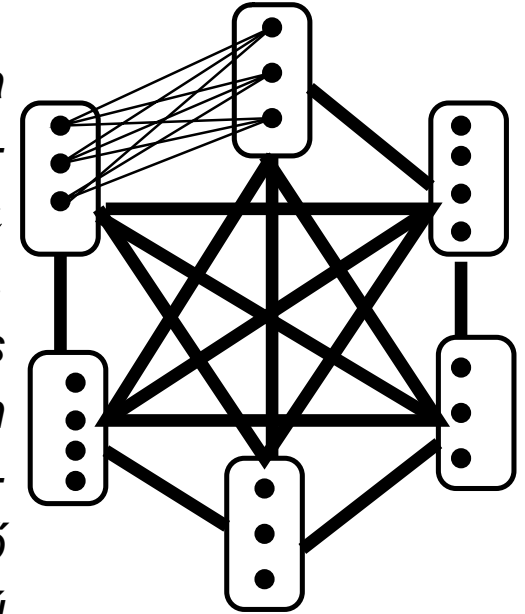


$$|E(G)| \leq \tau(G) \cdot \Delta(G) \leq \tau(G) \cdot \alpha(G) = (n - \alpha(G)) \cdot \alpha(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

A  $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  teljes páros gráf mutatja, hogy a tétel állítása éles. Azt, hogy ez az egyetlen ilyen gráf, általánosabban bizonyítjuk.

## Turán gráfok

**Definíció 2.** Definiáljuk a  $T_{n,m}$  ( $n \geq m$ ) gráfot a következőképpen. Osszuk el maradékosan  $n$ -et  $m$ -mel, azaz legyen  $n = qm + r$ , ahol  $0 \leq r < m$ . A gráf  $n$  pontját osszuk  $m$  osztályra,  $r$  osztály álljon  $q + 1$  pontból, a többi  $m - r$  pedig  $q$  pontból. A gráfban két pont akkor és csak akkor legyen összekötve, ha különböző osztályban vannak.  $m$ -osztályú gráfnak nevezünk egy gráfot, ha a pontjai  $m$  osztályba oszthatók úgy, hogy az egy osztályban levő pontok között nem fut él.  $T_{n,m}$ -et másképpen  $m$ -osztályú teljes gráfnak nevezzük.



**Tétel 3.** Ha egy  $n$  pontú  $G$  gráf nem tartalmaz  $K_{m+1}$ -et, akkor

$$e(G) \leq e(T_{n,m}).$$

Ha pedig  $e(G) = e(T_{n,m})$ , akkor  $G \cong T_{n,m}$ .



## Turán tétel bizonyítása

1. Az  $m$ -osztályú gráfok közül  $T_{n,m}$ -nek van a legtöbb éle. Tegyük fel, hogy az a  $G$  gráf, amelyiknek a legtöbb éle van, nem a  $T_{n,m}$  gráf. Ebben a gráfban kell, hogy legyen két olyan osztály, hogy az egyikben  $x$  pont van, a másikban legalább  $x + 2$ . Ha a nagyobból a kisebbbe átteszünk egy pontot, akkor legfeljebb  $x$  él szűnik meg, viszont legalább  $x + 1$  új élet húzunk be. Vagyis növeltük az élszámot, ez pedig ellentmond a feltevésünknek.
2. Ha  $G$  egy  $K_{m+1}$ -et nem tartalmazó  $n$ -pontú gráf, akkor ugyanazon a ponthalmazon konstruálható egy olyan  $m$  osztályú teljes  $H$  gráf, melyben minden pont fokszáma legalább akkora mint  $G$ -ben, vagyis minden  $v \in V(G) = V(H)$ -ra  $d_G(v) \leq d_H(v)$ .
3.  $m$ -re való teljes indukcióval bizonyítunk.  $m = 1$ -re az állítás triviális.
4. Legyen  $x$  olyan pont, hogy  $d_G(x) = \Delta_G$ . Legyen  $V_1 = \{u \mid \{u, x\} \in E(G)\}$ , vagyis  $x$  szomszédainak halmaza,  $V_2$  pedig a többi pont, vagyis  $V_2 = V(G) - V_1$  Így persze  $x \in$

$V_2$ .  $G_1$  legyen  $G$ -nek a  $V_1$  által feszített részgráfja. Nyilván  $G_1$ -ben nincs  $K_m$ , hiszen ez  $x$ -szel együtt  $G$ -ben  $K_{m+1}$ -et alkotna. Így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést  $G_1$ -re. Tehát van olyan teljes  $m - 1$ -osztályú  $H_1$  gráf, hogy minden  $v \in V(G_1)$ -re  $d_{G_1}(v) \leq d_{H_1}(v)$ .

5.  $H$  gráf a következő: Vegyük a  $V_1$  ponthalmazon a  $H_1$  gráfot, majd  $V_1$  minden pontját kössük össze  $V_2$  minden pontjával, viszont hagyjunk el minden két  $V_2$ -beli pontot összekötő élet. Nyilvánvaló, hogy ez a  $H$  gráf  $m$  osztályú. Ha  $v \in V_2$ , akkor  $d_H(v) = |V_1| = \Delta_G$ , a definícióink szerint viszont  $d_G(v) \leq \Delta_G$ . Ha  $v \in V_1$ , akkor  $d_H(v) = d_{H_1}(v) + |V_2| \geq d_{G_1}(v) + |V_2| \geq d_G(v)$ .
6. Így ha egy  $G$  gráfban nincs  $K_{m+1}$ , de nem izomorf  $T_{n,m}$ -mel, akkor konstruáltunk egy nála nagyobb élszámú  $m$ -osztályú teljes gráfot (ugyanis ekkor valamelyik egyenlőtlenség biztosan nem egyenlőség), ennek az élszáma pedig nem nagyobb  $T_{n,m}$  élszámánál. Egyben beláttuk az állítás második részét is.

## Két érdekes tétel

**Tétel 4. [Erdős–Stone]** *Ha*

$$e(G) \geq e(T_{n,m}) + \varepsilon n^2,$$

*akkor  $G$ -ben nemcsak hogy van legalább egy  $K_{m+1}$ , hanem létezik olyan  $c(\varepsilon, m)$  konstans is, hogy  $G$ -ben van olyan teljes  $m + 1$ -osztályú részgráf, amelyben az osztályok pontszáma legalább  $c \log n$ .*

Azaz, ha csak kicsit nagyobb az élsűrűség, mint a Turán gráfé, akkor már *rengeteg*  $K_{m+1}$  van a gráfban.

**Tétel 5. [Erdős–Simonovits]** Ha  $G_1, G_2, \dots, G_k$  adott gráfok, akkor létezik olyan  $ex(n; G_1, G_2, \dots, G_k)$  függvény, amelyre teljesül, hogy minden olyan  $G$  gráfnak, amelyre  $v(G) = n$  és  $e(G) \geq ex(n; G_1, G_2, \dots, G_k)$ , van valamelyik  $G_i$  gráffal izomorf részgráfja. Az  $ex$  függvényre teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n; G_1, G_2, \dots, G_k)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\min_{i=1, \dots, k} \chi(G_i) - 1}. \quad (1)$$

Azaz a maximális  $G_i$ -t nem tartalmazó gráf élsűrűségének nagyságrendje  $G_i$  kromatikus számától függ, ha az legalább 3.

Ha valamelyik kizárandó gráf páros, akkor a fenti tétel nem határozza meg az élsűrűség nagyságrendjét.

$T_{n,m}$  élszáma

$$e(T_{n,m}) = \binom{n}{2} - r \binom{q+1}{2} - (m-r) \binom{q}{2} \approx \binom{n}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right). \quad (2)$$

$k = 1$  és  $G = K_{m+1}$  esetén  $\chi(K_{m+1}) = m + 1$ , azaz ebben az esetben az Erdős–Simonovits következik a Turánból.