

Bevezetés a Számításelméletbe II. 5. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 március 12.

Perfekt gráfok

Perfekt gráfok

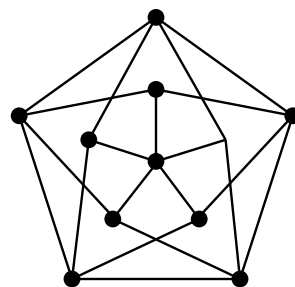
Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!)

Perfekt gráfok

Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!)
Érdekes (?) a gráf, ha $\chi(G) = \omega(G)$.

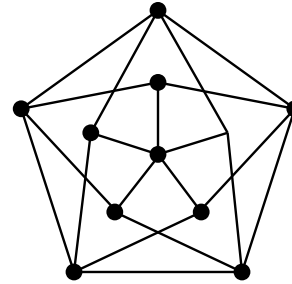
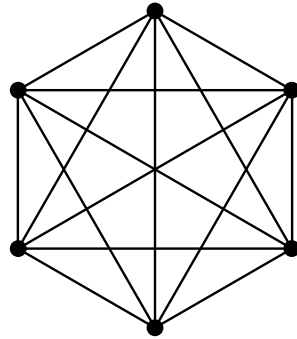
Perfekt gráfok

Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!) Érdekes (?) a gráf, ha $\chi(G) = \omega(G)$. Vegyünk egy tetszőleges gráfot.



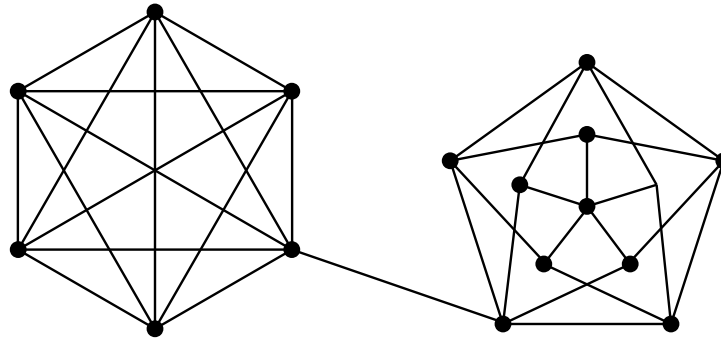
Perfekt gráfok

Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!) Érdekes (?) a gráf, ha $\chi(G) = \omega(G)$. Vegyünk egy tetszőleges gráfot. Tegyük mellé egy nagy teljes gráfot. $\implies \chi(G) = \omega(G)$ lesz.



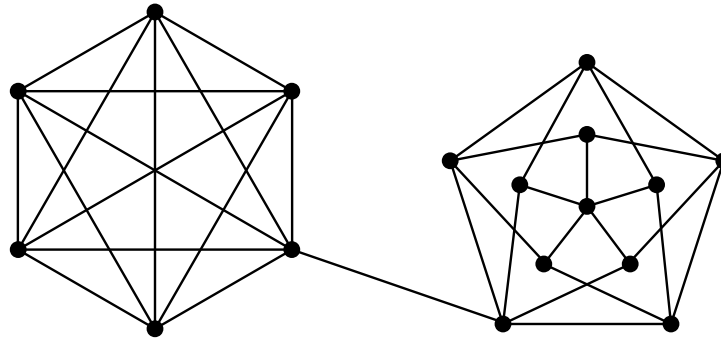
Perfekt gráfok

Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!) Érdekes (?) a gráf, ha $\chi(G) = \omega(G)$. Vegyünk egy tetszőleges gráfot. Tegyük mellé egy nagy teljes gráfot. $\implies \chi(G) = \omega(G)$ lesz. Össze is köthetjük egy éllel a két részt, hogy összefüggő legyen.



Perfekt gráfok

Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!) Érdekes (?) a gráf, ha $\chi(G) = \omega(G)$. Vegyünk egy tetszőleges gráfot. Tegyük mellé egy nagy teljes gráfot. $\implies \chi(G) = \omega(G)$ lesz. Össze is köthetjük egy éllel a két részt, hogy összefüggő legyen.



1. Definíció (Berge). Egy G gráf **perfekt**, ha $\chi(G) = \omega(G)$ és G minden G' feszített részgráfjára is teljesül, hogy $\chi(G') = \omega(G')$.

„Béla” gráfok

„Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfekkt gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekkt.

„Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfekkt gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekkt. Rendszerint ez a gráfosztály zárt a feszített részgráf képzésre.

„Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfek gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekt. Rendszerint ez a gráfosztály zárt a feszített részgráf képzésre.

Legyen \mathcal{G} a **Béla**-gráfok osztálya. Tegyük fel, hogy egy Béla-gráf minden feszített részgráfja Béla.

„Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfekkt gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekkt. Rendszerint ez a gráfosztály zárt a feszített részgráf képzésre.

Legyen \mathcal{G} a *Béla*-gráfok osztálya. Tegyük fel, hogy egy Béla-gráf minden feszített részgráfja Béla.

2. Állítás. $\forall G \in \mathcal{G}$ *perfekkt* $\iff \forall G \in \mathcal{G}: \chi(G) = \omega(G)$.

„Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfekkt gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekkt. Rendszerint ez a gráfosztály zárt a feszített részgráf képzésre.

Legyen \mathcal{G} a **Béla**-gráfok osztálya. Tegyük fel, hogy egy Béla-gráf minden feszített részgráfja Béla.

2. Állítás. $\forall G \in \mathcal{G}$ *perfekkt* $\iff \forall G \in \mathcal{G}: \chi(G) = \omega(G)$.

Azaz nem kell külön foglalkoznunk a feszített részgráfokkal.

„Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfek gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekt. Rendszerint ez a gráfosztály zárt a feszített részgráf képzésre.

Legyen \mathcal{G} a **Béla**-gráfok osztálya. Tegyük fel, hogy egy Béla-gráf minden feszített részgráfja Béla.

2. Állítás. $\forall G \in \mathcal{G}$ *perfekt* $\iff \forall G \in \mathcal{G}: \chi(G) = \omega(G)$.

Azaz nem kell külön foglalkoznunk a feszített részgráfokkal.

Béla-gráfnak fogjuk nevezni az olyan gráfokat, amire a fenti tulajdonság teljesül.

Példák

Példák

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

Példák

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf minden feszített részgráfja szintén páros gráf, azaz „páros az Béla”,

Példák

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf minden feszített részgráfja szintén páros gráf, azaz „páros az Béla”, \implies elég belátni, hogy minden $G = (A, B)$ páros gráfra $\chi(G) = \omega(G)$.

Példák

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf minden feszített részgráfja szintén páros gráf, azaz „páros az Béla”, \implies elég belátni, hogy minden $G = (A, B)$ páros gráfra $\chi(G) = \omega(G)$.

4. Tétel. *Minden G páros gráf \overline{G} komplementere perfekt.*

Példák

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf minden feszített részgráfja szintén páros gráf, azaz „páros az Béla”, \implies elég belátni, hogy minden $G = (A, B)$ páros gráfra $\chi(G) = \omega(G)$.

4. Tétel. *Minden G páros gráf \overline{G} komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf komplementer az Béla (!)

Példák

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf minden feszített részgráfja szintén páros gráf, azaz „páros az Béla”, \implies elég belátni, hogy minden $G = (A, B)$ páros gráfra $\chi(G) = \omega(G)$.

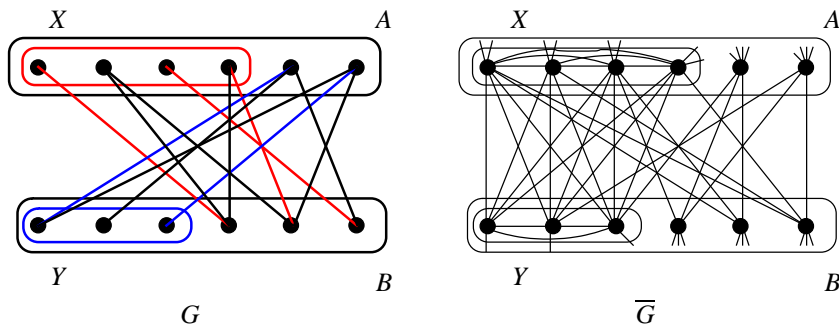
4. Tétel. *Minden G páros gráf \overline{G} komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf komplementer az Béla (!) \implies elég belátni, hogy $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$, azaz hogy \overline{G} kiszínezhető $\omega(\overline{G})$ színnel.

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$.

$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \overline{G} -ben,

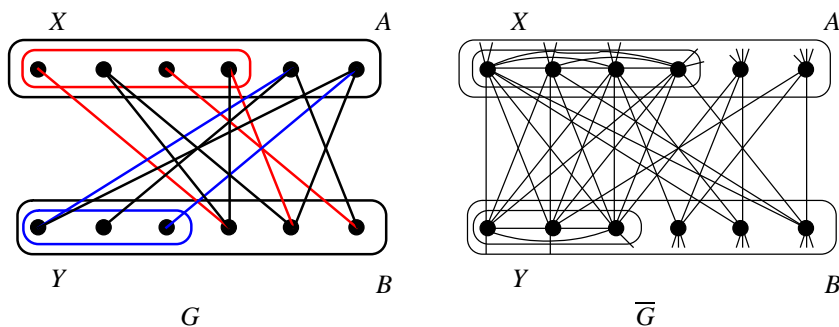
$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \overline{G} -ben,
 $X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)



$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \overline{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független pontthalmazt alkot.)

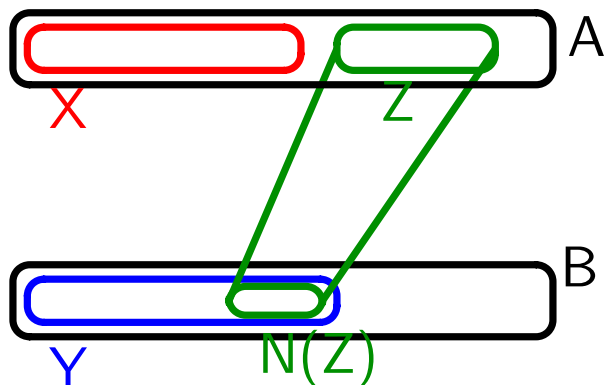
Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít:

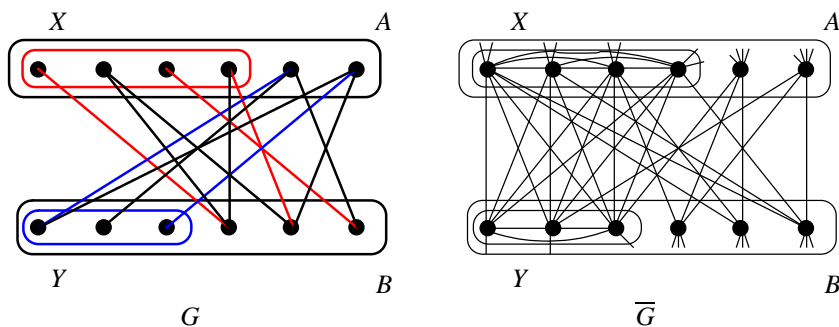


$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \overline{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétel szerint létezik egy olyan $Z \subseteq A - X$ ponthalmaz az $((A - X) \cup Y)$ által feszített páros gráfban, amelyre $|N(Z)| < |Z|$.

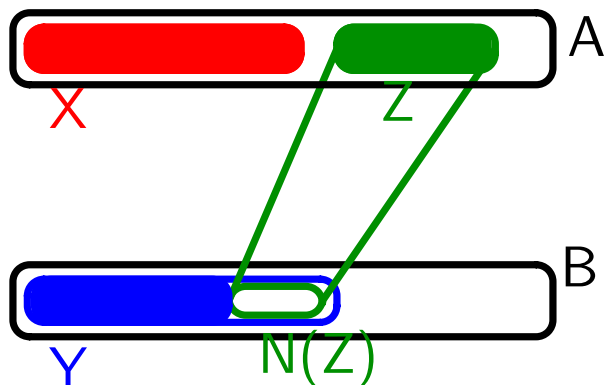


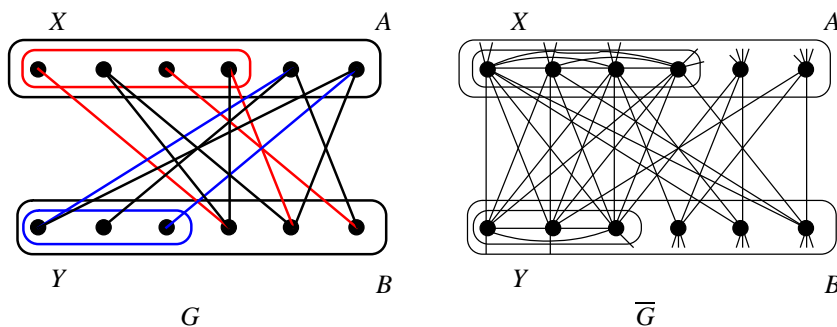


$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \bar{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétel szerint létezik egy olyan $Z \subseteq A - X$ ponthalmaz az $((A - X) \cup Y)$ által feszített páros gráfban, amelyre $|N(Z)| < |Z|$. Ekkor $(X \cup Z) \cup (Y - N(Z))$ egy $X \cup Y$ -nél nagyobb klikk \bar{G} -ben. (Üres G -ben.)



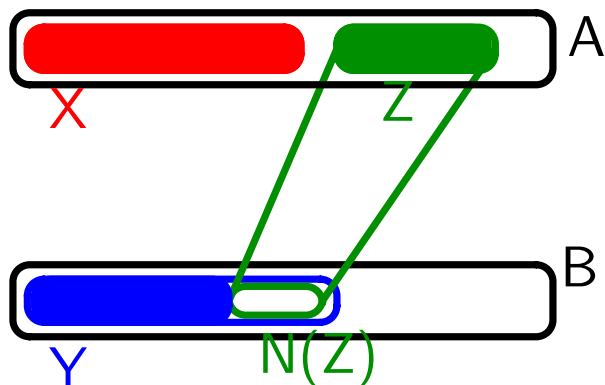


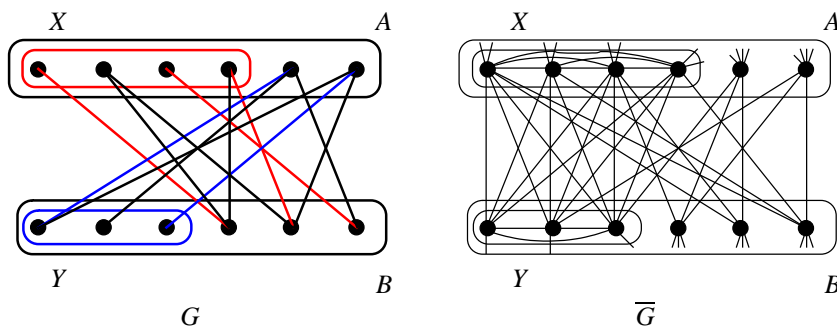
$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \overline{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétele szerint létezik egy olyan $Z \subseteq A - X$ ponthalmaz az $((A - X) \cup Y)$ által feszített páros gráfban, amelyre $|N(Z)| < |Z|$. Ekkor $(X \cup Z) \cup (Y - N(Z))$ egy $X \cup Y$ -nél nagyobb klikk \overline{G} -ben. (Üres G -ben.)

Hasonlóan, G -ben van párosítás, ami $B - Y$ -t X -be párosítja.



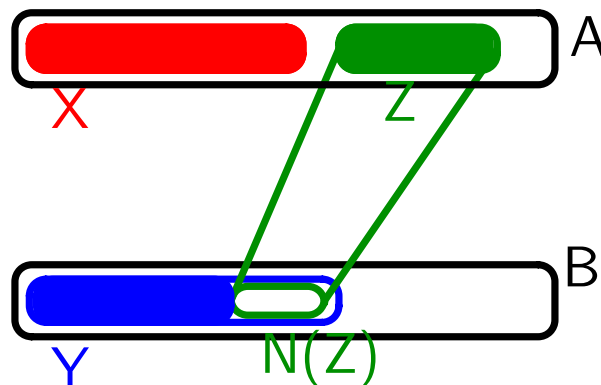


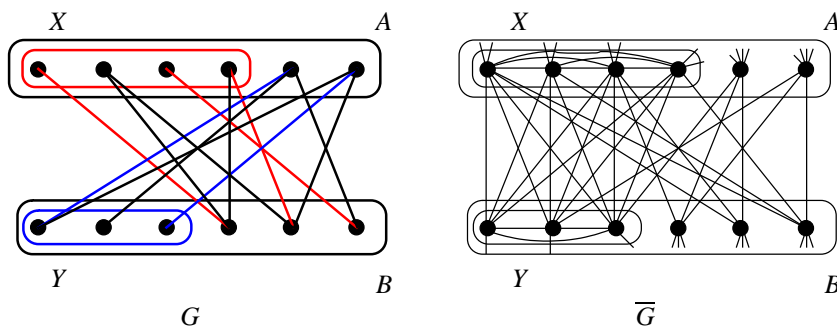
$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \bar{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétel szerint létezik egy olyan $Z \subseteq A - X$ ponthalmaz az $((A - X) \cup Y)$ által feszített páros gráfban, amelyre $|N(Z)| < |Z|$. Ekkor $(X \cup Z) \cup (Y - N(Z))$ egy $X \cup Y$ -nél nagyobb klikk \bar{G} -ben. (Üres G -ben.)

Hasonlóan, G -ben van párosítás, ami $B - Y$ -t X -be párosítja. Így \bar{G} -ben minden $(A - X) \cup (B - Y)$ -beli ponthoz rendeltünk egy vele nem szomszédos $X \cup Y$ -beli pontot.



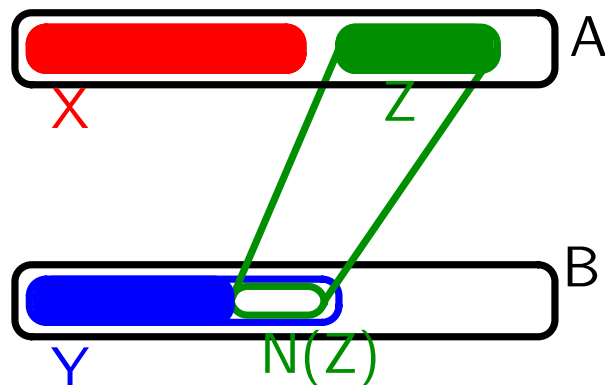


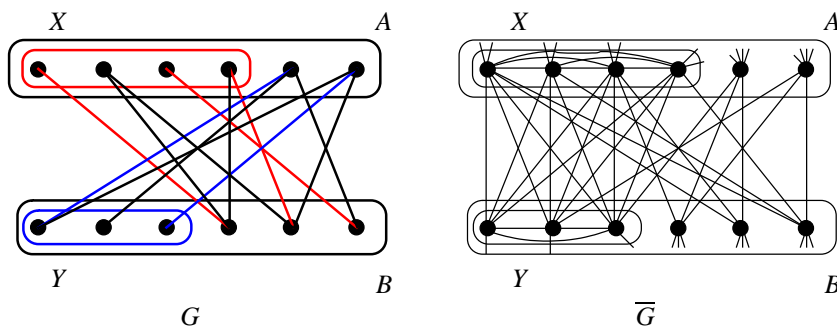
$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \bar{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétel szerint létezik egy olyan $Z \subseteq A - X$ ponthalmaz az $((A - X) \cup Y)$ által feszített páros gráfban, amelyre $|N(Z)| < |Z|$. Ekkor $(X \cup Z) \cup (Y - N(Z))$ egy $X \cup Y$ -nél nagyobb klikk \bar{G} -ben. (Üres G -ben.)

Hasonlóan, G -ben van párosítás, ami $B - Y$ -t X -be párosítja. Így \bar{G} -ben minden $(A - X) \cup (B - Y)$ -beli ponthoz rendeltünk egy vele nem szomszédos $X \cup Y$ -beli pontot. $X \cup Y$ pontjait kiszínezzük $\omega(\bar{G})$ színnel, minden további pontot kiszínezzhetünk úgy, hogy az előbb definiált párjának színét adjuk neki.

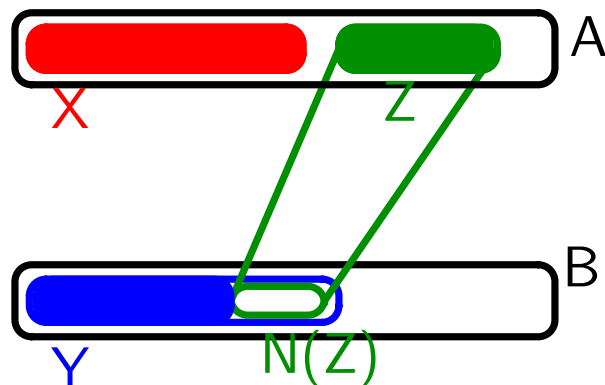




$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \overline{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétel szerint létezik egy olyan $Z \subseteq A - X$ ponthalmaz az $((A - X) \cup Y)$ által feszített páros gráfban, amelyre $|N(Z)| < |Z|$. Ekkor $(X \cup Z) \cup (Y - N(Z))$ egy $X \cup Y$ -nél nagyobb klikk \overline{G} -ben. (Üres G -ben.)



Hasonlóan, G -ben van párosítás, ami $B - Y$ -t X -be párosítja. Így \overline{G} -ben minden $(A - X) \cup (B - Y)$ -beli ponthoz rendeltünk egy vele nem szomszédos $X \cup Y$ -beli pontot. $X \cup Y$ pontjait kiszínezzük $\omega(\overline{G})$ színnel, minden további pontot kiszínezzük úgy, hogy az előbb definiált párjának színét adjuk neki. Ez jó színezés, hiszen minden szín legfeljebb két ponton fordul elő és ezek biztosan nem szomszédos pontok.

Példák II.

5. Tétel. *1. Páros gráf élgráfja perfekt.*

Példák II.

5. Tétel. *1. Páros gráf élgráfja perfekt. 2. Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

Példák II.

5. Tétel. 1. *Páros gráf élgráfja perfekt.* 2. *Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$)

Példák II.

5. Tétel. 1. *Páros gráf élgráfja perfekt.* 2. *Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszínezhető.

Példák II.

5. Tétel. 1. *Páros gráf élgráfja perfekt.* 2. *Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszínezhető. Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$.

Példák II.

5. Tétel. 1. *Páros gráf élgráfja perfekt.* 2. *Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszínezhető.

Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$. D' és D'' külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).

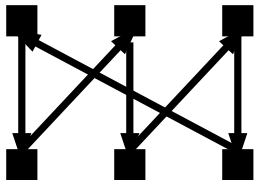
Példák II.

5. Tétel. 1. *Páros gráf élgráfja perfekt.* 2. *Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszíneezhető.

Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$. D' és D'' külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).



Példák II.

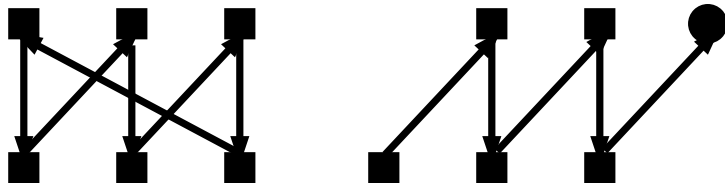
5. Tétel. 1. Páros gráf élgráfja perfekt. 2. Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszínezhető.

Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$. D' és D'' külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).

D' bepárosítható B -be, D'' A -ba. Irányítsuk a párosítások éleit D' -ből B -be, illetve D'' -ből A -ba.



Példák II.

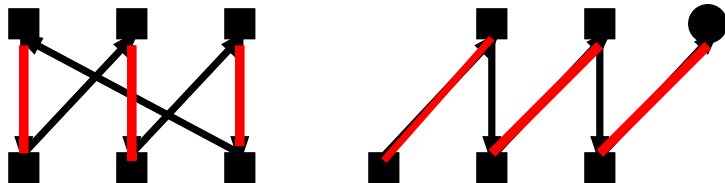
5. Tétel. 1. *Páros gráf élgráfja perfekt.* 2. *Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszínezhető.

Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$. D' és D'' külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).

D' bepárosítható B -be, D'' A -ba. Irányítsuk a párosítások éleit D' -ből B -be, illetve D'' -ből A -ba. Ekkor (páros) irányított körök



Példák II.

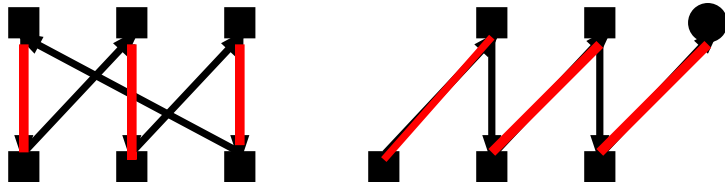
5. Tétel. 1. *Páros gráf élgráfja perfekt.* 2. *Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszínezhető.

Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$. D' és D'' külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).

D' bepárosítható B -be, D'' A -ba. Irányítsuk a párosítások éleit D' -ből B -be, illetve D'' -ből A -ba. Ekkor (páros) irányított körök és irányított utak keletkeznek (minden d -beli pont kifoka 1, minden pont befoka legfeljebb 1).



Példák II.

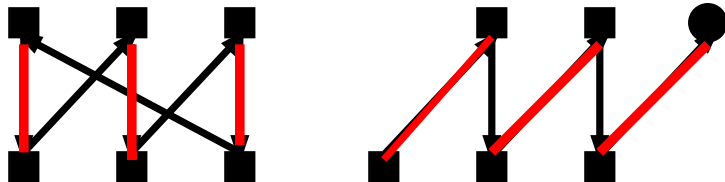
5. Tétel. 1. Páros gráf élgráfja perfekt. 2. Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszíneezhető.

Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$. D' és D'' külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).

D' bepárosítható B -be, D'' A -ba. Irányítsuk a párosítások éleit D' -ből B -be, illetve D'' -ből A -ba. Ekkor (páros) irányított körök és irányított utak keletkeznek (minden d -beli pont kifoka 1, minden pont befoka legfeljebb 1). A körök és utak minden **második** élét véve **egy M** párosítást kapunk, amelyik D minden pontját lefedi.



$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezhető, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezhető, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezzhetők, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezzhetők, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független pontthalmaz* mérete $L(G)$ -ben,

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezzhetők, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független ponthalmaz* mérete $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete G -ben.

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezzhetők, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független pontthalmaz* mérete $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete G -ben. $\implies \omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$.

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezhető, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független ponthalmaz* mérete $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete G -ben. $\implies \omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$.

$\chi(\overline{L(G)})$: minimális számú független ponthalmaz (színosztály) amivel $\overline{L(G)}$ minden pontja lefedhető

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezzhetők, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független ponthalmaz* mérete $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete G -ben. $\implies \omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$.

$\chi(\overline{L(G)})$: minimális számú független ponthalmaz (színosztály) amivel $\overline{L(G)}$ minden pontja lefedhető = minimális számú *klikk* amivel $L(G)$ minden pontja lefedhető.

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezzhetők, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független ponthalmaz* mérete $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete G -ben. $\implies \omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$.

$\chi(\overline{L(G)})$: minimális számú független ponthalmaz (színosztály) amivel $\overline{L(G)}$ minden pontja lefedhető = minimális számú *klikk* amivel $L(G)$ minden pontja lefedhető. Klikk $L(G)$ -ben = egy csúcsra illeszkedő élek G -ben $\implies \chi(\overline{L(G)}) = \tau(G)$.

$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezhető, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független ponthalmaz* mérete $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete G -ben. $\implies \omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$.

$\chi(\overline{L(G)})$: minimális számú független ponthalmaz (színosztály) amivel $\overline{L(G)}$ minden pontja lefedhető = minimális számú *klikk* amivel $L(G)$ minden pontja lefedhető. Klikk $L(G)$ -ben = egy csúcsra illeszkedő él G -ben $\implies \chi(\overline{L(G)}) = \tau(G)$.

A 2. állítás tehát nem egyéb, mint *König tétele*: $\chi(\overline{L(G)}) = \tau(G) = \nu(G) = \omega(\overline{L(G)})$.

Részben rendezett halmazok

6. Definíció. Legyen X egy (véges) halmaz. Az X a \preceq relációval **részben rendezett halmaz**, ha

1. $\forall x \in X: x \preceq x$: *reflexív*
2. $\forall x, y \in X: x \preceq y$ és $y \preceq x \implies x = y$: *antiszimmetrikus*
3. $\forall x, y, z \in X: x \preceq y$ és $y \preceq z \implies x \preceq z$ *tranzitív*.

Példák:

Példák:

- \mathbb{N} , $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ a szokásos \leq relációval.

Példák:

- $\mathbb{N}, (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ a szokásos \leq relációval.
- $X = \{1, 2, \dots, n\}, x \preceq y \iff x$ osztja y -t.

Példák:

- $\mathbb{N}, (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ a szokásos \leq relációval.
- $X = \{1, 2, \dots, n\}, x \preceq y \iff x$ osztja y -t.
- $X = \mathcal{P}(A)$ az A részhalmazainak halmaza. $x \preceq y \iff x \subseteq y$.

Példák:

- $\mathbb{N}, (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ a szokásos \leq relációval.
- $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $x \preceq y \iff x$ osztja y -t.
- $X = \mathcal{P}(A)$ az A részhalmazainak halmaza. $x \preceq y \iff x \subseteq y$.
- Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész, $X = \{I_1, I_2, \dots\}$. $I_j \preceq I_k \iff b_j < a_k$ vagy $j = k$, azaz $j \neq k$ esetén I_j teljesen balra van I_k -tól. Az ilyen részben rendezést **intervallum rendezés**nek nevezzük.

Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja.

Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást.

Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást. $X_1 = \min P$, a P minimális elemeinek halmaza.

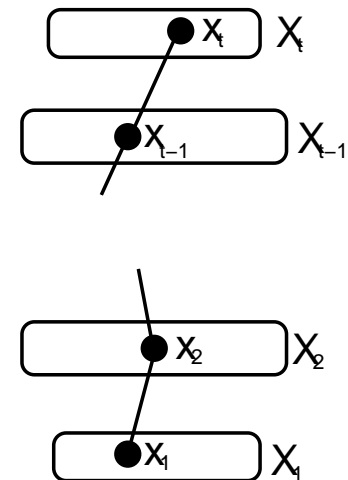
Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást. $X_1 = \min P$, a P minimális elemeinek halmaza. Ha X_1, X_2, \dots, X_k már adott, akkor $X_{k+1} = \min(P - \cup_{i=1}^k X_i)$.



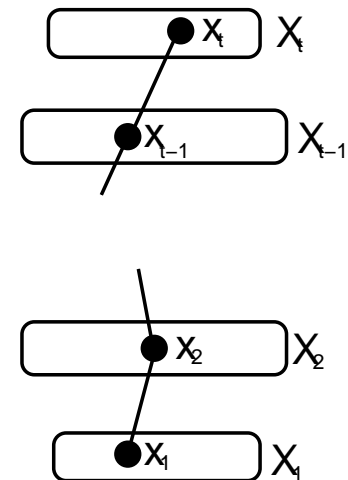
Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást. $X_1 = \min P$, a P minimális elemeinek halmaza. Ha X_1, X_2, \dots, X_k már adott, akkor $X_{k+1} = \min(P - \cup_{i=1}^k X_i)$. Ha $x, y \in X_i$, akkor $x \not\preceq y$ és $y \not\preceq x \implies$ A G gráfban X_i **független** ponthalmaz.



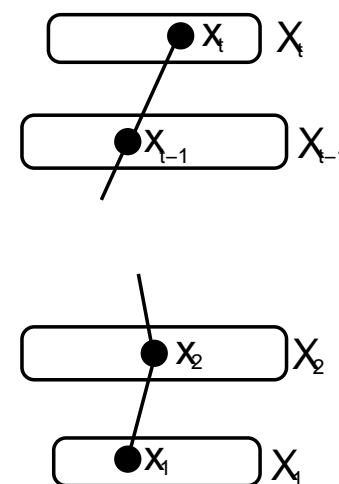
Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást. $X_1 = \min P$, a P minimális elemeinek halmaza. Ha X_1, X_2, \dots, X_k már adott, akkor $X_{k+1} = \min(P - \cup_{i=1}^k X_i)$. Ha $x, y \in X_i$, akkor $x \not\preceq y$ és $y \not\preceq x \implies$ A G gráfban X_i **független** ponthalmaz. Ha $x_i \in X_i$, akkor van $x_{i-1} \in X_{i-1}$, hogy $x_{i-1} \preceq x_i$. \implies Létezik egy **lán**c $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_t$.



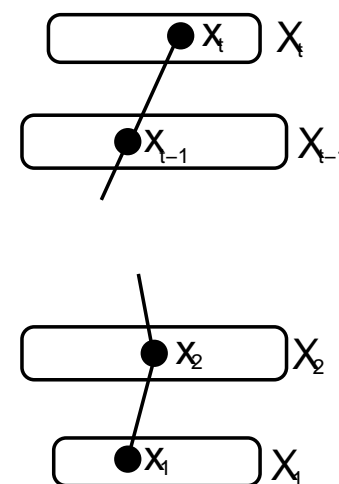
Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást. $X_1 = \min P$, a P minimális elemeinek halmaza. Ha X_1, X_2, \dots, X_k már adott, akkor $X_{k+1} = \min(P - \cup_{i=1}^k X_i)$. Ha $x, y \in X_i$, akkor $x \not\preceq y$ és $y \not\preceq x \implies$ A G gráfban X_i **független** ponthalmaz. Ha $x_i \in X_i$, akkor van $x_{i-1} \in X_{i-1}$, hogy $x_{i-1} \preceq x_i$. \implies Létezik egy **lán**c $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_t$. Az $A = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ klikk a G gráfban, \preceq tranzitivitása miatt.



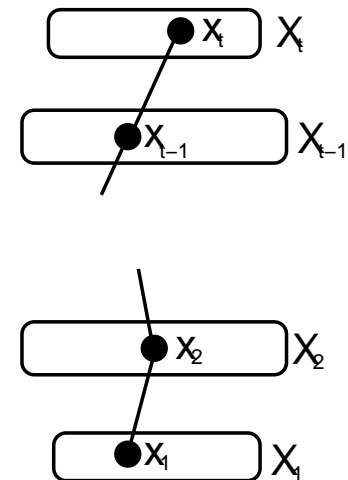
Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P **összehasonlítási gráfja**, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást. $X_1 = \min P$, a P minimális elemeinek halmaza. Ha X_1, X_2, \dots, X_k már adott, akkor $X_{k+1} = \min(P - \cup_{i=1}^k X_i)$. Ha $x, y \in X_i$, akkor $x \not\preceq y$ és $y \not\preceq x \implies$ A G gráfban X_i **független** ponthalmaz. Ha $x_i \in X_i$, akkor van $x_{i-1} \in X_{i-1}$, hogy $x_{i-1} \preceq x_i$. \implies Létezik egy **lán**c $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_t$. Az $A = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ klikk a G gráfban, \preceq tranzitivitása miatt. $\implies t \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq t$.



Perfekt Gráf Tétel

Perfekt Gráf Tétel

9. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

Perfekt Gráf Tétel

9. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

10. Definíció. *Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek p_1, p_2, \dots egy G gráf pontjai és $\{p_i, p_j\}$ akkor és csak akkor legyen él G -ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat **interval-lumgráfoknak** nevezzük.*

Perfekt Gráf Tétel

9. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

10. Definíció. *Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek p_1, p_2, \dots egy G gráf pontjai és $\{p_i, p_j\}$ akkor és csak akkor legyen él G -ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat **intervallumgráfoknak** nevezzük.*

11. Következmény. *Minden intervallumgráf perfekt.*

Perfekt Gráf Tétel

9. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

10. Definíció. *Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek p_1, p_2, \dots egy G gráf pontjai és $\{p_i, p_j\}$ akkor és csak akkor legyen él G -ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat **intervallumgráfoknak** nevezzük.*

11. Következmény. *Minden intervallumgráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Az adott intervallum rendszerhez tartozó intervallum gráf komplementere pont az ugyanahhoz a rendszerhez tartozó intervallum rendezés összehasonlítási gráfja.

Perfekt Gráf Tétel

9. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

10. Definíció. *Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek p_1, p_2, \dots egy G gráf pontjai és $\{p_i, p_j\}$ akkor és csak akkor legyen él G -ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat **intervallumgráfoknak** nevezzük.*

11. Következmény. *Minden intervallumgráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Az adott intervallum rendszerhez tartozó intervallum gráf komplementere pont az ugyanahhoz a rendszerhez tartozó intervallum rendezés összehasonlítási gráfja.

HÁZI FELADAT Milyen állítást kapunk, ha tetszőleges összehasonlítási gráfra alkalmazzuk Lovász tételelét?

Perfekt Gráf Tétel

9. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

10. Definíció. *Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek p_1, p_2, \dots egy G gráf pontjai és $\{p_i, p_j\}$ akkor és csak akkor legyen él G -ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat **intervallumgráfoknak** nevezzük.*

11. Következmény. *Minden intervallumgráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Az adott intervallum rendszerhez tartozó intervallum gráf komplementere pont az ugyanahhoz a rendszerhez tartozó intervallum rendezés összehasonlítási gráfja.

HÁZI FELADAT Milyen állítást kapunk, ha tetszőleges összehasonlítási gráfra alkalmazzuk Lovász tételelét? Azaz mi lesz a komplementer klikkszám és kromatikus száma?

Lovász erősebb tétele

12. Tétel (Lovász). *Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden G' feszített részgráfjára teljesül, hogy $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.*

Megjegyzések

Lovász erősebb tétele

12. Tétel (Lovász). *Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden G' feszített részgrájára teljesül, hogy $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.*

Megjegyzések

1. Ebből a tételből következik a Perfekt Gráf Tétel, ugyanis $\alpha(\overline{G'}) = \omega(G')$ és $\omega(\overline{G'}) = \alpha(G')$, valamint $|V(G')| = |V(\overline{G'})|$.

Lovász erősebb tétele

12. Tétel (Lovász). *Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden G' feszített részgrádjára teljesül, hogy $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.*

Megjegyzések

1. Ebből a tételből következik a Perfekt Gráf Tétel, ugyanis $\alpha(\overline{G'}) = \omega(G')$ és $\omega(\overline{G'}) = \alpha(G')$, valamint $|V(G')| = |V(\overline{G'})|$.
2. A Perfekt Gráf Tétel ekvivalens avval, hogy „Ha G perfekt, akkor a komplementere is perfekt.”

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmaszt.

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmaszt. Ha G perfekt és G' feszített részgráfja, akkor $\omega(G') = \chi(G')$

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmazt. Ha G perfekt és G' feszített részgráfja, akkor $\omega(G') = \chi(G') \implies \alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmazt. Ha G perfekt és G' feszített részgráfja, akkor $\omega(G') = \chi(G') \implies \alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.

Azt kell tehát látni, hogy ha $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$ egy gráf minden feszített részgráfjára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmazt. Ha G perfekt és G' feszített részgráfja, akkor $\omega(G') = \chi(G') \implies \alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.

Azt kell tehát látni, hogy ha $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$ egy gráf minden feszített részgráfjára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Egy gráf *imperfekt*, ha nem perfekt. G *minimális imperfekt gráf*, ha ő maga nem perfekt, de minden valódi feszített részgráfja az.

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmaszt. Ha G perfekt és G' feszített részgráfja, akkor $\omega(G') = \chi(G') \implies \alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.

Azt kell tehát látni, hogy ha $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$ egy gráf minden feszített részgráfjára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Egy gráf *imperfekt*, ha nem perfekt. G *minimális imperfekt gráf*, ha ő maga nem perfekt, de minden valódi feszített részgráfja az. Minden imperfekt gráf tartalmaz minimális imperfekt gráfot feszített részgráfként.

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmazt. Ha G perfekt és G' feszített részgráfja, akkor $\omega(G') = \chi(G') \implies \alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.

Azt kell tehát látni, hogy ha $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$ egy gráf minden feszített részgráfjára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Egy gráf *imperfekt*, ha nem perfekt. G *minimális imperfekt gráf*, ha ő maga nem perfekt, de minden valódi feszített részgráfja az. Minden imperfekt gráf tartalmaz minimális imperfekt gráfot feszített részgráfként.

Azt fogjuk igazolni, hogy ha G minimális imperfekt gráf, akkor $\alpha(G) \cdot \omega(G) < |V(G)|$.

A bizonyítás 1. Lemmája

13. Lemma. *Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára $\omega(G - A) = \omega(G)$.*

A bizonyítás 1. Lemmája

13. Lemma. *Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára $\omega(G - A) = \omega(G)$.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G - A) < \omega(G)$.

A bizonyítás 1. Lemmája

13. Lemma. *Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára $\omega(G - A) = \omega(G)$.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G - A) < \omega(G)$. G minimális imperfekt $\implies G - A$ perfekt $\implies \chi(G - A) = \omega(G - A)$.

A bizonyítás 1. Lemmája

13. Lemma. *Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára $\omega(G - A) = \omega(G)$.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G - A) < \omega(G)$. G minimális imperfekt $\implies G - A$ perfekt $\implies \chi(G - A) = \omega(G - A)$. Viszont $\chi(G) \leq \chi(G - A) + 1$, mert A -beli pontok egy újabb színnel színezhetők.

A bizonyítás 1. Lemmája

13. Lemma. *Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára $\omega(G - A) = \omega(G)$.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G - A) < \omega(G)$. G minimális imperfekt $\implies G - A$ perfekt $\implies \chi(G - A) = \omega(G - A)$. Viszont $\chi(G) \leq \chi(G - A) + 1$, mert A -beli pontok egy újabb színnel színezhetők. $\implies \chi(G) \leq \chi(G - A) + 1 = \omega(G - A) + 1 \leq \omega(G)$.

A bizonyítás 1. Lemmája

13. Lemma. *Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára $\omega(G - A) = \omega(G)$.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G - A) < \omega(G)$. G minimális imperfekt $\implies G - A$ perfekt $\implies \chi(G - A) = \omega(G - A)$. Viszont $\chi(G) \leq \chi(G - A) + 1$, mert A -beli pontok egy újabb színnel színezhetők. $\implies \chi(G) \leq \chi(G - A) + 1 = \omega(G - A) + 1 \leq \omega(G)$.

Tehát G maga is perfekt, hiszen nemcsak minden részgráfja, hanem ő maga is kiszínezhető annyi színnel, amennyi a benne levő legnagyobb klikk mérete, ellentmondás.

A bizonyítás 2. Lemmája

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. *Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy*

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszám.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$. Általánosságban legyenek $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfekt gráf egy optimális színezésének színosztályai.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$. Általánosságban legyenek $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfekt gráf egy optimális színezésének színosztályai. Ha $0 \leq j \leq \alpha \cdot \omega$, akkor a $G - A_j$ gráf perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$. Általánosságban legyenek $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfekt gráf egy optimális színezésének színosztályai. Ha $0 \leq j \leq \alpha \cdot \omega$, akkor a $G - A_j$ gráf perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. Legyen B_j a $G - A_j$ gráf egy rögzített ω méretű klikkje.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfek, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$. Általánosságban legyenek $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfek gráf egy optimális színezésének színosztályai. Ha $0 \leq j \leq \alpha \cdot \omega$, akkor a $G - A_j$ gráf perfek, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. Legyen B_j a $G - A_j$ gráf egy rögzített ω méretű klikkje.

B_j definíciója miatt $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfek, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$. Általánosságban legyenek $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfek gráf egy optimális színezésének színosztályai. Ha $0 \leq j \leq \alpha \cdot \omega$, akkor a $G - A_j$ gráf perfek, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. Legyen B_j a $G - A_j$ gráf egy rögzített ω méretű klikkje.

B_j definíciója miatt $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$. Belátjuk, hogy $i \neq j$ esetén $A_i \cap B_j \neq \emptyset$.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$. Általánosságban legyenek $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfekt gráf egy optimális színezésének színosztályai. Ha $0 \leq j \leq \alpha \cdot \omega$, akkor a $G - A_j$ gráf perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. Legyen B_j a $G - A_j$ gráf egy rögzített ω méretű klikkje.

B_j definíciója miatt $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$. Belátjuk, hogy $i \neq j$ esetén $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. $|A_i \cap B_j| = 1$, hiszen egy klikknek és egy független halmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet.

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk,

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra.

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra.

$$A_0 \cap B_i = \{a_k\}$$

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra.

$A_0 \cap B_i = \{a_k\}$ B_i minden $G - \{a_j\}$ $j \neq k$ gráfban ω méretű klikk,

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra.

$A_0 \cap B_i = \{a_k\}$ B_i minden $G - \{a_j\}$ $j \neq k$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztályt metsz.

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra.

$A_0 \cap B_i = \{a_k\}$ B_i minden $G - \{a_j\}$ $j \neq k$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztályt metsz. A $G - \{a_k\}$ gráfban $\omega - 1$ méretű klikk lesz, azaz *egy kivétellel* minden színosztályt metsz.

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra.

$A_0 \cap B_i = \{a_k\}$ B_i minden $G - \{a_j\}$ $j \neq k$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztályt metsz. A $G - \{a_k\}$ gráfban $\omega - 1$ méretű klikk lesz, azaz *egy kivételével* minden színosztályt metsz. Vagyis az $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ független halmazok közül B_i ismét csak pontosan egytől lehet diszjunkt, ez pedig akkor csakis az az A_i lehet, aminek párjául választottuk.

A bizonyítás 3. Lemmája

15. Lemma. *Legyenek A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m egy n elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy*

- 1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és*
- 2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.*

Ekkor $m \leq n$.

A bizonyítás 3. Lemmája

15. Lemma. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m egy n elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

Ekkor $m \leq n$.

BIZONYÍTÁS Legyen \mathbb{A} az az $m \times n$ -es mátrix, amelynek sorai az A_i halmazok ún. karakterisztikus vektorai.

A bizonyítás 3. Lemmája

15. Lemma. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m egy n elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

Ekkor $m \leq n$.

BIZONYÍTÁS Legyen \mathbb{A} az az $m \times n$ -es mátrix, amelynek sorai az A_i halmazok ún. karakterisztikus vektorai. Ez annyit jelent, hogy a mátrix i -edik sorának j -edik eleme 1, ha az alaphalmaz j -edik eleme benne van A_i -ben, és 0, ha nincs.

A bizonyítás 3. Lemmája

15. Lemma. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m egy n elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

Ekkor $m \leq n$.

BIZONYÍTÁS Legyen \mathbb{A} az az $m \times n$ -es mátrix, amelynek sorai az A_i halmazok ún. karakterisztikus vektorai. Ez annyit jelent, hogy a mátrix i -edik sorának j -edik eleme 1, ha az alaphalmaz j -edik eleme benne van A_i -ben, és 0, ha nincs. Például, ha $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ és $n = 3$, akkor $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A bizonyítás 3. Lemmája

15. Lemma. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m egy n elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

Ekkor $m \leq n$.

BIZONYÍTÁS Legyen \mathbb{A} az az $m \times n$ -es mátrix, amelynek sorai az A_i halmazok ún. karakterisztikus vektorai. Ez annyit jelent, hogy a mátrix i -edik sorának j -edik eleme 1, ha az alaphalmaz j -edik eleme benne van A_i -ben, és 0, ha nincs. Például, ha $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ és $n = 3$, akkor $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hasonlóan, legyen \mathbb{B} az az $n \times m$ méretű mátrix, melynek oszlopai a B_i halmazok karakterisztikus vektorai.

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbb{D} teljes rangú:

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbb{D} teljes rangú: $\det \mathbb{D} = (-1)^{m-1}(m-1)$

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbb{D} teljes rangú: $\det \mathbb{D} = (-1)^{m-1}(m-1)$

$m = \text{rang}(\mathbb{D}) \leq \text{rang}(\mathbb{B})$.

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbb{D} teljes rangú: $\det \mathbb{D} = (-1)^{m-1}(m-1)$

$m = \text{rang}(\mathbb{D}) \leq \text{rang}(\mathbb{B})$. (Lásd előző félév!)

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbb{D} teljes rangú: $\det \mathbb{D} = (-1)^{m-1}(m-1)$

$m = \text{rang}(\mathbb{D}) \leq \text{rang}(\mathbb{B})$. (Lásd előző félév!) Mivel \mathbb{B} $n \times m$ -es, ezért $m \leq \text{rang}(\mathbb{B})$ csak úgy lehet, ha $m \leq n$.

A Tétel bizonyításának befejezése

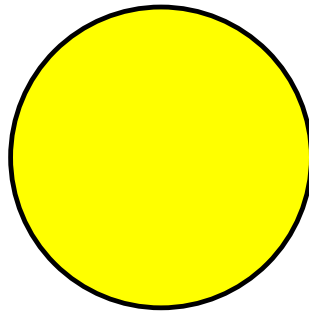
A Tétel bizonyításának befejezése

Ha G minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik G csúcshalmazának két olyan, egyenként $\alpha \cdot \omega + 1$ méretű részhalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma részhalmazrendszereire vonatkozó feltételt.

A Tétel bizonyításának befejezése

Ha G minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik G csúcshalmazának két olyan, egyenként $\alpha \cdot \omega + 1$ méretű részhalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma részhalmazrendszereire vonatkozó feltételt.

Alkalmazhatjuk tehát a 3. Lemmát m helyébe $\alpha \cdot \omega + 1$ -et, n helyébe $|V(G)|$ -t írva.



A Tétel bizonyításának befejezése

Ha G minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik G csúcshalmazának két olyan, egyenként $\alpha \cdot \omega + 1$ méretű részhalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma részhalmazrendszereire vonatkozó feltételt.

Alkalmazhatjuk tehát a 3. Lemmát m helyébe $\alpha \cdot \omega + 1$ -et, n helyébe $|V(G)|$ -t írva.

Azt kaptuk tehát, hogy minimálisan imperfekt G gráfra $\alpha(G)\omega(G) + 1 \leq |V(G)|$.



A Tétel bizonyításának befejezése

Ha G minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik G csúcshalmazának két olyan, egyenként $\alpha \cdot \omega + 1$ méretű részalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma részalmazrendszereire vonatkozó feltételt.

Alkalmazhatjuk tehát a 3. Lemmát m helyébe $\alpha \cdot \omega + 1$ -et, n helyébe $|V(G)|$ -t írva.

Azt kaptuk tehát, hogy minimálisan imperfekt G gráfra $\alpha(G)\omega(G) + 1 \leq |V(G)|$. Pontosan ennyi hiányzott a bizonyítás befejezéséhez, ezzel tehát készen vagyunk.



Erős perfekt gráf sejtés

Nem perfekt egy legalább öt hosszú páratlan kör, hiszen ebben a maximális klikk mérete 2, viszont kromatikus száma 3.

Erős perfekt gráf sejtés

Nem perfekt egy legalább öt hosszú páratlan kör, hiszen ebben a maximális klikk mérete 2, viszont kromatikus száma 3. Az előbbi tétel szerint a legalább öt hosszú páratlan körök komplementerei sem perfektek.

Erős perfekt gráf sejtés

Nem perfekt egy legalább öt hosszú páratlan kör, hiszen ebben a maximális klikk mérete 2, viszont kromatikus száma 3. Az előbbi tétel szerint a legalább öt hosszú páratlan körök komplementerei sem perfektek. A definícióból így rögtön következik, hogy nem perfekt egy olyan gráf sem, amiben van egy páratlan kör vagy komplementere feszített részgráfként.

Erős perfekt gráf sejtés

Nem perfekt egy legalább öt hosszú páratlan kör, hiszen ebben a maximális klikk mérete 2, viszont kromatikus száma 3. Az előbbi tétel szerint a legalább öt hosszú páratlan körök komplementerei sem perfektek. A definícióból így rögtön következik, hogy nem perfekt egy olyan gráf sem, amiben van egy páratlan kör vagy komplementere feszített részgráfként.

Berge azt sejt, hogy ez az egyetlen akadály:

16. Sejtés (Erős perfekt gráf sejtés). *Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha sem G , sem \overline{G} nem tartalmaz feszített részgráfként legalább öt hosszú¹ páratlan kört.*

¹Hiba a jegyzetben!!