

Bevezetés a Számításelméletbe II. 2. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi és Információelméleti Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 február 19.

Elégséges feltételek Hamilton-kör létezésére

Hamilton-kör létezésének kérdése csak $n \geq 3$ pontú egyszerű gráfban érdekes, így azt mindig feltesszük, anélkül, hogy külön kimondanánk.

1. Tétel (Dirac). *Ha egy n pontú G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.*

2. Tétel (Ore). *Ha az n pontú G gráfban minden olyan $x, y \in V(G)$ pontpárra, amelyre $\{x, y\} \notin E(G)$ ¹ teljesül az is, hogy $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.*

3. Tétel (Pósa). *Jelöljük G pontjai fokszámát nagyság szerint rendre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ -nel. Ha minden $k < n/2$ -re $d_k \geq k + 1$, akkor G -ben van Hamilton-kör.*

¹Sajtóhiba az új jegyzetben!!

4. Tétel (Chvátal). Jelöljük G pontjai fokszámát nagyság szerint rendre $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ -nel.

1. Ha minden k -ra, amelyre $d_k \leq k < n/2$, teljesül, hogy $d_{n-k} \geq n - k$, akkor a gráfban van Hamilton-kör.
2. Ha $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ pozitív egészekre a fenti feltétel nem teljesül, akkor van olyan Hamilton-kört nem tartalmazó gráf, melynek $d'_1 \leq d'_2 \leq \dots \leq d'_n$ fokszámaira $\forall i: d'_i \geq d_i$.

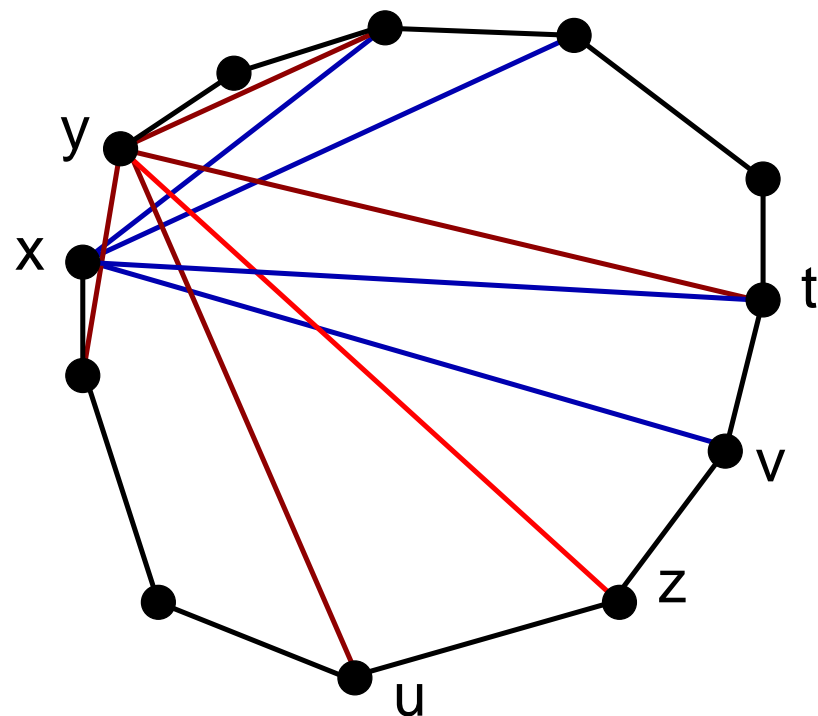
5. Állítás. Chvátal \implies Pósa \implies Ore \implies Dirac

Chvátal-tétel bizonyítása

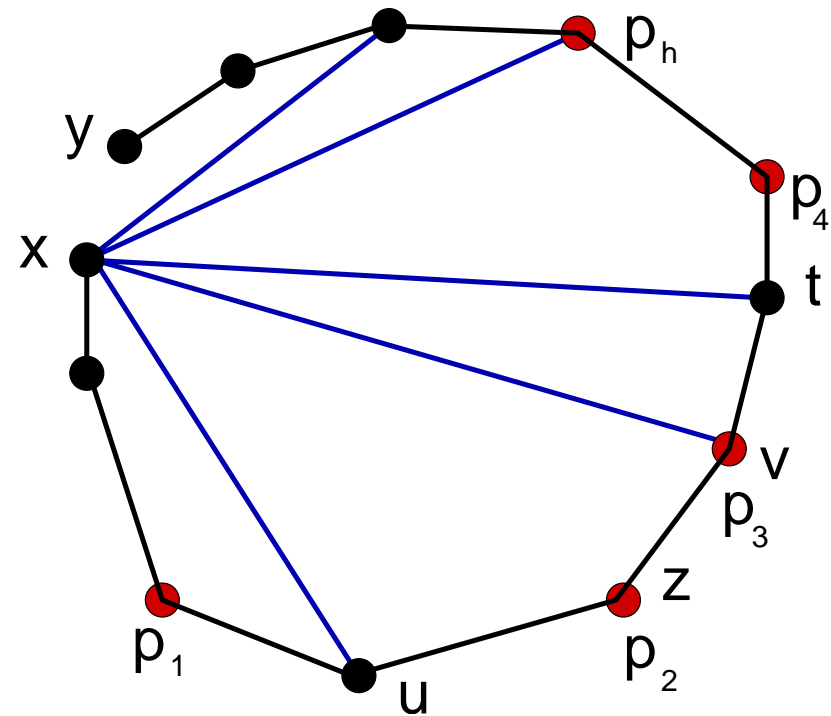
- **Indirekt feltevés:** Létezik G' gráf, melynek fokszámai teljesítik a feltételt, de nincs benne Hamilton-kör.

- **Felhízlaljuk a gráfot:** Adjunk G' -hez éleket mindaddig, amíg Hamilton-kör keletkezése nélkül ez lehetséges, így kapjuk a G gráfot. Ekkor G bármely két összekötetlen pontját összekötve keletkezne H -kör, azaz bármely két pontja közt van Hamilton út.

- **Összekötetlen csúcsok fokszámösszege kicsi**
 $d(x) + d(y) \leq n - 1$. Az x -ből y -ba vezető Hamilton úton x szomszédait megelőző pontok nem lehetnek y szomszédai, **Figyelem!** Itt befejeztük mert különben lenne H -kör. $x \rightarrow v \rightarrow t \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u \rightarrow x$ Az $n - 1$ pontból tehát $d(x)$ nem lehet y szomszédja

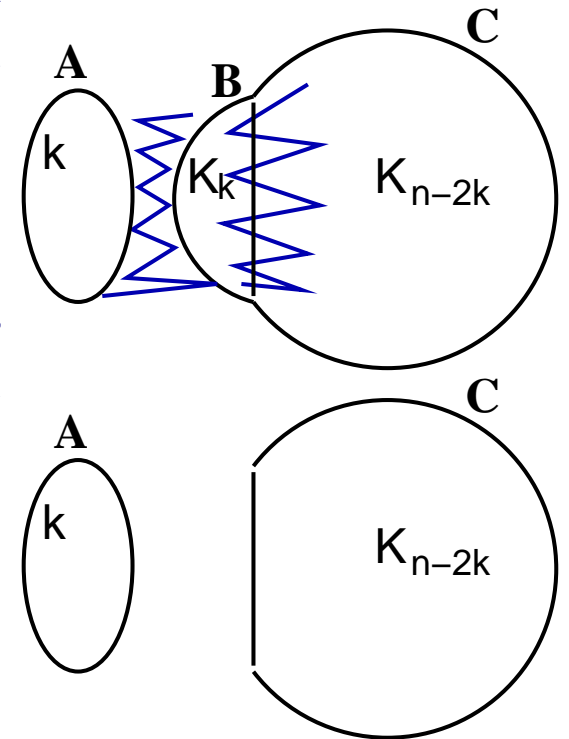


- **Speciális x és y választása** Válasszuk x -et és y -t úgy, hogy $d(x) + d(y)$ lehető legnagyobb legyen. Tegyük fel, hogy $d(x) \leq d(y)$. Ekkor $d(x) \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$. Legyen $d(x) = h$.
- **$d_h \leq h < \frac{n}{2}$** Elég: van h olyan pont, melyek foka nem nagyobb, mint $d(x)$. Tekintsük az $x \rightarrow y$ Hamilton-úton x szomszédai előtti pontokat: p_1, p_2, \dots, p_h . Ezek egyike sincs y -nal összekötve, így x választásakor őket is vehettük volna, de nem vettük, ezért $\forall i: d(p_i) \leq d(x) = h$.
- **$d_{n-h} \geq n - h$.** Azaz legalább $h+1$ csúcs foka legalább $n - h$. Mivel $d(x) = h$, ezért az előbbi $h + 1$ csúcs közt van olyan z csúcs, ami nincs x -szel összekötve. Tehát $d(x) + d(z) \geq h + n - h = n > d(x) + d(y)$, ellentmondás x és y választásával.



Chvátal tétele 2. állításának bizonyítása

Tegyük fel, hogy $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ pozitív egészekre az 1. feltétel nem teljesül, azaz létezik $k < \frac{n}{2}$, melyre $d_k \leq k$ és $d_{n-k} < n - k$. Tehát $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k \leq k$, $d_{k+1} \leq d_{k+2} \leq \dots \leq d_{n-k} \leq n - k - 1$, valamint $d_{n-k+1} \leq \dots \leq d_n \leq n$. Legyen a G gráf a következő. Csúcshalmaza álljon az A , B és C halmazokból, ahol $|A| = |B| = k$ és $|C| = n - 2k$. Legyen a $B \cup C$ halmaz bármely két pontja közt él, valamint A minden pontja B minden pontjával összekötve. Az A -beli pontok foka k , a C -beli pontok foka $n - k - 1$, a B -beli pontok foka $n - 1$. Azaz a G gráf d'_i fokszámaira igaz, hogy $d'_1 = d'_2 = \dots = d'_k = k$, $d'_{k+1} = d'_{k+2} = \dots = d'_{n-k} = n - k - 1$, $d'_{n-k+1} = \dots = d'_n = n - 1$. $\forall i: d'_i \geq d_i$. A B halmaz elhagyásával G $k + 1$ komponensre esik szét, A k izolált pontjára és a C halmazra, azaz G -ben nem lehet Hamilton kör.



C nemüres halmaz, mert $n - 2k > 0$.

Arthur király esete a házassággal

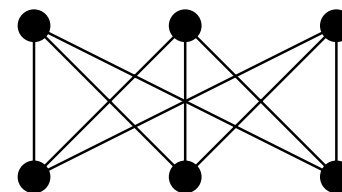
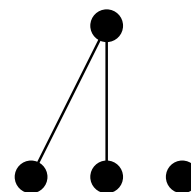
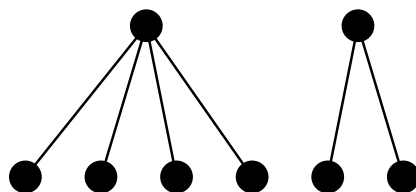
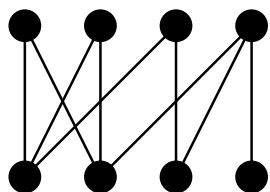
Arthur, a kerekasztal lovagjainak királya megúnta, hogy lovagjai folyton csak háborúznak. Megparancsolta **M**erlinnek, hogy házassítsa meg a lovagokat a gyönyörű úrhölgyekkel, de csak olyan párokat adjon össze, akik kedvelik egymást. Merlin így gondolkodott:

- Modellezzük a helyzetet egy G gráffal. $V(G) = \{\text{Úrhölgyek}\} \cup \{\text{Lovagok}\}$, $\{\text{Hölgy}_i, \text{Lovag}_j\}$ él, ha kedvelik egymást.
- Ez egy *páros gráf* lesz, amiben egy *teljes párosítást* kell keresnem.



Páros gráfok

6. Definíció. Egy G gráfot **páros gráfnak** nevezünk, ha a G pontjainak $V(G)$ halmaza két részre, egy A és B halmazra osztható úgy, hogy G minden élének egyik végpontja A -ban, másik végpontja B -ben van. Ennek jelölése: $G = (A, B)$. A $K_{a,b}$ -vel jelölt **teljes páros gráf** olyan $G = (A, B)$ páros gráf, ahol $|A| = a$ és $|B| = b$, és amelyben minden A -beli pont össze van kötve minden B -beli ponttal.



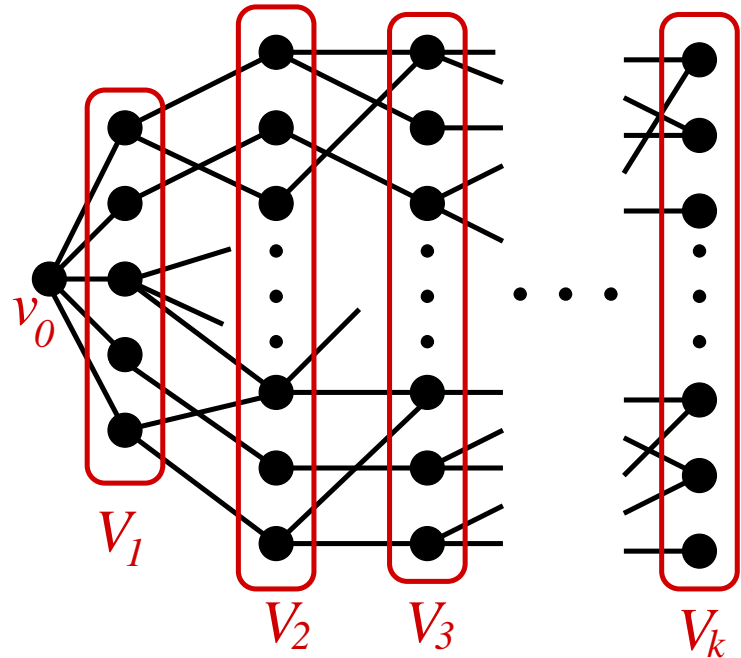
Páros gráfok jellemzése

7. Tétel. *Egy G gráf akkor és csak akkor páros gráf, ha minden G -ben levő kör páros hosszúságú.*

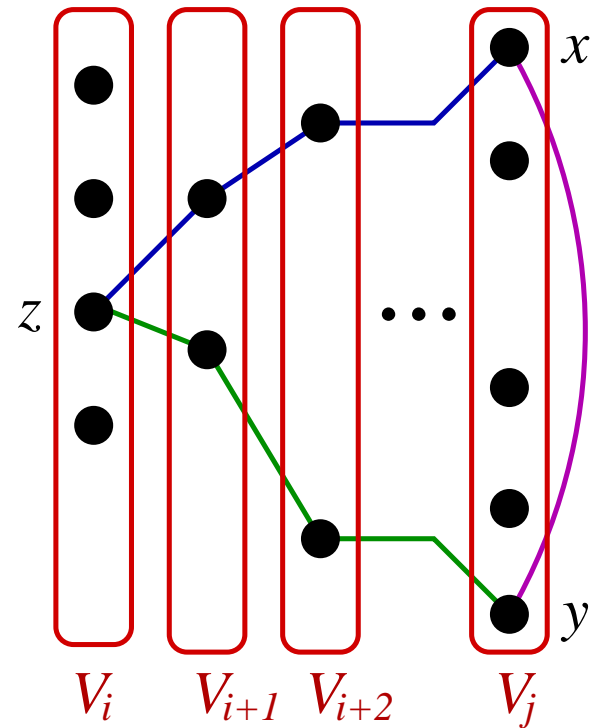
BIZONYÍTÁS Elég összefüggő gráfot tekinteni.

Ha G páros gráf, és C egy kör G -ben, akkor C pontjai felváltva vannak A -ban és B -ben. Így $|V(C)|$ nyilván páros.

Tegyük fel, hogy G minden köre páros. Legyen $v_0 \in V(G)$ tetszőleges rögzített csúcs. Legyen $V_i = \{w \in V(G) : \text{A legrövidebb } v_0 - w \text{ út hossza } i\}$. Ekkor él csak szomszédos szintek között, vagy egy szinten belül mehet. „Nem ugorhat át szintet”



Tegyük fel, van él valamelyik V_j szinten belül, x és y között. Tekintsünk egy-egy j hosszú $v_0 - x$ és $v_0 - y$ utat. Legyen ezek első találkozása a V_j szinttől visszafelé haladva z , a V_i szinten. Ekkor a $z - y - x - z$ kör páratlan. Azaz élek csak szomszédos szintek között vezetnek, vagyis a $A = \{v_0\} \cup V_2 \cup V_4 \dots$ és $B = V_1 \cup V_3 \cup \dots$ a $V(G)$ egy jó felosztása.



Párosítások

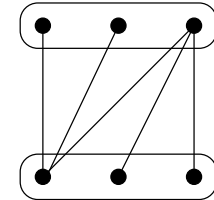
8. Definíció. **Párosításnak**, vagy **részleges párosításnak** nevezünk egy M élhalmazt, ha semelyik két élnek nincs közös pontja. Az ilyen éleket **független éleknek** is nevezzük. A részleges párosítás **lefed** **éleinek végpontjait**. Egy párosítást **teljes párosításnak** nevezünk, ha a gráf minden pontját lefed.

Mi akadályozhatja meg Merlint abban, hogy teljes párosítást találjon az Úrhölgyek és a Lovagok között?

Túl sok lovag hajt túl kevés úrhölgyre.

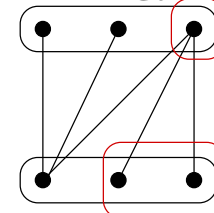
Ha van teljes párosítás, akkor bármely k lovaghoz kell legyen k úrhölgy, akiket összesen kedvelnek.

Úrhölgyek



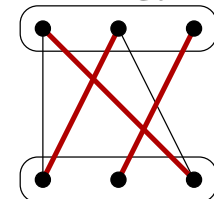
Lovagok

Úrhölgyek



Lovagok

Úrhölgyek



Lovagok

Frobenius és Hall tételei

$N(X)$ -szel jelöljük egy $X \subseteq V(G)$ pontthalmaz szomszédainak halmazát.

9. Tétel (Frobenius). *Egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és $|N(X)| \geq |X|$ minden $X \subseteq A$ -ra.*

Merlin most már el tudja dönteni van-e teljes párosítás Úrhölgyek és Lovagok közt.
De hogyan találja meg?

10. Tétel (Hall). *Egy $G = (A, B)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A -t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részthalmazra $|N(X)| \geq |X|$. (Ezt a feltételt **Hall-feltételnek** nevezzük.)*

11. Állítás. $Hall \implies Frobenius$.

Hall-tételének bizonyítása

SZÜKSÉGESSÉG: Ha van A -t lefedő párosítás, akkor teljesül a feltétel, hiszen ekkor a párosítás élei minden ponthoz egyértelműen hozzárendelnek egy B -beli pontot.

ELÉGSÉGESSÉG: Javító utak módszerével.

Legyen M egy tetszőleges, $X \subset A$ -t lefedő párosítás. Ha nem fedi le A -t, akkor növelni próbáljuk.

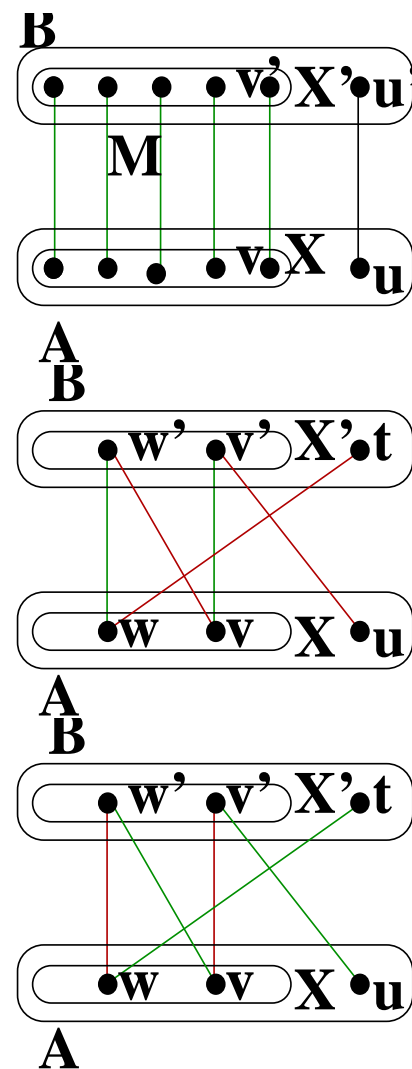
Minden $v \in X$ pont M -beli párját jelöljük v' -vel, X' pedig legyen a B -beli, M által lefedett pontok halmaza.

Új él hozzávétele: Ha u -nak van szomszédja $B - X'$ -ben, akkor egy élet hozzávehetünk M -hez.

Javító út: P út, ami egy $A - X$ -beli pontból indul, egy $B - X'$ -beli pontban végződik, és minden második éle M -beli, de a többi nem M -beli.

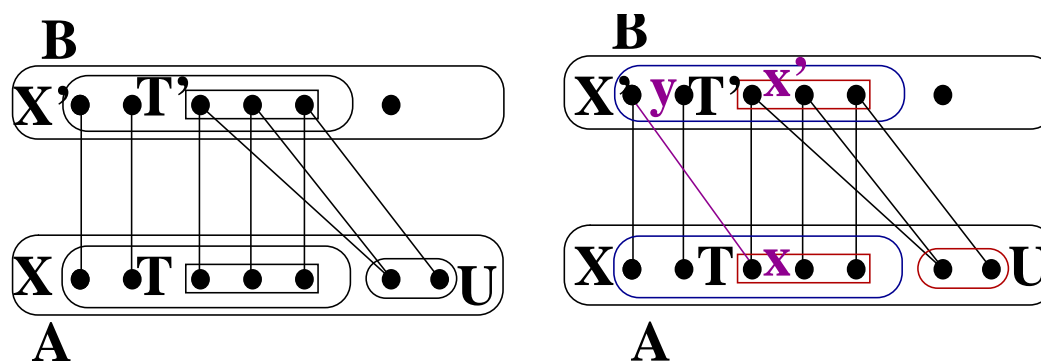
Javítás: $M' = (M - (M \cap P)) \cup (P - M)$ esetén M' párosítás élszáma eggyel nagyobb lesz.

Alternáló út: $A - X$ -beli pontból indulnak és minden második élük M -beli, de a többi nem.



M nem növelhető javító úttal: Ha $\emptyset \neq U = A - X$, akkor legyen T' azon B -beli pontok halmaza, amelyek elérhetők U -ból alternáló úttal. Ekkor feltevésünk szerint $T' \subseteq X'$.

Álljon T a T' -beli pontok párjaiból, $T \subseteq X$



$N(T) = T'$: Világos, hogy $T' \subseteq N(T)$. $\{x, y\}$ él, hogy $x \in T$ és $y \notin T'$. Legyen P egy alternáló út $u \in U$ -ból x' -be. Ekkor P nem megy át x -en(!).

P -t folytatva $\{x', x\}$ -szel majd $\{x, y\}$ -nal egy alternáló utat kaptunk u -ból $y \notin T'$ -be, **ellentmondás**.

$T \cup U \subseteq A$ halmazra $N(T \cup U) = T'$, de $|T'| = |T| < |T \cup U|$, **vagyis nem teljesül a Hall-feltétel**.

Magyar módszer

Javító utak keresésével hatékony algoritmust kapunk a maximális élszámú párosítás megtalálására. Ez az algoritmus *magyar módszer* néven ismert. **Hurrá!** - kiáltja Merlin.

1. **Fázis** Amíg tudunk, egy párosításhoz hozzáveszünk további független éleket, így kapunk egy M párosítást, ami még nem feltétlenül maximális.

2. **Fázis** Keresünk egy javító utat, és ennek segítségével növeljük a párosítást.

Stop Ha javító úttal sem lehet növelni: M -nél több élű párosítás a gráfban nem létezhet.

Hogyan keressünk javító utat? Szélességi kereséssel, lásd: Algoritmus elmélet előadás.

Stop feltétel? König-tétel bizonyításánál belátjuk, hogy helyes.