

# Bevezetés a Számításelméletbe II. 4. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 március 5.

## Gráfok színezése

Térkép színezés  $\implies$  duálisban csúcsok színezése: szomszédosak különböző színűek.

**1. Definíció.** Egy  $G$  hurokmentes gráf  $k$  színnel kiszínezhető, *hogyha minden csúcsot ki lehet színezni  $k$  szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs színe különböző legyen.*  $G$  kromatikus száma  $\chi(G) = k$ , *ha  $G$   $k$  színnel kiszínezhető, de  $k - 1$  színnel nem.* Egy ilyen színezésnél az azonos színt kapott pontok halmazát színosztálynak nevezzük.

Másképp fogalmazva: Legyen  $G = (V, E)$  egy hurokél mentes gráf,  $|C| = k$ . Egy  $f: V \rightarrow C$  leképezés a  $G$  egy jó színezése  $C$  színeivel ( $k$ -színnel), *ha  $\{v_1, v_2\} \in E$ -ből  $f(v_1) \neq f(v_2)$  következik.*  $G$  kromatikus száma  $\chi(G) = k$  *az a legkisebb  $k$  szám, melyre  $G$ -nek van jó színezése  $k$  színnel.*

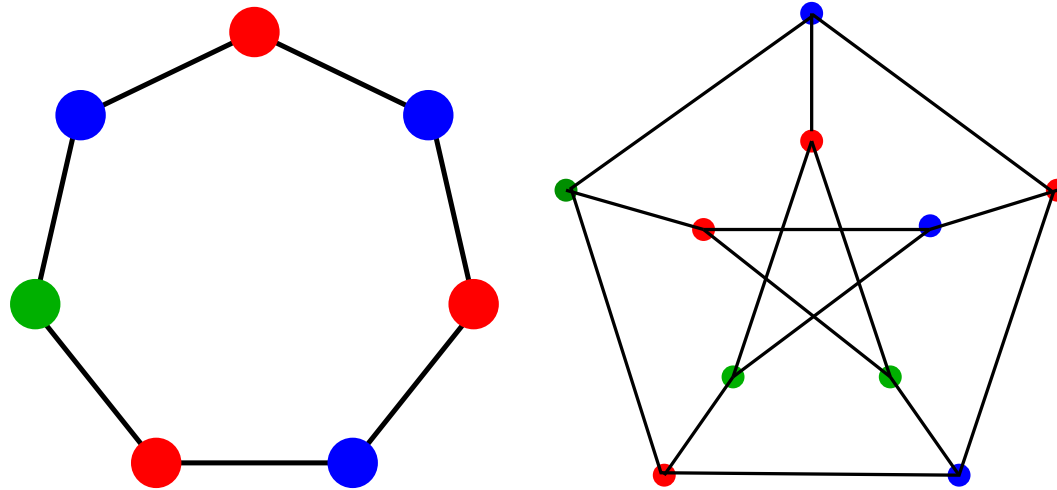
Megjegyzések: 1. Végtelen gráfra is értelmes a definíció,  $k$  lehet végtelen számosság.  
2. Hurokél nem lehet, párhuzamos él nem számít  $\implies$  egyszerű gráfokat tekintünk csak.

## Példák

$K_n$  kromatikus száma  $n$ . Általában  $\chi(G) \leq v(G)$ .

Egy páratlan kör kromatikus száma 3.

A Petersen gráf kromatikus száma 3.



Legyen  $G = (V, E)$  ahol  $V = \mathbb{R}$ ,  $\{x, y\} \in E \iff x - y \in \mathbb{Q}$   $\chi(G) = \aleph_0$ .

## Egyszerű észrevételek

**2. Tétel.** *Egy legalább egy élet tartalmazó  $G$  gráf akkor és csak akkor páros, ha  $\chi(G) = 2$ .*

BIZONYÍTÁS Van él  $\implies \chi(G) \geq 2$ .  $V(G) = A \cup B \implies f(v) = \begin{cases} 1 & \text{if } v \in A \\ 2 & \text{if } v \in B \end{cases}$  egy jó színezés.  $\implies \chi(G) \leq 2$ .

Ha  $\chi(G) = 2$ , akkor a két színosztály épp a páros gráf definíciójában szereplő felbontásnak megfelelő két halmaz lesz.

**3. Definíció.**  $G$  egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A  $G$ -ben található maximális méretű klikk méretét, azaz pontszámát  $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

**4. Tétel.** Minden  $G$  gráfra  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

## Mohó színezés

Legyen  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ .

$f(v_0) := 1;$

for ( $i=1; i < n, i++$ )

$f(v_i) := \min\{j : j \notin \{f(v_k) : k < i, \{v_i, v_k\} \in E(G)\}\};$

Első csúcsot színezzük

Sorban a többieket

Legelső színnel, amit nem használtunk  $v_i$  eddigi szomszédainál.

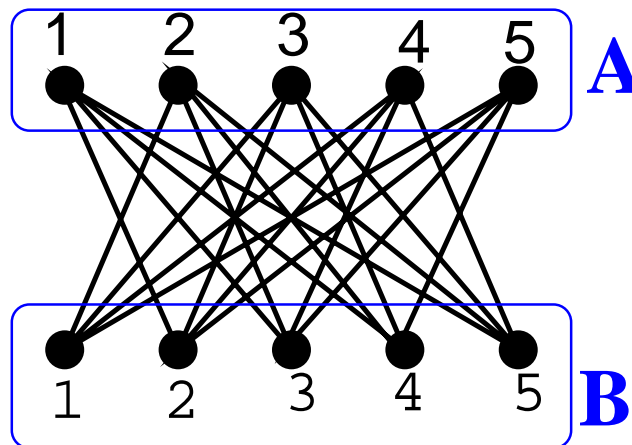
**5. Állítás.**  $\chi(G) \leq \Delta + 1$ .

## Mohó színezés függ a sorrendtől

Tekintsük a  $G = K_{n,n}$  gráfot.  $V(G) = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$   $E(G) = \{\{a_i, b_j\} : i \neq j\}$ , vagyis a  $K_{n,n}$  teljes gráfból elhagyjuk az  $\{a_i, b_i\}$  éleket.

$1 < i < n$  esetén az  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n$  sorrendben a mohó színezés  $i+1$  színt használ.

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  sorrendben kettőt.



## Becslések pontossága

Általában egyiknél sem lehet jobbat mondani:

$\chi(G) \geq \omega(G)$ : Páros gráfok, teljes gráfok, perfekt gráfok – sok különböző példa.

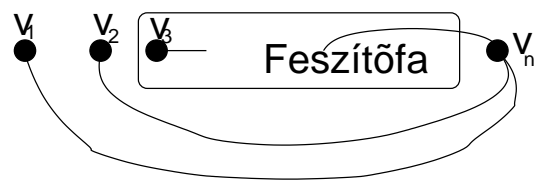
$\chi(G) \leq \Delta + 1$ : Teljes gráfok, (húr nélküli) páratlan körök – kevés különböző példa.

**6. Tétel (Brooks).** *Ha  $G$  egyszerű, összefüggő gráf, nem teljes gráf, és nem egy páratlan hosszúságú kör, akkor  $\chi(G) \leq \Delta = \max_{x \in V(G)} d(x)$ .*

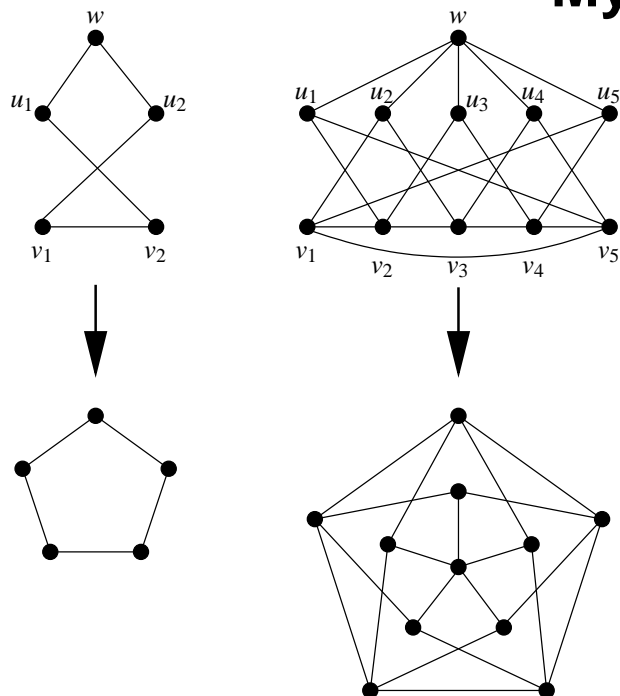
## Brooks tétel bizonyítás vázlata

- $\Delta = 2$  esetén a gráf egyszerű út vagy egy kör.
- $\Delta \geq 3$ : indukció pontszámra. Ha  $G$  egy vagy két ponttal szétvágható, akkor a részek színezését összerakhatjuk  $G$  színezésévé (!!)
- Legyenek  $v_1, v_2, v_n$  olyan pontjai  $G$ -nek, amelyekre  $\{v_1, v_n\} \in E(G)$ ,  $\{v_2, v_n\} \in E(G)$ , de  $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$ . Ilyen pontok biztosan vannak, ha  $G$  nem teljes gráf és összefüggő.
- $G - \{v_1, v_2\}$  gráf összefüggő.  $\implies$  Van fészítőfája a fészítőfának van  $v_n$ -től különböző elsőfokú pontja. Ez legyen  $v_3$ . A  $G - \{v_1, v_2, v_3\}$  gráf összefüggő marad, így hasonlóan kapjuk  $v_4$ -et stb. Az így kapott sorrend olyan, hogy minden pontnak van nagyobb indexű szomszédja.  $\implies$  Mohó színezés jól színez (!!).





## Mycielski konstrukciója



**7. Tétel (Mycielski konstrukciója).**  $\forall k \geq 2$ -re van  $G_k$ :  $\omega(G_k) = 2$  és  $\chi(G_k) = k$ .

BIZONYÍTÁS  $G_2 = K_2$ .  $G_k \implies G_{k+1}$ :  $V(G_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .  $n + 1$  darab új pont:  $u_1, u_2, \dots, u_n$  és  $w$ . Új élek:  $\{u_i, v_j\} \in E(G_{k+1}) \iff \{v_i, v_j\} \in E(G_k)$  és  $\forall i: \{w, u_i\} \in E(G_{k+1})$

## Indukció $k$ -ra

$G_{k+1}$ -ben nincs háromszög: Nem lehet mindhárom csúcsa  $G_k$ -ban. Ha  $w$  a háromszög egyik csúcsa, akkor a másik kettő csak  $u_i$  és  $u_j$  lehetne, ezek viszont nem szomszédosak. Ha  $u_i$  a háromszög egyik csúcsa és a másik két csúcs  $v_x$  és  $v_y$ :  $u_i$  szomszédai megegyeznek  $v_i$  szomszédaival, ekkor nem csak  $u_i, v_x$  és  $v_y$ , hanem  $v_i, v_x$  és  $v_y$  is egy háromszöget alkotna  $G_k$ -ban.

$\chi(G_{k+1}) \leq k+1$ : Legyen  $f: V(G_k) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  a  $G_k$  egy jószínezése.

$$c(x) = \begin{cases} f(v_i) & \text{ha } x = v_i \\ f(v_i) & \text{ha } x = u_i \\ k & \text{ha } x = w \end{cases} \quad \text{a } G_{k+1} \text{ egy jószínezése.}$$

$$\chi(G_{k+1}) > k$$

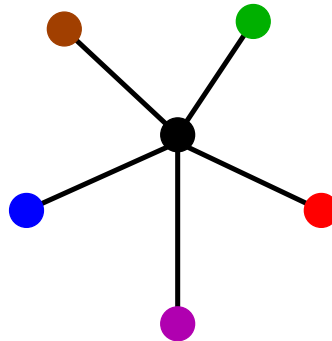
Tegyük fel indirekt, hogy  $\chi(G_{k+1}) = k$ ,  $c: V(G_{k+1}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  a  $G_{k+1}$  egy jószínezése. Legyen  $c(w) = k$ . Mivel  $w$  minden  $u_i$ -vel össze van kötve, az  $u_i$  pontok mindegyikére  $c(u_i) \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . Megadunk egy  $c'$  színezést a  $v_i$  pontok által feszített részgráfon. (Ez éppen  $G_k$ -val izomorf részgráf). Ha  $c(v_i) = k$ , akkor legyen  $c'(v_i) = c(u_i)$ , különben  $c'(v_i) = c(v_i)$ , vagyis a  $k$  színűeket színezzük át a „párjuk” színére.

$c'$  egy  $k-1$  színnel való jó színezése  $G_k$ -nak: Olyan élnek, amelyeknek egyik végpontja sem volt  $k$  színű, végpontjainak színét nem változtattuk meg. Tegyük fel, hogy  $c(v_i) = k$  és  $v_i$ -nek van egy olyan  $v_j$  szomszédja, amelyre  $c'(v_j) = c'(v_i)$ . Mivel  $c(v_j) \neq k$  (hiszen az eredeti színezés jó volt), ezért  $c'(v_j) = c(v_j)$ , másrészt  $c'(v_i) = c(u_i)$ . Így  $c(v_j) = c(u_i)$ , ami viszont ellentmondás, hiszen  $v_j$  és  $u_i$  szomszédosak  $G_{k+1}$ -ben, ha  $v_j$  és  $v_i$  szomszédosak  $G_k$ -ban.

## 4+1-szín tétel

**8. Tétel (5-szín tétel).** *Ha  $G$  síkbarajzolható gráf, akkor  $\chi(G) \leq 5$ .*

BIZONYÍTÁS Feltehető, hogy  $G$  egyszerű. Indukció a pontszámra. Legyen  $v$  egy legfeljebb 5 fokú pont  $G$ -ben.  $G - v$  5 színnel jólszínezzhető az indukciós feltétel szerint. Egyetlen baj:  $v$ -nek 5 szomszédja van, és azok mind különböző színűek. Legyen  $G$  síkba rajzolva, és legyenek a szomszédai az alábbi módon színezve.

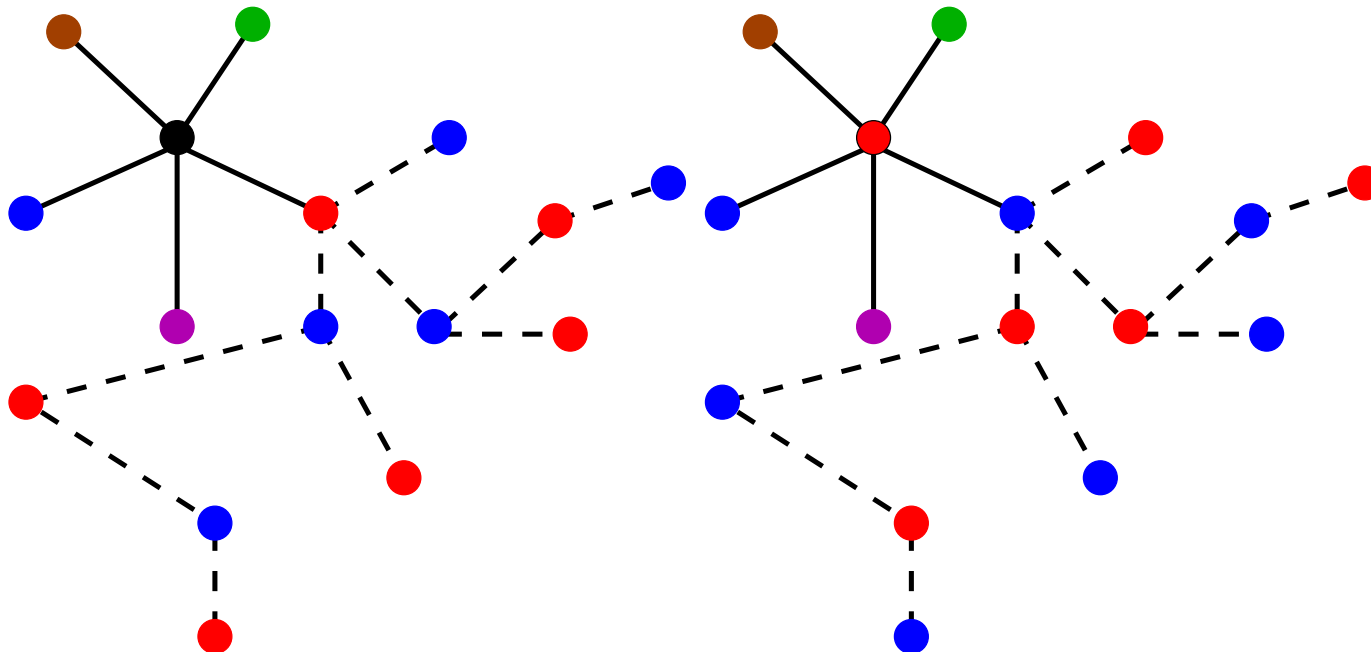


Ha ez nincs, akkor  $v$  megkaphatja azt a színt, ami nem szerepel a szomszédai közt.

## Átszínezés

Próbáljuk átszínezni a piros csúcsot kékre, annak kék szomszédait pirosra, majd így tovább.

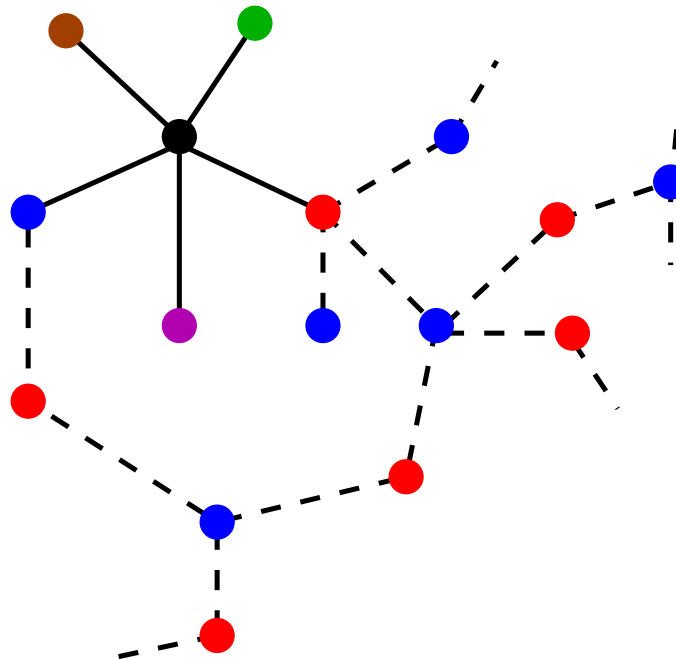
Ha ez sikerül, akkor  $v$  lehet piros.



## Akadály

$v$  kék szomszédját is át kéne színezni pirosra, mert van egy piros-kék út  $v$  két szomszédja közt.

Ekkor viszont a lila csúcs *be van kerítve* így ha abból indítunk egy lila-zöld színcserét, az nem érheti el  $v$  zöld szomszédját.



## 4-szín tétel

Appel és Haken [1977] bebizonyította a 4-szín tételt is, de bizonyításuk több száz oldalas, és felhasználtak hozzá számítógépes módszereket is.

**9. Tétel (4-szín tétel).** *Ha  $G$  síkbarajzolható gráf, akkor  $\chi(G) \leq 4$ .*



## Élkromatikus szám

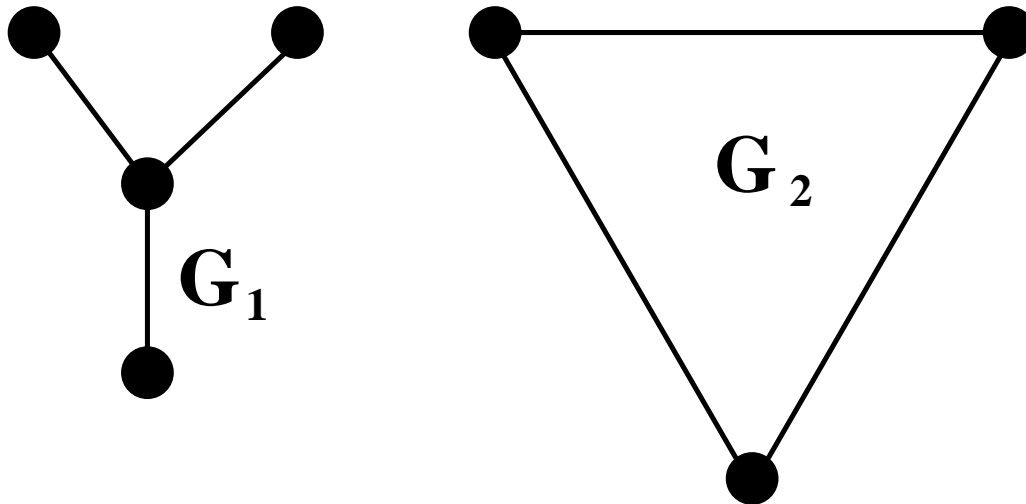
**10. Definíció.** Egy  $G$  gráf élei  $k$  színnel kiszínezhetők, *hogyha minden élet ki lehet színezni  $k$  szín felhasználásával úgy, hogy bármely két szomszédos él színe különböző legyen.*  $G$  élkromatikus száma  $\chi_e(G) = k$ , *ha  $G$  élei  $k$  színnel kiszínezhetők, de  $k - 1$  színnel nem.*

Az élkromatikus szám az *élgráf* kromatikus száma.

**11. Definíció.** A  $G = (V, E)$  gráf élgráfja az  $L(G)$  gráf, *melyre  $V(L(G)) = E$  és  $\{e_1, e_2\} \in E(L(G)) \iff e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ .*

**12. Állítás.**  $\omega(L(G)) \geq \Delta(G)$ . Ha  $G$  egyszerű és  $\Delta(G) \geq 3$ , akkor egyenlőség áll.

$$L(G_1) \simeq L(G_2)$$



**13. Állítás.**  $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ .

## Vizing-tétel

**14. Tétel (Vizing).** *Ha  $G$  egyszerű gráf, akkor  $\chi_e(G) \leq \Delta + 1$ .*

Annak eldöntése viszont **NP**-teljes, hogy egy adott gráfra  $\chi_e = \Delta$  vagy  $\chi_e = \Delta + 1$ .