

Bevezetés a Számításelméletbe II. 5. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

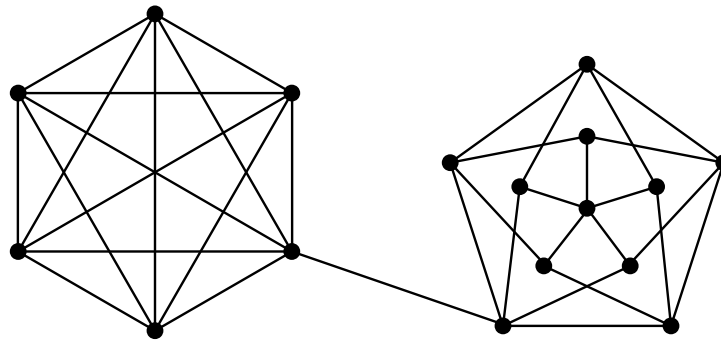
I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 március 12.

Perfekt gráfok

Egy gráf kromatikus száma és klikkszáma között általában nincs egyenlőség (sőt!) Érdekes (?) a gráf, ha $\chi(G) = \omega(G)$. Vegyünk egy tetszőleges gráfot. Tegyük mellé egy nagy teljes gráfot. $\implies \chi(G) = \omega(G)$ lesz. Össze is köthetjük egy éllel a két részt, hogy összefüggő legyen.



1. Definíció (Berge). Egy G gráf perfekt, ha $\chi(G) = \omega(G)$ és G minden G' feszített részgráfjára is teljesül, hogy $\chi(G') = \omega(G')$.

„Béla” gráfok

Általában olyan példáink vannak perfekkt gráfokra, hogy valamely „gráfosztály” minden tagja perfekkt. Rendszerint ez a gráfosztály zárt a feszített részgráf képzésre.

Legyen \mathcal{G} a Béla-gráfok osztálya. Tegyük fel, hogy egy Béla-gráf minden feszített részgráfja Béla.

2. Állítás. $\forall G \in \mathcal{G}$ *perfekkt* $\iff \forall G \in \mathcal{G}: \chi(G) = \omega(G)$.

Azaz nem kell külön foglalkoznunk a feszített részgráfokkal.

Béla-gráfnak fogjuk nevezni az olyan gráfokat, amire a fenti tulajdonság teljesül.

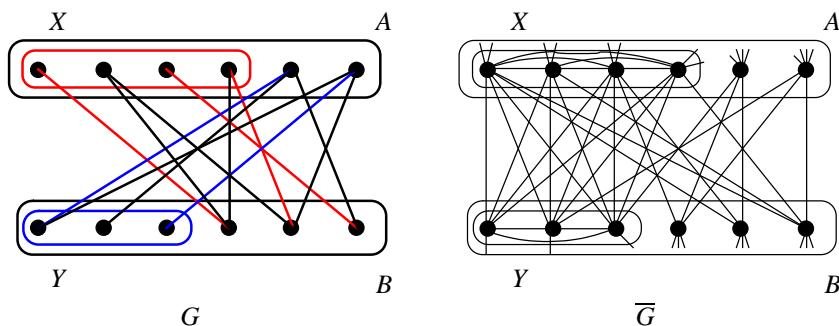
Példák

3. Tétel. *Minden páros gráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Páros gráf minden feszített részgráfja szintén páros gráf, azaz „páros az Béla”, \implies elég belátni, hogy minden $G = (A, B)$ páros gráfra $\chi(G) = \omega(G)$.

4. Tétel. *Minden G páros gráf \overline{G} komplementere perfekt.*

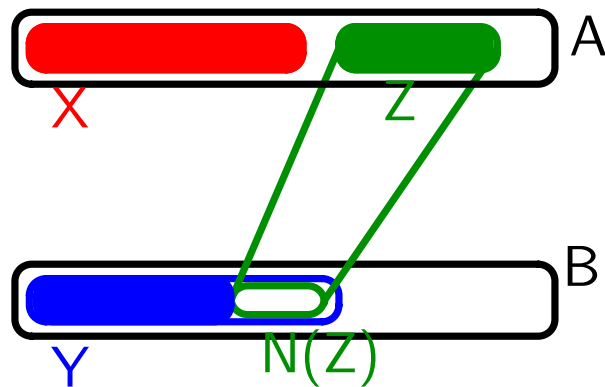
BIZONYÍTÁS Páros gráf komplementer az Béla (!) \implies elég belátni, hogy $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$, azaz hogy \overline{G} kiszínezhető $\omega(\overline{G})$ színnel.



$X \cup Y$ egy maximális méretű klikk \overline{G} -ben,

$X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$. ($X \cup Y$ a G gráfban egy független ponthalmazt alkot.)

Van G -ben párosítás, ami $A - X$ minden pontjához egy Y -beli pontot párosít: Ha nincs, Hall tétel szerint létezik egy olyan $Z \subseteq A - X$ ponthalmaz az $((A - X) \cup Y)$ által feszített páros gráfban, amelyre $|N(Z)| < |Z|$. Ekkor $(X \cup Z) \cup (Y - N(Z))$ egy $X \cup Y$ -nél nagyobb klikk \overline{G} -ben. (Üres G -ben.)



Hasonlóan, G -ben van párosítás, ami $B - Y$ -t X -be párosítja. Így \overline{G} -ben minden $(A - X) \cup (B - Y)$ -beli ponthoz rendeltünk egy vele nem szomszédos $X \cup Y$ -beli pontot. $X \cup Y$ pontjait kiszínezzük $\omega(\overline{G})$ színnel, minden további pontot kiszínezzhetünk úgy, hogy az előbb definiált párjának színét adjuk neki. Ez jó színezés, hiszen minden szín legfeljebb két ponton fordul elő és ezek biztosan nem szomszédos pontok.

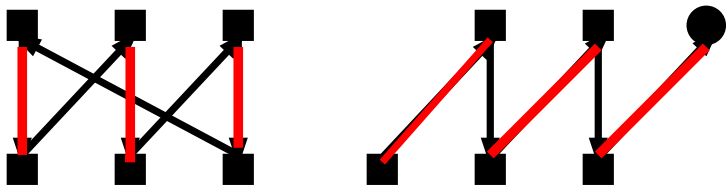
Példák II.

5. Tétel. 1. Páros gráf élgráfja perfekt. 2. Páros gráf élgráfjának komplementere perfekt.

BIZONYÍTÁS Páros gráf élgráfja és páros gráf élgráfjának komplementere az Béla.

1. Elég tehát, hogy $\Delta(G) = \chi_e(G)$. ($\Delta(G) = \omega(L(G))$, $\chi_e(G) = \chi(L(G))$) Indukció $\Delta(G)$ -re: $\Delta(G) = 1$ esetén G csupa független élből áll \implies egy színnel élszínezhető. Legyen D a Δ fokú pontok halmaza G -ben, $D' = D \cap A$, $D'' = D \cap B$. D' és D'' külön-külön teljesíti a Hall-feltételt (!).

D' bepárosítható B -be, D'' A -ba. Irányítsuk a párosítások éleit D' -ből B -be, illetve D'' -ből A -ba. Ekkor (páros) irányított körök és irányított utak keletkeznek(minden d -beli pont kifoka 1, minden pont befoka legfeljebb 1). A körök és utak minden második élét véve egy M párosítást kapunk, amelyik D minden pontját lefedi.



$\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$, alkalmazható az indukciós feltétel, $\Delta(G) - 1$ színnel élszínezzhetők, az M -beli éleket pedig a $\Delta(G)$ -ik színnel színezzük.

2. Elég látni, hogy $\chi(\overline{L(G)}) = \omega(\overline{L(G)})$.

Ezt már tudjuk, csak le kell fordítani!

$\omega(\overline{L(G)})$: a legnagyobb klikk mérete $\overline{L(G)}$ -ben, azaz a legnagyobb *független ponthalmaz* mérete $L(G)$ -ben, legnagyobb *független élhalmaz* mérete G -ben. $\implies \omega(\overline{L(G)}) = \nu(G)$.

$\chi(\overline{L(G)})$: minimális számú független ponthalmaz (színosztály) amivel $\overline{L(G)}$ minden pontja lefedhető = minimális számú *klikk* amivel $L(G)$ minden pontja lefedhető. Klikk $L(G)$ -ben = egy csúcsra illeszkedő élek G -ben $\implies \chi(\overline{L(G)}) = \tau(G)$.

A 2. állítás tehát nem egyéb, mint *König tétele*: $\chi(\overline{L(G)}) = \tau(G) = \nu(G) = \omega(\overline{L(G)})$.

Részben rendezett halmazok

6. Definíció. Legyen X egy (véges) halmaz. Az X a \preceq relációval részben rendezett halmaz, ha

1. $\forall x \in X: x \preceq x$: *reflexív*
2. $\forall x, y \in X: x \preceq y$ és $y \preceq x \implies x = y$: *antiszimmetrikus*
3. $\forall x, y, z \in X: x \preceq y$ és $y \preceq z \implies x \preceq z$ *tranzitív*.

Példák:

- $\mathbb{N}, (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ a szokásos \leq relációval.
- $X = \{1, 2, \dots, n\}, x \preceq y \iff x$ osztja y -t.
- $X = \mathcal{P}(A)$ az A részhalmazainak halmaza. $x \preceq y \iff x \subseteq y$.
- Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész, $X = \{I_1, I_2, \dots\}$. $I_j \preceq I_k \iff b_j < a_k$ vagy $j = k$, azaz $j \neq k$ esetén I_j teljesen balra van I_k -tól. Az ilyen részben rendezést *intervallum rendezésnek* nevezzük.

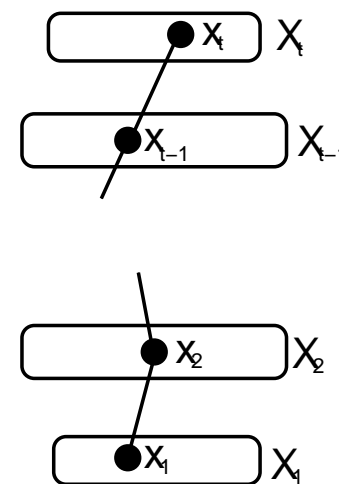
Összehasonlítási gráfok

7. Definíció. Legyen $P = (X, \preceq)$ egy (véges) részben rendezett halmaz. A $G = (V, E)$ gráf a P összehasonlítási gráfja, ha $V = X$ és $\{x, y\} \in E \iff x \preceq y$ vagy $y \preceq x$.

8. Tétel. Minden véges összehasonlítási gráf perfekt.

BIZONYÍTÁS Összehasonlítási gráf az Béla.

Legyen $G = (V, E)$ gráf a $P = (X, \preceq)$ összehasonlítási gráfja. Rekurzíve definiáljuk az $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ felbontást. $X_1 = \min P$, a P minimális elemeinek halmaza. Ha X_1, X_2, \dots, X_k már adott, akkor $X_{k+1} = \min(P - \cup_{i=1}^k X_i)$. Ha $x, y \in X_i$, akkor $x \not\preceq y$ és $y \not\preceq x \implies$ A G gráfban X_i független ponthalmaz. Ha $x_i \in X_i$, akkor van $x_{i-1} \in X_{i-1}$, hogy $x_{i-1} \preceq x_i$. \implies Létezik egy lánc $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_t$. Az $A = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ klikk a G gráfban, \preceq tranzitivitása miatt. $\implies t \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq t$.



Perfekt Gráf Tétel

9. Tétel (Lovász). *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.*

10. Definíció. *Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ korlátos zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek p_1, p_2, \dots egy G gráf pontjai és $\{p_i, p_j\}$ akkor és csak akkor legyen él G -ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat intervallumgráfoknak nevezzük.*

11. Következmény. *Minden intervallumgráf perfekt.*

BIZONYÍTÁS Az adott intervallum rendszerhez tartozó intervallum gráf komplementere pont az ugyanahhoz a rendszerhez tartozó intervallum rendezés összehasonlítási gráfja.

HÁZI FELADAT Milyen állítást kapunk, ha tetszőleges összehasonlítási gráfra alkalmazzuk Lovász tételelét? Azaz mi lesz a komplementer klikkszáma és kromatikus száma?

Lovász erősebb tétele

12. Tétel (Lovász). *Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden G' feszített részgrájára teljesül, hogy $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.*

Megjegyzések

1. Ebből a tételből következik a Perfekt Gráf Tétel, ugyanis $\alpha(\overline{G'}) = \omega(G')$ és $\omega(\overline{G'}) = \alpha(G')$, valamint $|V(G')| = |V(\overline{G'})|$.
2. A Perfekt Gráf Tétel ekvivalens avval, hogy „Ha G perfekt, akkor a komplementere is perfekt.”

Gasparian-féle bizonyítás

Minden gráfra igaz, hogy $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V(G)|$: $\chi(G)$ darab egyenként legfeljebb $\alpha(G)$ méretű színosztály le kell tudja fedni az egész $V(G)$ szögponthalmazt. Ha G perfekt és G' feszített részgráfja, akkor $\omega(G') = \chi(G') \implies \alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$.

Azt kell tehát látni, hogy ha $\alpha(G') \cdot \omega(G') \geq |V(G')|$ egy gráf minden feszített részgráfjára teljesül, akkor a gráf szükségképpen perfekt.

Egy gráf *imperfekt*, ha nem perfekt. G *minimális imperfekt gráf*, ha ő maga nem perfekt, de minden valódi feszített részgráfja az. Minden imperfekt gráf tartalmaz minimális imperfekt gráfot feszített részgráfként.

Azt fogjuk igazolni, hogy ha G minimális imperfekt gráf, akkor $\alpha(G) \cdot \omega(G) < |V(G)|$.

A bizonyítás 1. Lemmája

13. Lemma. *Ha G minimális imperfekt gráf, akkor csúcsainak tetszőleges $A \subset V(G)$ független halmazára $\omega(G - A) = \omega(G)$.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel indirekt, hogy $\omega(G - A) < \omega(G)$. G minimális imperfekt $\implies G - A$ perfekt $\implies \chi(G - A) = \omega(G - A)$. Viszont $\chi(G) \leq \chi(G - A) + 1$, mert A -beli pontok egy újabb színnel színezhetők. $\implies \chi(G) \leq \chi(G - A) + 1 = \omega(G - A) + 1 \leq \omega(G)$.

Tehát G maga is perfekt, hiszen nemcsak minden részgráfja, hanem ő maga is kiszínezhető annyi színnel, amennyi a benne levő legnagyobb klikk mérete, ellentmondás.

A bizonyítás 2. Lemmája

14. Lemma. Legyen G minimális imperfekt gráf. G függetlenségi számát jelölje α , klikkszámát ω , Ekkor megadható G független halmazainak egy $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ és klikkjeinek egy $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha \cdot \omega}$ rendszere úgy, hogy

1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és
2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.

BIZONYÍTÁS Legyen $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_\alpha\}$ egy tetszőleges maximális méretű független halmaz G -ben. $G - \{a_1\}$ perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. $\implies G - \{a_1\}$ ω színnel jól színezhető, legyenek ennek a színezésnek a színosztályai $A_1, A_2, \dots, A_\omega$. Általánosságban legyenek $A_{(i-1) \cdot \omega + 1}, A_{(i-1) \cdot \omega + 2}, \dots, A_{i \cdot \omega}$ a $G - \{a_i\}$ perfekt gráf egy optimális színezésének színosztályai. Ha $0 \leq j \leq \alpha \cdot \omega$, akkor a $G - A_j$ gráf perfekt, és az 1. Lemma szerint ω a klikkszáma. Legyen B_j a $G - A_j$ gráf egy rögzített ω méretű klikkje.

B_j definíciója miatt $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$. Belátjuk, hogy $i \neq j$ esetén $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. $|A_i \cap B_j| = 1$, hiszen egy klikknek és egy független halmaznak legfeljebb egy közös pontja lehet.

Egy ω méretű klikkbe ω színnel történő színezésekor fellépő színosztályok mindegyike belemetsz.

Tekintsünk egy B_i -t.

$A_0 \cap B_i = \emptyset$ Ekkor B_i minden $G - \{a_k\}$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztály belemetsz, azaz $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ minden $j \neq 0$ -ra.

$A_0 \cap B_i = \{a_k\}$ B_i minden $G - \{a_j\}$ $j \neq k$ gráfban ω méretű klikk, minden színosztályt metsz. A $G - \{a_k\}$ gráfban $\omega - 1$ méretű klikk lesz, azaz *egy kivételével* minden színosztályt metsz. Vagyis az $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha \cdot \omega}$ független halmazok közül B_i ismét csak pontosan egytől lehet diszjunkt, ez pedig akkor csakis az az A_i lehet, aminek párjául választottuk.

A bizonyítás 3. Lemmája

15. Lemma. *Legyenek A_1, A_2, \dots, A_m és B_1, B_2, \dots, B_m egy n elemű halmaz részhalmazai, melyekre teljesül, hogy*

- 1. $\forall i: A_i \cap B_i = \emptyset$ és*
- 2. $\forall i \neq j: |A_i \cap B_j| = 1$.*

Ekkor $m \leq n$.

BIZONYÍTÁS Legyen \mathbb{A} az az $m \times n$ -es mátrix, amelynek sorai az A_i halmazok ún. karakterisztikus vektorai. Ez annyit jelent, hogy e mátrix i -edik sorának j -edik eleme 1, ha az alaphalmaz j -edik eleme benne van A_i -ben, és 0, ha nincs. Például, ha $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ és $n = 3$, akkor $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hasonlóan, legyen \mathbb{B} az az $n \times m$ méretű mátrix, melynek oszlopai a B_i halmazok karakterisztikus vektorai.

$\mathbb{D} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ $m \times m$ -es mátrix i -edik sorának j -edik eleme éppen $|A_i \cap B_j|$.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbb{D} teljes rangú: $\det \mathbb{D} = (-1)^{m-1}(m-1)$

$m = \text{rang}(\mathbb{D}) \leq \text{rang}(\mathbb{B})$. (Lásd előző félév!) Mivel \mathbb{B} $n \times m$ -es, ezért $m \leq \text{rang}(\mathbb{B})$ csak úgy lehet, ha $m \leq n$.

A Tétel bizonyításának befejezése

Ha G minimális imperfekt gráf, akkor a 2. Lemma szerint létezik G csúcshalmazának két olyan, egyenként $\alpha \cdot \omega + 1$ méretű részalmazrendszere, amely kielégíti a 3. Lemma részalmazrendszereire vonatkozó feltételt.

Alkalmazhatjuk tehát a 3. Lemmát m helyébe $\alpha \cdot \omega + 1$ -et, n helyébe $|V(G)|$ -t írva.

Azt kaptuk tehát, hogy minimálisan imperfekt G gráfra $\alpha(G)\omega(G) + 1 \leq |V(G)|$. Pontosan ennyi hiányzott a bizonyítás befejezéséhez, ezzel tehát készen vagyunk.



Erős perfekt gráf sejtés

Nem perfekt egy legalább öt hosszú páratlan kör, hiszen ebben a maximális klikk mérete 2, viszont kromatikus száma 3. Az előbbi tétel szerint a legalább öt hosszú páratlan körök komplementerei sem perfektek. A definícióból így rögtön következik, hogy nem perfekt egy olyan gráf sem, amiben van egy páratlan kör vagy komplementere feszített részgráfként.

Berge azt sejtí, hogy ez az egyetlen akadály:

16. Sejtés (Erős perfekt gráf sejtés). *Egy G gráf akkor és csak akkor perfekt, ha sem G , sem \overline{G} nem tartalmaz feszített részgráfként legalább öt hosszú¹ páratlan kört.*

¹Hiba a jegyzetben!!