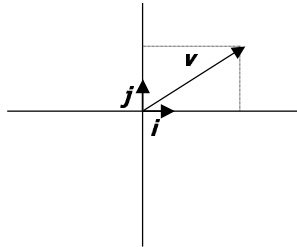
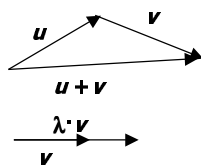


Síkgeometria

x, y koordináta-rendszerben: $\mathbf{v} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$

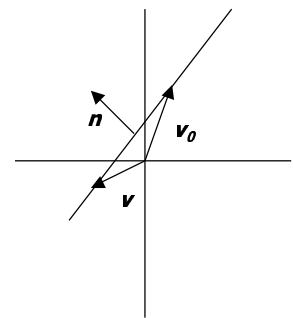
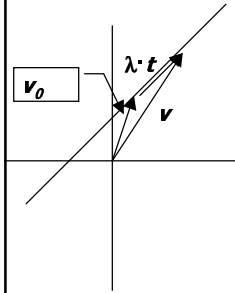


vektorok összeadhatók,
skalárral szorozhatók



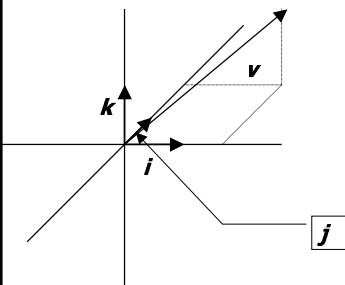
Egyenes egyenlete: irányvektorral $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \lambda \cdot \mathbf{t}$

normálvektorral $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$



Térgeometria

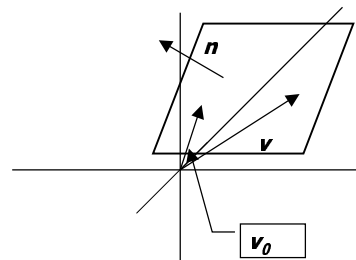
x, y, z koordináta-rendszerben: $\mathbf{v} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$



Egyenes egyenlete: irányvektorral $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \lambda \cdot \mathbf{t}$

~~normálvektorral $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$~~

normálvektorral $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$: Sík egyenlete.



Két dimenzió: sík

Mi a vektorok lényege?

Három dimenzió: tér

összeadhatók, skalárral szorozhatók

Több dimenzió?

Síkban: \mathbf{i} és \mathbf{j} -vel egyértelműen kifejezhetők

Térben: \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} -val egyértelműen kifejezhetők



Lineáris tér

Vektorterek

T : kommutatív test ($\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{F}_p, \mathbf{C}$) \mathbf{R} : valós számok

\mathbf{C} : komplex számok

\mathbf{Q} : racionális számok

\mathbf{F}_p : modulo p maradékosztályok

V : tetszőleges nemüres halmaz

Axiómák:

(Ö1) A V halmazon értelmezett az összeadás: $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ létezik $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ egyértelműen.

(Ö2) Az összeadás asszociatív: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(Ö2) Az összeadás kommutatív: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(Ö3) Létezik nullelem: azaz van $\mathbf{0} \in V$, minden $\mathbf{v} \in V$ -re $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(Ö4) Minden elemnek létezik ellentettje, azaz bármely $\mathbf{v} \in V$ -re van olyan $-\mathbf{v} \in V$ melyre $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$

A sík illetve térvektorokra (Ö) - (Ö4) teljesül.

(S) A T test és a V halmaz elemei között értelmezve van egy skalárral való szorzás: $\lambda \in T$ és $v \in V$ létezik egyértelműen egy V -beli elem, amit λv -nek hívunk.

(S1) Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $v \in V$ esetén

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

(S2) Bármely $\lambda \in T$ és $u, v \in V$ esetén

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

(S3) Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $v \in V$ esetén

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$$

(S4) Bármely $v \in V$ -re

$$1v = v$$

➤ Az összeadás szokásos művelet, azaz egy $V \times V \rightarrow V$ függvény.

➤ A skalárral való szorzás egy *összérő* művelet, azaz egy $T \times V \rightarrow V$ függvény.

Példák

➤ Az origóból kiinduló sík illetve térvektorok vektor teret alkotnak, $T = \mathbb{R}$.

➤ A $k \times n$ -es valós mátrixok a valós számtest felett, művelet a mátrixok szokásos összeadása, illetve skalárral való szorzása.

➤ $V = \mathbb{R}, T = \mathbb{Q}; V = \mathbb{C}, T = \mathbb{R}$ (vagy \mathbb{Q})

➤ Az összes valós számon értelmezett valós értékű függvények a valós számtest felett a szokásos műveletekre:

$$f + g: x \mapsto f(x) + g(x) \quad \lambda f: x \mapsto \lambda f(x)$$

➤ $\mathbb{R}[x]$: A valós együtthatós polinomok a valós test felett a szokásos műveletekre nézve.

A vektortér axiómák következményei

A nullvektor (0) és minden vektor ellentettje egyértelmű, kivonás elvégezhető. (S1)-(S3) formálisan asszociativitásra, illetve disztributivitásra hasonlít, így a műveleteknél a megszokott szabályok alkalmazhatók, pl. *több tag szorzása több taggal*.

Tétel

- (i) Bármely $\lambda \in T$ -re $\lambda 0 = 0$
- (ii) Bármely $v \in V$ -re $0v = 0$, ahol 0 a T test nulleleme
- (iii) Bármely $v \in V$ -re $(-1)v = -v$, ahol -1 a test egységelemének az ellentettje.
- (iv) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$

Bizonyítás

(i): (Ö3) $\Rightarrow v + 0 = v \Rightarrow \lambda(v + 0) = \lambda v$ (S2) $\Rightarrow \lambda v + \lambda 0 = \lambda v \Rightarrow -(\lambda v) + (\lambda v + \lambda 0) = -(\lambda v) + \lambda v$ (Ö1, Ö4) $\Rightarrow -(\lambda v) + \lambda 0 = 0$

Altér

Definíció

Egy T test feletti V vektortér egy nemüres $W \subseteq V$ részhalmazát altérnek nevezünk V -ben, ha W maga is vektortér ugyanazon T felett ugyanazokra a V -beli vektorműveletekre nézve. Jelölésben: $W \leq V$.

Tehát W részstruktúra V -ben.

Tétel

Egy T test feletti V vektortérben a W nemüres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

- (i) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$
- (ii) $v \in W, \lambda \in T \Rightarrow \lambda v \in W$

Tehát egy részhalmaz altér \Leftrightarrow zárt a V -beli műveletekre nézve.

Bizonyítás

Ha W altér, akkor (i) és (ii) nyilván igaz.

Ha (i) és (ii) teljesülnek, akkor (Ö1), (Ö2), (S1)-(S4) azonosságok teljesülnek, mert azok V minden elemére igazak, speciálisan W -beliekre is. Az kell még, hogy W -ben van nullelem és minden elemnek van ellentettje.

Legyen $v \in W$ tetszőleges ekkor (ii) miatt $0 = 0v \in W$.

Ellentett: $-v = (-1)v \in W$

Példák

- Triviális alterek: az egész tér, illetve $\{0\}$
- Origón átmenő egyenes, illetve sík vektorai.
- Bármely vektortérben egy adott vektor skalárszorosai
- $\mathbb{R}[x]$ -ben a legfeljebb harmadfokú (k -ad fokú) polinomok.
- $V = \mathbb{C}, T = \mathbb{R}$ altere $W = \mathbb{R}, T = \mathbb{R}$

Generálás

Definíció

Legyen $a_1, \dots, a_n \in V, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in T$. A $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ vektort az a_i vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

Síkban két nem egyenesbe eső, térben három nem egy síkba eső vektor lineáris kombinációjaként minden vektor előáll.

Definíció

Az $a_1, \dots, a_n \in V$ vektorokat a V vektortér generátorrendszerének nevezzük, ha V minden eleme előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Definíció

Az $a_1, \dots, a_n \in V$ vektorok által generált altéren az a_i vektorok összes lineáris kombinációjának halmazát értjük. Jelölés: $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Tétel

$U = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ az \mathbf{a}_i vektorokat tartalmazó legszűkebb altér, azaz

- (i) U altér
- (ii) $\mathbf{a}_i \in U$
- (iii) ha W altér és $\mathbf{a}_i \in W$ $i=1,2,\dots,n$, akkor $U \subseteq W$.

Bizonyítás

(i): egyszerű számolás.

(ii): $\lambda_i = 1, \lambda_j = 0$ $i \neq j$ skalárokkal képzett lineáris kombináció adja \mathbf{a}_i -t.

(iii): Ha egy W altér tartalmazza az \mathbf{a}_i vektorokat, akkor ezek skalárszorait is, majd azok összegeit is, tehát minden lineáris kombinációját is tartalmaznia kell.

A generált alteret szokás az (i)-(iii) tulajdonságokkal is definiálni.

Definíció

Legyenek W és Z alterek a V vektortérben. A $\langle W, Z \rangle = \{ \mathbf{w} + \mathbf{z} \mid \mathbf{w} \in W, \mathbf{z} \in Z \}$ alteret a W és Z által generált altérnek nevezzük. Jelölés $W + Z$.

Ez éppen a két alteret tartalmazó legszűkebb altér.

Tétel

Legyenek W és Z alterek a V vektortérben. A $\langle W, Z \rangle$ elemeinek $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ alakban történő előállítása egyértelmű akkor és csak akkor, ha $W \cap Z = \mathbf{0}$.

Bizonyítás

Ha $W \cap Z = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x} \in \langle W, Z \rangle$ -re létezik két különböző előállítás:

$$\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_1 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{z}_2 \text{ ahol } \mathbf{w}_i \in W \text{ és } \mathbf{z}_i \in Z \text{ akkor}$$

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1$$

Bal oldal W -beli, a jobboldal Z -beli, azaz a metszetből van, ami $\mathbf{0}$

Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{u} \in W \cap Z$. Ekkor $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ két különböző felírás lenne, ha \mathbf{u} nem a nullvektor.

A $W \cap Z = \mathbf{0}$ esetben a két alteret diszjunktak nevezzük. Ilyen alterek esetén a $\langle W, Z \rangle$ alteret a két altér direkt összegének nevezzük, jelben $W \oplus Z$.

Példa

Legyen W az i és j vektorok által feszített sík (az x, y -sík), Z pedig a k vektor egyenese (z -tengely). Ekkor $W \oplus Z$ a teljes (3-dimenziós) tér.

$$x^3 + 7x^2 + 5x \in \langle x^3 + 2x, 3x^3 + 4x, 5x^2 + 6x \rangle.$$

$$x^3 = 3x^3 + 4x - 2(x^3 + 2x) \quad x = \frac{1}{2}(3(x^3 + 2x) - (3x^3 + 4x))$$

$$x^2 = ((5x^2 + 6x) - 6(x))/5$$

Végtelen sok vektor generátuma

Probléma: végtelen sok vektor összegét nem tudjuk értelmezni.

Definíció

Legyen H a T test feletti V vektortér tetszőleges nemüres részhalmaza. Ekkor az általa generált $\langle H \rangle$ altér a H elemiből képzett összes véges, de tetszőlegesen hosszú lineáris kombinációt értjük.

Megmutatható az előzőekhez hasonlóan, hogy $\langle H \rangle$ a H -t tartalmazó legszűkebb altér. H generátor rendszer, ha $\langle H \rangle = V$.

Így minden vektortérnek létezik generátor rendszere, mert például $\langle V \rangle = V$.

Vigyázat!! Szemlélet csalóka!!

A valós együtthatós polinomok vektorterében az $1, x, x^2, x^3, \dots$ polinomok generátor rendszert alkotnak.

DE

A valós számsorozatok szokásos vektorterében NEM alkotnak generátor rendszert azok a sorozatok, amelyek egyetlen tagja 1, a többi pedig 0, mert például a csupa 1-es sorozat nem áll elő ilyenek véges lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{a} = a_1, a_2, a_3, \dots \quad \mathbf{b} = b_1, b_2, b_3, \dots \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots$$
$$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots$$

Lineáris függetlenség

Egy lineáris kombináció nem triviális, ha van benne olyan skalár együttható, ami nem 0. Egyébként triviális. Világos, hogy egy triviális lineáris kombináció a nullvektort adja.

Definíció

Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ V -beli vektorok lineárisan összefüggők, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ T -beli skalárok, melyek nem mind 0-k, és

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$$

Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ V -beli vektorok lineárisan függetlenek ha $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$ CSAK úgy valósulhat meg, ha mindegyik $\lambda_i = 0$.

Példa

Egyetlen u vektor lineárisan független ha nem a nullvektor. Két vektor független akkor és csak akkor, ha az egyik nem skalárszorosa a másiknak. (!! három esetén ez már nem igaz)

Síkban tetszőleges három vektor összefüggő.

x^3+7x^2+5x , x^3+2x , $3x^3+4x$, $5x^2+6x$ összefüggők mind a valós, mind a racionális, továbbá a komplex számok felett.

Az összefüggőség változhat attól függően, hogy melyik test feletti vektortérből valóknak tekintjük a vektorokat. Például, $1+i$ és $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ függetlenek a racionális számtest felett tekintve a komplex számokat, de összefüggők ha a valós számtest felett tekintjük a komplex számok vektorterét.

Tétel

I. Ha egy legalább kételemű lineárisan független rendszerből elhagyunk egy tetszőleges elemet, akkor a maradék vektorok is lineárisan független rendszert alkotnak.

II. Ha egy lineárisan összefüggő rendszerhez egy tetszőleges vektort hozzáveszünk, akkor újra összefüggő rendszert kapunk.

III. Egy legalább kételemű vektor rendszer akkor és csak akkor összefüggő, ha van benne olyan vektor, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.

IV. Ha u_1, u_2, \dots, u_m lineárisan független, de az u_{m+1} hozzávételével kapott rendszer összefüggő, akkor u_{m+1} előáll az u_1, u_2, \dots, u_m vektorok lineáris kombinációjaként.

V. Tegyük fel, hogy valamely v előáll az u_1, u_2, \dots, u_m vektorok lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás akkor és csak akkor egyértelmű, ha u_1, u_2, \dots, u_m lineárisan függetlenek.

Bizonyítás

Vegyük észre, hogy I. és II. ekvivalensek. II.-t láthatjuk, ha az összefüggő rendszer nem triviális nullvektort adó lineáris kombinációjához a hozzáadott vektort 0 együtthatóval vesszük hozzá.

III. A nem triviális lineáris kombinációban nem 0 együtthatóval szereplő vektor könnyen láthatóan kifejezhető a többi kombinációjaként.

IV. Vegyük észre, hogy a kibővített rendszerben az u_{m+1} vektor nem nulla együtthatóval kell szerepeljen.

V. Ha az u_1, u_2, \dots, u_m vektorok összefüggők, akkor v kifejezéséhez tetszőleges nullvektort adó nem triviális lineáris kombinációjuk hozzáadható, így a kifejezés nem egyértelmű. Ha viszont van legalább két különböző kifejezés v -re, akkor ezek különbsége egy nem triviális lineáris kombináció, ami a nullvektort adja.

Bázis

Definíció

Bázison egy lineárisan független generátorrendszert értünk.

Tétel

Egy u_1, u_2, \dots, u_m generátorrendszer akkor és csak akkor bázis, ha a vektortér minden eleme egyértelműen áll elő az u_1, u_2, \dots, u_m vektorok lineáris kombinációjaként.

Csak véges bázisokat tekintünk.

Tétel

Egy vektortérben bármely két bázis azonos elemszámú.

Tétel

Legyen f_1, f_2, \dots, f_n lineárisan független és legyen g_1, g_2, \dots, g_k generátorrendszer egy V vektortérben. Ekkor $n \leq k$.

Bizonyítás I. (nem törzsanyag ...)

Indirekt, tegyük fel $n > k$.

$$f_1 = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{k1}g_k$$

$$f_2 = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{k2}g_k$$

$$\vdots$$

$$f_n = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{kn}g_k$$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = \lambda_1(a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{k1}g_k) + \dots$$

$$+ \lambda_n(a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{kn}g_k) =$$

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n})g_1 + \dots + (\lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \dots + \lambda_n a_{kn})g_k$$

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} = 0$$

$$\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \dots + \lambda_n a_{kn} = 0$$

Homogén lineáris egyenletrendszer a λ_i -re. Mivel $n > k$ van nem triviális megoldása, azaz az f_i vektoroknak is van nem triviális kombinációja, ami a nullvektor, ami ellentmondás.

Bizonyítás II. (Ez viszont törzsanyag!)

Kicsérélési Tétel

Legyen f_1, f_2, \dots, f_n lineárisan független és legyen g_1, g_2, \dots, g_k generátorrendszer egy V vektortérben. Ekkor bármely f_i hez van olyan g_j hogy

$$f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, g_j, f_{i+1}, \dots, f_n$$

is lineárisan független rendszer.

Kicsérélési Tétel bizonyítása

Indirekt, f_i -et nem lehet kicsérlni. Ekkor f_1, \dots, f_n -hez egyik g_j sem vehető hozzá, azaz mind kifejezhető f_1, \dots, f_n -ből. Így minden lineáris kombinációjuk is, de g_1, g_2, \dots, g_k generátorrendszer, így minden vektor kifejezhető velük, tehát f_1, \dots, f_n -vel is. Speciálisan f_i is, ami ellentmondás.

Tétel

Egy vektortér bármely véges generátorrendszere tartalmaz bázist.

Bizonyítás

Ha a generátorrendszer független, akkor bázis is. Ha nem, van olyan eleme, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Könnyen látható, hogy ezt elhagyva, újra generátorrendszert kapunk.

Tétel

Ha egy V vektortérnek van véges generátorrendszere, akkor bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Ha a független rendszer generátorrendszer is, akkor bázis. Ha nem, akkor van olyan v vektor, ami nem fejezhető ki belőle, ezt hozzávéve továbbra is független rendszert kapunk.

Dimenzió

Definíció

Egy V vektortér dimenzióján egy bázisnak elemszámát értjük. Ha a vektortérnek nincs véges generátorrendszere, akkor a dimenziója végtelen. a 0 tér dimenziója 0. Jelölés $\dim V$.

A sík vektorainak dimenziója 2, a „közönséges tér” dimenziója 3.

\mathbb{C} dimenziója a valós számtest felett 2. Bázis: $\{1, i\}$.

\mathbb{C} dimenziója a racionális számtest felett végtelen.

Tétel

Legyen V nem nulla vektortér, n pozitív egész. Az alábbiak ekvivalensek:

- (i) $\dim V = n$
- (ii) V -ben található n független vektor, de bármely $n+1$ összefügg
- (iii) V -ben található n elemű generátorrendszer, de $n-1$ elemű nem.

Tétel

Legyen n pozitív egész és legyen $\dim V = n$. Ekkor V -ben bármely n elemű {független rendszer, generátorrendszer} bázist alkot.

Tétel

I. Legyen W altér V -ben. Ekkor $\dim W \leq \dim V$.

II. Ha V véges dimenziós, W altér V -ben és $\dim W = \dim V$, akkor $W = V$.

Bizonyítás

W -beli független rendszer V -ben is független.