

Végtelen halmazok

Végtelen számosságok

Halmazok

→ Alapfogalom, nem definiáljuk.

→ Georg Cantor: „Dolgok egészként érzékelhető, elgondolható összessége.”

→ Bármilyen dologról egyértelműen eldönthető, hogy eleme-e egy adott halmaznak.

Példa

$A = \{\text{IB026-os terem, Lánchíd, „tök ulti”}\}$

$B = \{\text{77-tel osztható pozitív egészek}\}$

$C = \{\text{Ikerprímek}\}$

Felsorolás

Tulajdonság

Végtelen?

$X = \{\text{Életem legbosszantóbb emlékei}\}$

$Y = \{\text{Csinos magyar nők, sármos magyar férfiak}\}$

$Z = \{\text{Finom ételek}\}$

Nem halmazok!

$O = \{\text{Összes halmazok}\} ???$

Ha X egy halmaz, akkor vagy $X \in X$, vagy $X \notin X$. Legyen

$B = \{X : X \notin X\}$

Igaz-e, hogy $B \in B$?

• Ha $B \in B$, akkor B definíciója miatt $B \notin B$.

• Ha viszont $B \notin B$, akkor önmaga elemének kell lennie, azaz $B \in B$, ellentmondás.

Másképpen: A falu borbélyja az az ember, aki csak azokat borotválja, akik maguk nem borotválkoznak. Borotválkozik-e a borbély?

• Ha nem, akkor ő olyan ember, aki maga nem borotválkozik, tehát meg kell hogy borotválja.

• Ha igen, akkor nem szabad, hogy a borbélyt megborotválja, mert az borotválkozik maga...

Közönséges halmaz, ha nem eleme önmagának. Például a természetes számok halmaza.

Nem közönséges halmaz, ha eleme önmagának. Például a $B = \{\text{Absztrakt fogalmak}\}$ eleme önmagának, mert B is absztrakt fogalom.

Tekintsük csak a közönséges halmazokat. (Biztos ami biztos) Legyen ezek halmaza az U halmaz. U az közönséges, vagy nem?

• Ha közönséges, akkor benne van U -ban, azaz $U \in U$, ami ellentmondás.

• Ha nem közönséges, akkor $U \notin U$ kell legyen, de mivel U elemei a közönséges halmazok, ez ellentmondás.

Ellentmondásos a matematika?

Nem. Csak a kiinduló feltételünk volt hamis: Az összes halmazok együttese nem halmaz, illetve az összes közönséges halmazok együttese sem halmaz.

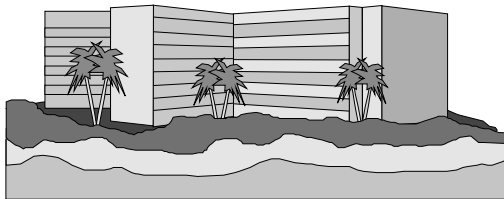
Halmaznak azt tekintjük, ami a halmazelmélet axióma rendszerét kielégíti.

Tétel

Az összes halmazok összessége, illetve az összes közönséges halmazok összessége nem alkot halmazt.

Furcsa esetek a Hotel Kozmoszban

A (távoli) jövőben, 20001-ben a konferenciák annyira elszaporodtak, hogy a szállodai kapacitások elégtelenek lettek, még az 1 000 000 férőhelyes szállodák is állandóan tele voltak. Ezért felépítették a a végtelen sok szobás Hotel Kozmoszt.



1. Nap

Java programozók megtöltötték a szállodát: végtelen sokan jöttek.

Este újabb vendég: Hová szállásolják?

A szálloda rendszergazdája rájött a megoldásra: minden vendég költözzön át az eggyel nagyobb sorszámú szobába, ekkor az 1-es szoba kiürül, az új vendégnek kiadható.



2. nap

Megérkezett 1000 újabb Java programozó, akik lemaradtak az előző napi hiperűr-járatról.

Vajon most mit javasolt a rendszergazda?

3. nap

Teljes káosz!! Megjelentek a C++ programozók, ők is végtelen sokan...

A rendszergazda állta a sarat: újabb elhelyezési tervet kovácsolt. Az 1-es szoba lakója a 2-esbe, a 2-es lakója a 4-esbe, ..., n -ik szoba lakója a $2n$ -ikbe, ... költözzön át.

Így minden páratlan sorszámú szoba üresen maradt, ezekből is végtelen sok volt, azaz a C++ programozók is elfértek.

4. nap

A Java programozók konferenciája véget ért, hazautaztak.

A szálloda igazgató a haját tépte: a Kozmosz félig üres!

Persze a rendszergazda újra megmentette a helyzetet. Vajon mit javasolt?

A $2n+1$ -es szoba lakója költözzön az n -ik szobába!

Eltelt néhány év...

A galaxisban újabb és újabb végtelen nagy szálloda épült, amíg a szállodák száma is végtelen lett. Ezek vígan működtek, amíg egy szép nap...

Mind tönkrementek, kivéve a Kozmoszt. A tönkrement szállodákból is a Kozmoszba irányították át a vendégeket:

Végtelen sok végtelen hosszú sorban álltak az ajtó előtt...

A rendszergazda kétségbeesetten törte a fejét. Első ötlete, hogy a Kozmosz lakóit átköltözteti az 1001,2001,3001,...-es szobákba, majd az első szálloda lakóit az 1002,2002,3002,..., a második szálloda lakóit az 1003,2003,3003,... és így tovább, nem jött be, mert elakadt az 1000-ik tönkrement szálló vendégeinél. Hasonlóan járt, ha 1000 helyett bármilyen más véges számot vett.

Második ötlete az volt, hogy az első szálló lakóit a $2, 4, 8, 16, 32, \dots$ -es szobákba, a második szálló lakóit a $3, 9, 27, 81, \dots$ -es szobákba, általában az $(n-1)$ -ik szálló lakóit az n, n^2, n^3, \dots -ik szobákba költözteti. Ez jónak tűnt amíg el nem kezdték a költözködést...

Ugyanis a harmadik szálló vendégeinek kijelölt szobák már mind foglaltak voltak! A 4 hatványai egyben 2 hatványai is.

Szerencsére Susan Lynoux, a rendszergazda ki tudta javítani ötletét. Tudta, hogy végtelen sok prímszám van, így ha p_k a k -ik prímszám, akkor a k -ik szálló lakóit a p_k, p_k^2, p_k^3, \dots -ik szobákba költöztetve nem lett konfliktus, hiszen különböző prímszámok hatványai különbözőek.

Azonban Mike Rosophte, a gazdasági igazgató nem volt elégedett, hiszen így rengeteg szoba üresen maradt! (pl. 6, 10, 12, 14, 18, ... stb).

Susan Lynoux következő gondolata az volt, hogy az m -ik szálloda n -ik vendégét a $2^m 3^n$ -ik szobába költözteti. Ez megint nem okozott konfliktust, de Mike problémáját nem oldotta meg...

Az Ötlet

Ms Lynoux másnapra rájött, hogyan lehet a szállodát megtölteni. Felírta a szállók vendégeit egy végtelen négyzetes mátrixba, az m -ik sor n -ik pozíciója az m -ik szálló n -ik vendége. Aztán piros tollal megadta a beköltözési sorrendet

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...
(2,1) ←	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...
(3,1) ←	(3,2) ←	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...
(4,1) ←	(4,2) ←	(4,3) ←	(4,4)	(4,5)	...
(5,1) ←	(5,2) ←	(5,3) ←	(5,4) ←	(5,5)	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Az első n^2 szobában az első n szálloda első n vendége kapott helyet, így előbb-utóbb mindenki sor került: az m -ik szálló n -ik lakója az $(n-1)^2 + m$ -ik szobába költözik, ha $n \geq m$, ellenkező esetben pedig az $m^2 - n + 1$ -es szobát kapja.

Ezzel minden m, n -re megadtuk a szobát, azt kaptuk, hogy végtelen sok szálloda végtelen sok vendége egyetlen szállodában üresen maradt szoba nélkül elhelyezhető.

Susan Lynoux megérdemelt szabadságra utazott. Bár ne tette volna...

Zavar a fogadáson

Mike estére fogadást szervezett a Kozmosz vendégeinek. De véletlenségből (dupla gyorsan akarta küldeni a meghívót, ehelyett dupla nagyságú szobaszámokra küldte) csak a páros szobák kaptak értesítést.

A végtelen sok szék így mind elfoglalták, mire a többi vendég, akiket késve értesítettek megérkezett. Hosszas ültetgetés után sikerült csak mindenkinek helyet találni.

Ekkor felszolgálták a fogylaltot: mindenkinek két adag jutott, pedig a cukrász esküdött rá, hogy csak egyet készített fejenként...

Mike Rosophte értetlenül állt a jelenségek előtt.

A játékautomata

A GASZERT (Galaktikus Szerencsejáték RT) felszerelt egy nyerőautomatát a Kozmosz halljában. 1 Gb (Galaktikus buznyák) bedobására végtelen sok Gb-t adott ki.

Mike ragaszkodott hozzá, hogy ő próbálja ki. Rövid idő alatt (végtelen sok lépésben) azonban elvesztette az összes pénzét.

Hogyan játszott Mr Rosophte?

Nyereményét táblázatba rendezte: az m -ik sorba az m -ik nyereményt. Majd a Susan Lynoux-tól elleset sorrendben dobálta be sorban a gépbe.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...	Így végtelen sok lépés után pont kiürítette a táblázatát, és lógó orral, üres zsebbel távozott...
(2,1)←	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...	
(3,1)←	(3,2)←	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...	
(4,1)←	(4,2)←	(4,3)←	(4,4)	(4,5)	...	
(5,1)←	(5,2)←	(5,3)←	(5,4)←	(5,5)	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

A megoldhatatlan feladat

A Kozmosz sikerein felbuzdulva a KASZAKÖ (Kozmikus Autonóm Szálloda Központ) utasítást adott, hogy készítsenek egy listát a Kozmosz szálloda összes lehetséges kihasználtsági módjáról. A lista egy eleme egy végtelen 0-1 sorozat, amelynek az n -ik eleme 0, ha az n -ik szoba üres, 1, ha foglalt.

Mike Rosophte engedelmesen összeállított egy listát, már éppen el akarta küldeni, amikor Susan Lynoux visszerkezett, és közölte hogy egy ilyen lista nem lehet teljes.

„Íme a kimaradó foglaltsági sorozat: Ha a listában az n -ik sorozat n -ik eleme 0, akkor ebben legyen 1, ellenkező esetben meg 0. Így az új sorozat minden, a listában levő sorozattól különböző: az n -ik sorozattól az n -ik pozícióján tér el.”

r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	...	Az n -ik kihasználtsági sorozat $r^n = r_{n1}, r_{n2}, r_{n3}, \dots$
r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}	...	Ebben a felsorolásban nem szerepelhet az s sorozat, melyre $s_n = 1 - r_{nn}$.
r_{31}	r_{32}	r_{33}	r_{34}	...	Cantor-féle átlós módszer.
r_{41}	r_{42}	r_{43}	r_{44}	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Számosság

Definíció

Az A és B halmazok ekvivalensek (egyenlő számosságúak), ha van f kölcsönösen egyértelmű leképezés, mely A -t B -re képezi. Jele $A \sim B$.

Tétel

Az \sim ekvivalencia reláció, azaz

- Minden A -ra $A \sim A$ (reflexív) (Identitás)
- Ha $A \sim B$ akkor $B \sim A$ (szimmetrikus) ($f \leftrightarrow f^{-1}$)
- Ha $A \sim B$ és $B \sim C$ akkor $A \sim C$ (transzitiv) ($f \circ g$)

Példák

- $\{\text{"kutya"}, \text{"macska"}, \text{"poloska"}\} \sim \{\text{"eb"}, \text{"cica"}, \text{"mezei"}\} \sim \{0, 1, 2\}$
- $\{0, 1, 2, \dots\} \sim \{1, 2, 3, \dots\}$ $f(i) = i + 1$ (első este a Kozmoszban...)
- $\{1, 2, 3, \dots\} \sim \{2, 4, 6, \dots\}$ $f(i) = 2i$ (második este a Kozmoszban...)
- $\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \sim \{0, 1, 2, \dots\}$ $f(2i) = i$, $f(2i+1) = -i$

Az egymással ekvivalens halmazokat azonos számosságúaknak nevezzük. Jele $|A|$ az A számossága.

Egy halmaz véges, ha ekvivalens a $\{0, 1, \dots, n-1\}$ halmazzal, valamely n nemnegatív egészre, vagy pedig az üres halmaz. Egyébként végtelen.

A természetes számok halmazának számosságát \aleph_0 („alef null”) -al jelöljük.

\aleph_0 végtelen számosság (Bizonyítása házi feladat!)

Egy halmaz megszámlálható, ha véges, vagy \aleph_0 számosságú.

Állítás

Ha egy A halmaz végtelen, akkor van m \aleph_0 számosságú részhalmaza.

Számosságok összehasonlítása

Bizonyítás

Konstruálunk egy f kölcsönösen egyértelmű leképezést a természetes számok halmazáról A -ba.

A végtelen, azaz nem üres, legyen a egy tetszőleges eleme, és legyen $f(0) = a$.

Tegyük fel, hogy az $f(0), \dots, f(n-1)$ értékek már adóttak. Tekintsük az $A - \{f(0), \dots, f(n-1)\}$ halmazt. Ha ez üres lenne, akkor A véges lenne, tehát van egy $b \in A - \{f(0), \dots, f(n-1)\}$. Legyen $f(n) = b$.

Ezzel megadtuk az f leképezést, a konstrukció biztosítja, hogy kölcsönösen egyértelmű.

Definíció

A számossága nem nagyobb, mint B számossága, ha létezik A -nak kölcsönösen egyértelmű f leképezése B egy részhalmazára. Jelben $|A| \leq |B|$.

Példa

$$\{0, 1, \dots, n\} \leq \{0, 1, \dots, m\} \Leftrightarrow n \leq m$$

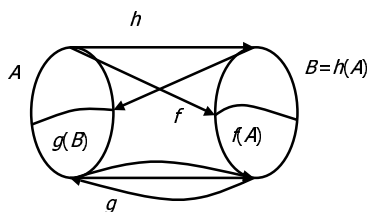
$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathbb{C}|$ a kölcsönösen egyértelmű leképezés minden esetben az identitás.

$|\mathbb{N}| \leq |A|$ ha A végtelen halmaz

Tétel (Bernstein ekvivalencia tétele)

Ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ akkor $|A| = |B|$

Egypént nem triviális!



Tétel

Megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható. (Hotel Kosmosz pár év után)

Bizonyítás

Legyenek a halmazaink $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. Legyen továbbá A_n m -ik eleme $a(n, m)$. Megadunk egy kölcsönösen egyértelmű leképezést

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \mathbb{N}$$

$a(n, m)$ helyett az egyszerűség kedvéért (n, m) -t írunk.

$(1,1) \quad (1,2) \quad (1,3) \quad (1,4) \quad (1,5) \quad \dots$
 $(2,1) \leftarrow (2,2) \quad (2,3) \quad (2,4) \quad (2,5) \quad \dots$
 $(3,1) \leftarrow (3,2) \leftarrow (3,3) \quad (3,4) \quad (3,5) \quad \dots$
 $(4,1) \leftarrow (4,2) \leftarrow (4,3) \leftarrow (4,4) \quad (4,5) \quad \dots$
 $(5,1) \leftarrow (5,2) \leftarrow (5,3) \leftarrow (5,4) \leftarrow (5,5) \quad \dots$
 $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$

Persze nem ez az egyetlen lehetséges leképezés.

Előfordulhat, hogy a halmazok nem diszjunktak, akkor az a hozzárendelés \mathbb{N} egy részhalmazára történik.

Állítás

\mathbb{Q} megszámlálható.

Bizonyítás

Írjunk az előbbi bizonyításban $(2n+1, m)$ helyére $-n/m$ -et és $(2n, m)$ helyére n/m -et.

Így persze egy racionális számot többféleképpen is megkapunk, de ha ezek közül csak egyet tekintünk, akkor \mathbb{Q} -nak \mathbb{N} egy részhalmazára történő leképezést kapunk. Innen Bernstein tétele fejezi be a bizonyítást.

Igaz-e hogy $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$?

Cantor féle átlós módszer

Tétel

\mathbb{R} nem megszámlálható, azaz $|\mathbb{R}| > \aleph_0$

Bizonyítás

Belátjuk, hogy már a $(0,1)$ nyílt intervallumra is igaz, hogy $|(0,1)| > \aleph_0$. Tegyük fel ellenkezőleg, hogy $(0,1)$ megszámlálható, azaz elemei sorba rendezhetők: $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$. Legyen az r_n szám tizedes tört alakja $r_n = 0, d_{n1}d_{n2}d_{n3}\dots$

Legyen s az a szám, melynek j -ik tizedes jegye 1, ha $d_{jj} \neq 1, 2$, ha $d_{jj} = 1$. Ekkor s nem lehet az előbbi felsorolásban, hiszen r_j tol a j -ik helyen eltér.

$r_1 = 0, \textcircled{d_{11}}d_{12}d_{13}d_{14}\dots$
 $r_2 = 0, d_{21}\textcircled{d_{22}}d_{23}d_{24}\dots$
 $r_3 = 0, d_{31}d_{32}\textcircled{d_{33}}d_{34}\dots$
 $r_4 = 0, d_{41}d_{42}d_{43}\textcircled{d_{44}}\dots$
 $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$$(0,1) \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad f(x) = \pi \cdot x - \frac{\pi}{2}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{tg}(x)$$

Hasonlóan, bármely intervallum ekvivalens \mathbb{R} -el. \mathbb{R} számosságát kontinuumnak nevezik, jele \mathfrak{c} (gót c).

$\aleph_0 < \mathfrak{c}$

Van-e nagyobb számosság? Van-e köztük számosság?

Hatványhalmaz

Definíció

Az A halmaz összes részhalmazából álló halmazt az A hatványhalmazának nevezzük. Jele $\mathcal{P}(A)$.

Tétel

$|A| < |\mathcal{P}(A)|$ minden A -ra.

Bizonyítás

Az $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ egyenlőtlenséget az $a \mapsto \{a\}$ hozzárendelés mutatja. Az kell, hogy nem lehet egyenlőség. Indirekt tegyük fel, hogy van $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, melynél $\mathcal{P}(A)$ minden eleme kép.

Legyen $B = \{a \in A : a \notin f(a)\}$. Ekkor $B \subseteq A$, tehát $B \in \mathcal{P}(A)$, azaz van b , hogy $f(b) = B$.

• $b \in B$, ekkor B definíciója szerint $b \notin f(b) = B$, ellentmondás.

• $b \notin B$. Ekkor mivel b az A egy eleme, nem igaz, hogy $b \notin f(b) = B$, ami megint ellentmondás.

Tehát a kiinduló feltétel hamis, azaz $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Vagyis, minden számosságnál van nagyobb számosság.

A kontinuum-hipotézis

Van-e számosság \aleph_0 és \mathfrak{c} között? A válasz: ahogy akarjuk.

Bebizonyították (1964-ben, Cohen), hogy a halmazelmélet axióma rendszerétől független állítás, hogy \aleph_0 és \mathfrak{c} között van vagy nincs másik számosság.

Azaz, ha feltesszük, hogy nincs, nem juthatunk ellentmondásra, és tökéletesen jó matematikát építhetünk.

De ha feltesszük, hogy van (sőt akárhányat feltételezhetünk), akkor sem juthatunk ellentmondásra.

Kontinuum-hipotézis

\aleph_0 és \mathfrak{c} között nincs másik számosság.

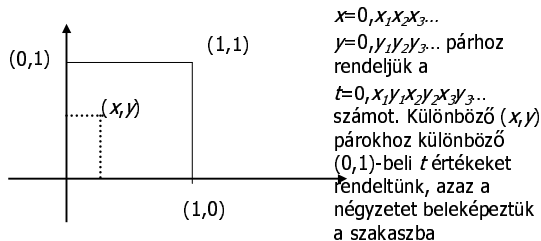
Mivel $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ezért analóg módon kérdezhetjük, hogy tetszőleges végtelen A -ra vajon $|A|$ és $|\mathcal{P}(A)|$ között van-e számosság. A helyzet ugyanaz, mint előbb: bizonyított, hogy a kérdés egyik irányú megválaszolása sem vezet ellentmondásra.

Általánosított kontinuum hipotézis

Tetszőleges végtelen A -ra $|A|$ és $|\mathcal{P}(A)|$ között nincs más számosság.

A négyzet pontjainak számossága

Cantor azt próbálta megmutatni, hogy a négyzetnek több pontja van, mint a szakasznak. Aztán, amikor megtalálta az igazságot, akkor írta: „Látom a megfeleltetést, de nem hiszek neki.”



Algebrai számok

Egy szám algebrai, ha egész együtthatós polinom gyöke.

Állítás

Az algebrai számok halmaza megszámlálható.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy egész együtthatós polinomok halmaza megszámlálható, mivel egy n -ed fokú polinomnak n gyöke van, és megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.

Legyen p_0, p_1, p_2, \dots különböző prímszámok végtelen sorozata. $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$. Az $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$ egyenlethez rendeljük az

$r = \frac{p_0^{a_0} p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}}{p_0^{b_0} p_1^{b_1} \dots p_n^{b_n}}$ racionális számot. Különböző egyenlethez különböző számokat rendelünk, így egyenlet legfeljebb annyi van, mint racionális szám.

Példa

A $3x^2 - 6 = 0$ -hoz a $2 \cdot 65^3 = 125/64 = 1.953125$ lesz rendelve.

Axiómák (vázlat)

- Ha A egy halmaz, akkor minden x dologra ami a világon van, vagy az igaz, hogy $x \in A$, vagy az igaz, hogy $x \notin A$.
- Ha A és B két halmaz, melyeknek ugyanazok az elemeik, akkor A és B ugyanaz. $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$.
- Létezik egy olyan halmaz, aminek nincs eleme. Az előző pont miatt csak egyetlen ilyen van. Ezt az üres halmaznak hívjuk és \emptyset -el jelöljük.
- Ha van néhány elem x_1, x_2, \dots, x_n , akkor létezik az a halmaz, amelynek pontosan ezek az elemei: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Adott a természetes számok halmaza $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.
- Ha A egy halmaz és $\Phi(x)$ egy tulajdonság, amely minden x -re értelmezve van (igaz vagy hamis), akkor létezik az A $\Phi(x)$ tulajdonságú elemeinek halmaza, az $\{x \in A : \Phi(x)\}$.