

# Bevezetés a Számításelméletbe II. 7. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

`sali@cs.bme.hu`

2002 március 26.

# Hálózat

**1. Definíció.** Legyen  $G$  egy irányított gráf. Rendeljünk minden éléhez egy  $c(e)$  nem-negatív valós számot, amit az él kapacitásának nevezünk. Jelöljünk ki továbbá két  $s, t$  pontot  $G$ -ben, melyeket forrásnak (termelőnek) illetve nyelőnek (fogyasztónak) hívunk. Ekkor a  $(G; s; t; c)$  négyest hálózatnak nevezzük.

Szemléltetésképp feltehetjük, hogy a hálózattal egy olajvezetékrendszert ábrázolunk. A kapacitások a vezeték vastagságát jelentik, vagyis azt, hogy egységnyi idő alatt mennyi olaj folyhat át azon a vezetékdarabon. A kérdés az, hogy egy adott hálózaton mennyi olaj folyhat át  $s$ -ből  $t$ -be. Szoktak beszélni úthálózatokról is, ahol a kapacitás az utak áteresztőképessége, és árukat kell eljuttatni a termelőtől a fogyasztókhoz. De beszélhetünk számítógép hálózatokról és adatátviteli sávszélességről is.



# Folyam

**2. Definíció.** Az  $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  függvény megengedett függvény, ha  $f(e) \leq c(e)$  minden élre, és

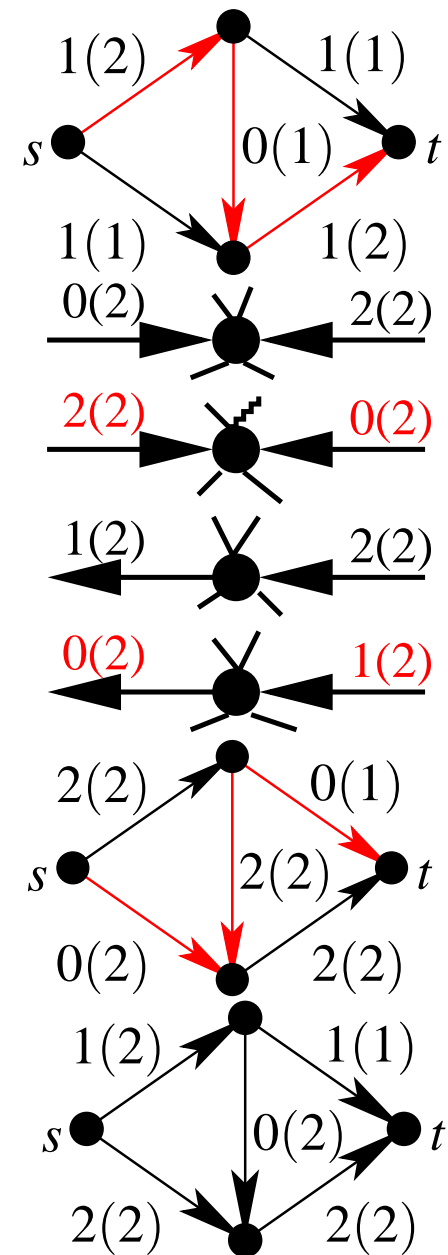
$$m(v) = \sum \{f(e) \mid e \text{ végpontja } v\} - \sum \{f(e) \mid e \text{ kezdőpontja } v\} = 0$$

minden  $v \in V(G)$ -re, kivéve az  $s$  és  $t$  pontokat. Egy megengedett függvényt folyamnak hívunk. Könnyen belátható, hogy  $m(t) = -m(s)^*$ . Ezt a közös értéket a folyam értékének nevezzük és  $m_f$ -el jelöljük. Egy élet telítettnek hívunk egy folyamban, ha  $f(e) = c(e)$ , és telítetlennek, ha  $f(e) < c(e)$ .

\*:  $\sum m(v) = 0$ , mivel minden  $e$  élre az  $f(e)$  érték az él végpontjánál pozitív, kezdőpontjánál negatív előjellel adódik össze.  $0 = \sum m(v) = m(t) + m(s) + \sum_{v \neq s, t} m(v) = m(t) + m(s)$ .

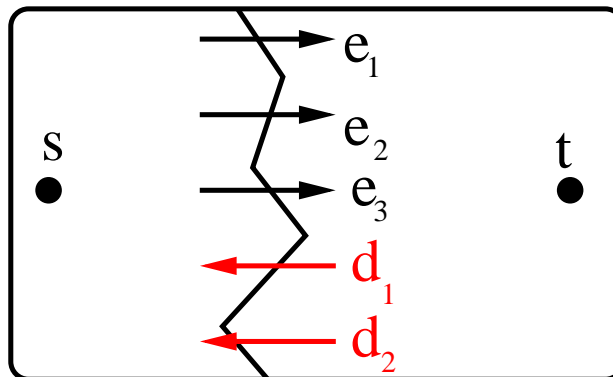
A feladat a maximális értékű folyam meghatározása. Hogyan lehet egy meglévő folyamot javítani?

- Ha van egy olyan irányított út  $s$ -ből  $t$ -be, amelynek minden éle telítetlen, akkor ezen út mentén a folyam értékét minden élen növelhetjük annyival, hogy az egyik él telített legyen.
- Ha van egy „vissza” él, amin pozitív a folyam, akkor megpróbálhatjuk csökkenteni a visszafelé folyó mennyiséget. Két eset lehetséges: Van egy telítetlen befutó él van egy pozitív kifutó él. Legyen a gráfban  $s = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = t$  egy út, nem feltétlenül az irányítás szerint. Növelhetjük a folyam értékét, ha minden  $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ -re vagy  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  és  $f(e_i) < c(e_i)$ , vagy  $e_i = (v_{i+1}, v_i)$  és  $f(e_i) > 0$ . Ekkor az első típusú éleken növeljük a folyam értékét, míg a második típusúakon csökkentjük, így az össz folyamérték nő. Az ilyen utakat *javító útnak* hívjuk.



# Vágás

**3. Definíció.** Legyen  $s \in X \subseteq V(G) - \{t\}$ , így nyilvánvaló, hogy sem  $X$ , sem  $V(G) - X$  nem üres halmaz. Azoknak az éleknek a  $C$  halmazát, amelyeknek egyik végpontja  $X$ -beli, másik  $V(G) - X$ -beli, a hálózati folyam egy  $(s, t)$ -vágásának nevezzük. A vágás értéke,  $c(C)$ , azon éleken levő kapacitások összege, amelyek egy  $X$ -beli pontból egy  $V(G) - X$ -beli pontba mutatnak. ( $e_1, e_2, \dots$ ) Ezeket előremutató éleknek nevezzük. Tehát a vágás értékében nem játszanak szerepet a visszafelé mutató élek ( $d_1, d_2, \dots$ ), vagyis azok, amelyek egy  $X$ -beli pontba mutatnak.



**4. Állítás.** Legyen  $G$  egy hálózat,  $f$  egy folyam,  $C = (X, V(G) - X)$  egy vágás. Ekkor  $m_f \leq c(C)$ .

BIZONYÍTÁS Legyenek  $e_1, e_2, \dots, e_r$  az előre ( $X$ -ből  $V(G) - X$ -be) mutató élek,  $d_1, d_2, \dots, d_s$  pedig a visszafelé mutató élek. Ekkor

$$m_f = \sum_{i=1}^r f(e_i) - \sum_{j=1}^s f(d_j) \leq \sum_{i=1}^r c(e_i) = c(C).$$

## Javító út – maximális folyam

**5. Tétel.** *Egy folyam értéke akkor és csak akkor maximális, ha nincs javító út  $s$ -ből  $t$ -be.*

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $P$  egy javító út. Ekkor  $P$  minden előre mutató élére a  $c(e_i) - f(e_i)$ , visszafelé mutatóra pedig az  $f(e_i)$  érték szigorúan pozitív. Legyen ezeknek a minimuma  $d$ . Az első típusú élekre növeljük  $f(e_i)$ -t  $d$ -vel, a második típusúaknál pedig csökkentjük  $f(e_i)$ -t  $d$ -vel. Ekkor a módosított folyam is megengedett marad, értéke viszont  $d$ -vel nőtt.

Tegyük most fel, hogy nincs javító út  $s$ -ből  $t$ -be. Legyen  $X \subset V(G)$   $s$ -ből javító úton elérhető pontok halmaza. Ekkor sem  $X$ , sem  $V(G) - X$  nem üres, hiszen  $s \in X, t \in V(G) - X$ . Tekintsünk egy olyan  $e$  élet, amely egy  $X$ -beli  $x$  pontból egy nem  $X$ -beli  $y$ -ba mutat. Ekkor  $f(e) = c(e)$ , hiszen ellenkező esetben az  $s$ -ből  $x$ -be vezető javító út  $e$ -vel meghosszabbítva egy  $s$ -ből  $y$ -ba vezető javító utat szolgáltatna. Ugyanígy egy olyan élre, amelyik egy nem  $X$ -beliből egy  $X$ -belibe mutat, teljesül, hogy  $f(e) = 0$ . Tehát erre a vágásra teljesül, hogy  $m_f = c(C)$ , ami a 4. Állítás szerint azt jelenti, hogy  $f$  maximális.



## Ford-Fulkerson tétel

**6. Tétel (Ford–Fulkerson).** *A maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével, azaz*

$$\max\{m_f \mid f \text{ egy folyam } s \text{ -ből } t \text{ -be}\} = \min\{c(C) \mid C \text{ vágás}\}.$$

Egy újabb minmax tétel. Megint az, hogy a maximum nem nagyobb, mint a minimum, könnyű.

BIZONYÍTÁS A maximális folyam nem lehet nagyobb a minimális vágásnál a 4. Állítás szerint. Az 5. Tétel bizonyítása egy maximális folyamhoz egy vele egyező értékű vágást konstruál. Ezzel a bizonyítás kész ??? Honnan tudjuk, hogy *létezik* maximális folyam? Egy algoritmust adunk maximális folyam keresésére.

E tétel segítségével könnyen bebizonyítható egy adott folyamról (amit valahogy megsejtettünk), hogy az maximális. Ha megsejtünk egy ugyanilyen értékű vágást, akkor a Ford–Fulkerson tétel biztosítja, hogy a folyam értéke maximális.

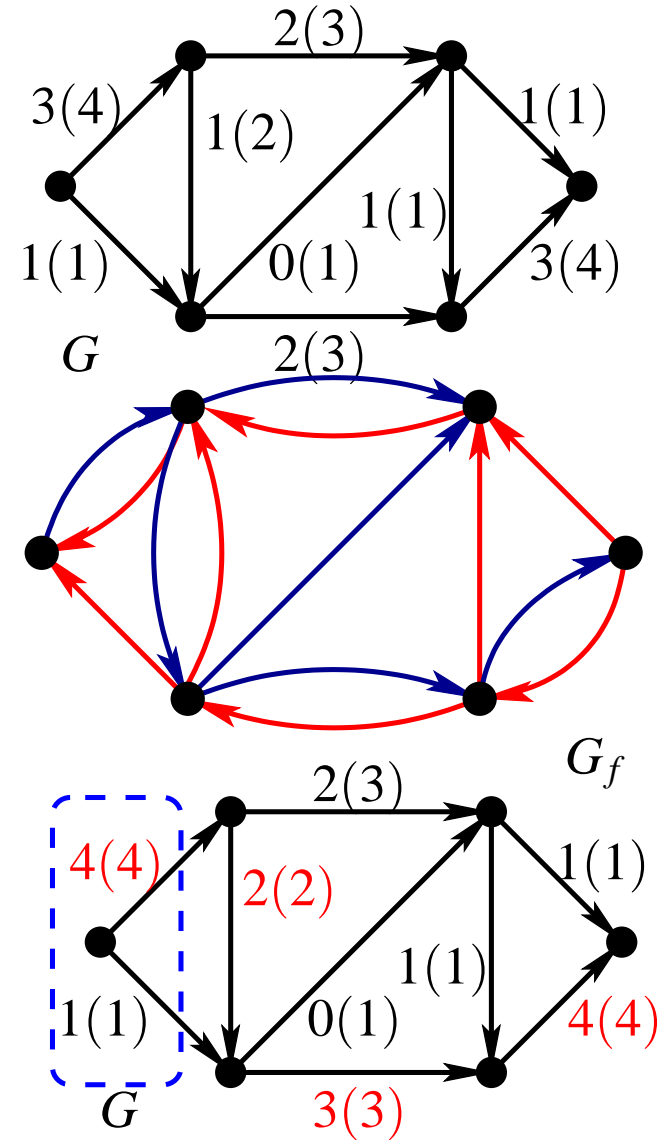
# Maximális folyam algoritmus

A kiindulási folyamra vonatkozólag (ha ilyen nem volt, akkor az azonosan 0 folyam használható) keresünk egy javító utat, és e mentén növeljük a folyam értékét. Hogyan tudunk, ilyen javító utat keresni, illetve hogyan jövünk rá, hogyha nincs javító út?

Segéd gráf

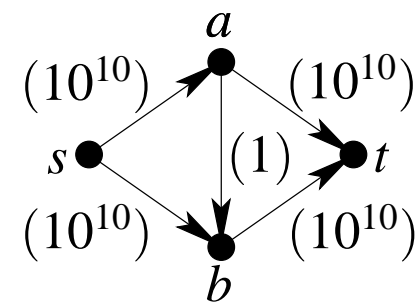
Adott  $G$  gráfhoz és  $f$  folyamhoz definiálunk egy  $G_f$  irányított gráfot: Legyen  $V(G_f) = V(G)$  és  $G_f$ -ben fusson egy irányított él  $x$ -ből  $y$ -ba, ha vagy (1)  $(x,y) \in E(G)$  és  $f(x,y) < c(x,y)$ , vagy (2)  $(y,x) \in E(G)$  és  $f(y,x) > 0$ .

Ha  $G_f$ -ben van egy irányított út  $s$ -ből  $t$ -be, akkor az ennek az útnak megfelelő élek  $G$ -ben épp egy javító utat adnak az  $f$  folyamra nézve. Ha pedig van javító út  $G$ -ben, akkor lesz irányított út  $s$ -ből  $t$ -be  $G_f$ -ben.



1. Nem mindegy, hogy a  $G_f$  gráfban melyik  $s$ - $t$  utat választjuk.

- (a) Lehet, hogy az algoritmus túl sok lépésből fog állni. Felváltva az  $s, a, b, t$  és  $s, b, a, t$  utakat vesszük, akkor a maximális folyam értékéhez csak  $2 \cdot 10^{10}$  lépésben jutunk el, míg ha az első lépésben az  $s, a, t$  javító utat vesszük, akkor 2 lépésben jutunk a maximumhoz.
- (b) Ford és Fulkerson konstruáltak olyan példát is, ahol javítások egy végtelen sorozata történik. A folyamértékek (monoton növekvő és korlátos, tehát konvergens) sorozata a maximális folyam  $1/4$ -hez tart.



2. Ha a kapacitások egész számok, akkor a maximális folyam értéke egész szám, és ez olyan  $f$  függvénnyel is megvalósítható, mely minden élen egész értéket vesz fel.

## Edmonds-Karp tétel

Akkor most van algoritmus, vagy nincs?

Ha egészek a kapacitások, akkor az azonosan 0 folyamból indulva mindig egész számmal növeljük a folyam értéket  $\implies$  Az algoritmus véges sok lépésben véget ér. De lehet hogy túl lassan.

**7. Tétel (Edmonds-Karp).** *Ha mindig a legrövidebb javító utat vesszük, akkor a maximális folyam meghatározásához szükséges lépések száma felülről becsülhető a pontok számának polinomjával.*

## A folyamprobléma általánosításai

- Több termelő  $s_1, s_2, \dots, s_k$  és több fogyasztó  $t_1, t_2, \dots, t_l$ .
- Pontokhoz is rendelünk  $\bar{c}(v)$  kapacitásokat, és megköveteljük, hogy minden  $v$ -re  $\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u, v) \leq \bar{c}(v)$ .
- Megengedünk irányítatlan éleket.

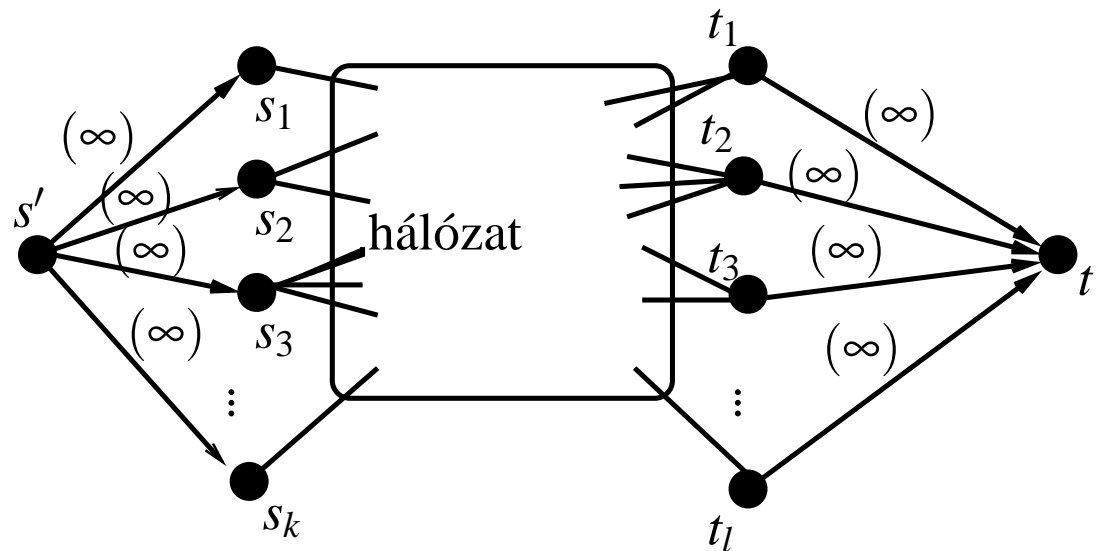
Ez utóbbi esetben ilyen  $c$  kapacitású  $\{u, v\}$  él helyett felveszünk két  $c$  kapacitású  $(u, v)$  és  $(v, u)$  irányított élet.

Ha a kapacitás minden élen 1 vagy 0, akkor van olyan maximális folyam, melynek minden élen a folyam értéke vagy 1 vagy 0. Ha elhagyjuk ez utóbbi éleket, akkor diszjunkt utakat kapunk  $s$ -ből  $t$ -be. (Esetleg maradhatnak további irányított körök is.)

## Több termelő és több fogyasztó

A feladat az összes termelőtől az összes fogyasztóig eljutó termékmennyiség maximalizálása.

Vegyünk fel két új  $s', t'$  pontot, és kössük össze  $s'$ -t  $s_1, \dots, s_k$ -val,  $t_1, \dots, t_l$ -t pedig  $t'$ -vel, az új élek mindegyikének kapacitása legyen  $\infty$ . Ha ebben a hagyományos hálózatban meghatározzuk a maximális folyamot, akkor az eredeti éleken szereplő folyamértékek pontosan a keresett értékek.



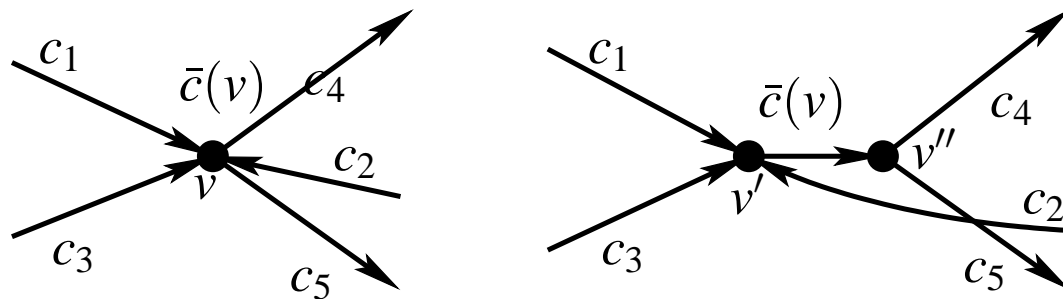
## Pontkapacitások

A pontokhoz is rendelünk  $\bar{c}(v)$  kapacitásokat, és megköveteljük, hogy a ponton csak ennyi víz folyhat át, azaz minden  $v$ -re

$$\sum_{\{u \mid (u,v) \in E\}} f(u,v) \leq \bar{c}(v).$$

konstruálunk hozzá egy hagyományos hálózatot. Minden  $v$  pontot helyettesítsünk két  $v', v''$  ponttal. Ha egy él az  $u$  pontból a  $v$  pontba mutatott, akkor helyette vegyünk fel egy  $u''$ -ből  $v'$ -be mutató élet a hozzá tartozó kapacitással együtt. Ezenkívül pedig minden  $v'$ -ből mutasson egy él  $v''$ -be és ennek kapacitása  $\bar{c}(v)$  legyen.

Ebben a hálózatban egy „hagyományos” maximális folyam megfelel a pontkapacitásos hálózat egy maximális folyamának.



## Menger tételei

**8. Tétel (Menger).** *Ha  $G$  egy irányított gráf,  $s, t \in V(G)$ , akkor az  $s$ -ből  $t$ -be vezető páronként  $\left\{ \begin{array}{c} \text{élidegen} \\ \text{pontidegen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \text{irányított} \\ \text{irányítatlan} \end{array} \right\}$  utak maximális száma megegyezik az összes  $\left\{ \begin{array}{c} \text{irányított} \\ \text{irányítatlan} \end{array} \right\} s - t$  utat lefogó  $\left\{ \begin{array}{c} \text{élek} \\ \text{pontok} \end{array} \right\}$  minimális számával.*

Világos, hogy  $\max\{\} \leq \min\{\}$ .



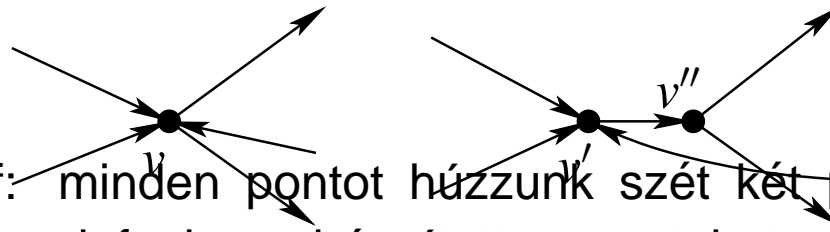
## Irányított, élidegen

Tegyük fel, hogy az  $s - t$  utakat lefogó élek minimális száma  $k$ .

Legyen minden él kapacitása 1. Az így kapott hálózatban a minimális vágás értéke tehát legalább  $k$ . Ekkor a Ford–Fulkerson tétel miatt a maximális folyam is legalább  $k$  értékű. Van olyan maximális folyam, melyben minden élen a folyamérték 0 vagy 1. A telített éleken át van egy út  $s$ -ből  $t$ -be: élein változtassuk a kapacitást 0-ra (hagyjuk el őket). Így a folyam értéke legalább  $k - 1$  lesz. Ekkor viszont ismét kell lennie  $s - t$  útnak (ha  $k - 1 \geq 1$ ), és ennek nyilván nincs közös éle az előbbi úttal. A gondolatmenetet folytatva  $k$  élidegen irányított  $s - t$  utat kapunk.

## Írányított, pontidegen

**9. Tétel (Menger).** *Ha  $G$  egy irányított gráf,  $s, t \in V(G)$  két nem szomszédos pont, akkor az  $s$ -ből  $t$ -be vezető, végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított  $s - t$  utat  $s$  és  $t$  felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*

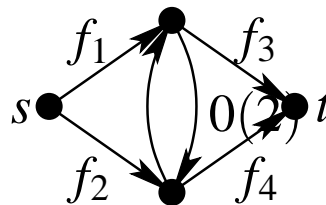


**BIZONYÍTÁS** Új  $G'$  gráf: minden pontot húzzunk szét két ponttá. Ha a  $G$  gráfban egy minimális pontthalmaz lefogja az irányított  $s - t$  utakat, akkor a lefogó pontoknak megfelelő  $(v', v'')$  élek  $G'$ -ben lefogják az irányított  $s - t$  utakat. Kevesebb él nem elég, mert ha a lefogó élek között lennének  $(a'', b')$  típusú élek, akkor ezeket helyettesíthetjük  $(b', b'')$ -vel, ha  $b' \neq t$ , illetve  $(a', a'')$ -vel, ha  $b' = t$ . Így pedig  $G$ -ben egy kisebb lefogó pontthalmazt nyernénk.  $G$ -beli lefogó pontok és a  $G'$ -beli lefogó élek minimális száma egyenlő.  $G$ -beli pontdiszjunkt utaknak  $G'$ -ben éldiszjunkt utak felelnek meg, és fordítva.

## Irányítatlan, élidegen

$G'$  gráf: hogy minden élet két, egy oda és egy vissza mutató irányított éllel helyettesítünk. Tegyük fel, hogy  $G$ -ben  $k$  a diszjunkt utakat lefogó élek minimális száma. Ha  $G'$ -ben ennél kevesebb él lefogná az irányított utakat, akkor az ezeknek az éleknek  $G$ -ben megfelelő élek lefognák az utakat  $G$ -ben.

Egy  $G$ -beli  $s - t$  útnak  $G'$ -ben megfelel egy irányított  $s - t$  út. Azonban két élidegen  $G'$ -beli irányított  $s - t$  útnak  $G$ -ben megfelelő utak nem feltétlenül élidegenek! Az egyik  $f_1, e_2, f_4$  irányított út, a másik pedig az  $f_2, e_1, f_3$  út, ahol  $f_i$  irányított rész-utakat jelöl. A  $G$ -ben nekik megfelelő utaknak van közös éle.  $\implies$  Helyettesítsük az  $f_1, f_3$  és  $f_2, f_4$  utakkal. Az ezeknek  $G$ -ben megfelelő utak már diszjunktak. Így csökken az utakban szereplő élek száma, tehát véges lépés után már nem fog ilyen helyzet előállni. Ebből tehát látszik, hogy a diszjunkt utak maximális száma  $G$ -ben és  $G'$ -ben megegyezik.



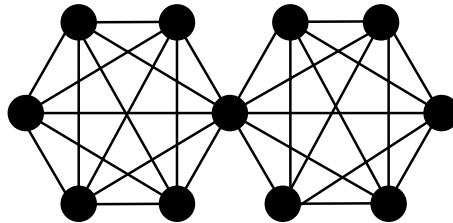
## Írányítatlan, pontidegen

**10. Tétel (Menger).** *Ha  $G$  egy írányítatlan gráf,  $s, t \in V(G)$  két nem szomszédos pont, akkor az  $s$ -ből  $t$ -be vezető pontidegen írányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes írányítatlan  $s - t$  utat  $s$  és  $t$  felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*

Ezt a tételt könnyen visszavezethetjük az előző tételre, ha az írányítatlan élek helyett mindkét irányban húzunk egy irányított élet.

## Többszörös összefüggőség

**11. Definíció.** Egy  $G$  gráfot  $k$ -szorosan összefüggőnek nevezünk, ha legalább  $k + 1$  pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle  $k$ -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A gráf  $k$ -szorosan élösszefüggő, ha akárhogy hagyunk el belőle  $k$ -nál kevesebb élet, összefüggő gráfot kapunk.



Egyszeresen összefüggő, de  $(p - 1)$ -szeresen élösszefüggő.

**12. Tétel.** A  $G$  gráf akkor és csak akkor  $k$ -szorosan összefüggő, ha legalább  $k + 1$  pontja van, és bármely két pontja között létezik  $k$  pontidegen út. Hasonlóan  $G$  akkor és csak akkor  $k$ -szorosan élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik  $k$  élidegen út.

BIZONYÍTÁS Menger idevágó tételei.

## Többszörös összefüggőség és körök

**13. Tétel (Menger).** *A legalább 3 pontú  $G$  gráf akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha tetszőleges két pontján át vezet kör. Igaz az is, hogy akkor és csak akkor 2-szeresen összefüggő, ha bármely két élén át vezet kör.*

BIZONYÍTÁS Két pontidegen  $u - v$  út együtt egy kört ad, amely átmegy  $u$ -n és  $v$ -n. Vegyünk fel két pontot úgy, hogy ezekkel osszuk két részre az  $e$  illetve az  $f$  élet.  $\implies$  Az így kapott gráf is 2-szeresen összefüggő. Az első állítás szerint ezen a két ponton át megy kör, és ez a kör az eredeti gráfban átmegy  $e$ -n és  $f$ -en.

**14. Tétel (Dirac).** *Ha  $k \geq 2$  és a  $G$  gráf  $k$ -szorosán összefüggő, akkor bármely  $x_1, x_2, \dots, x_k$  pontján át vezet kör.*