

Lineáris egyenletrendszerek, leképezések, mátrixok

Az n ismeretlenes k egyenletből álló lineáris egyenletrendszer felírható mátrix-egyenlet alakban.

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \dots + \alpha_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \in T^{k \times n} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in T^k$$

A az együttható mátrix, \underline{x} az ismeretlenekből álló (oszlop)vektor, \underline{b} pedig a jobboldali konstansokból álló oszlopvektor. Ekkor az egyenletrendszer

$A\underline{x} = \underline{b}$ alakban írható.

Tekintsük T^n és T^k vektortereket, és rögzítsünk egy-egy bázist. Ekkor az A mátrix egy $A: T^n \rightarrow T^k$ lineáris leképezés mátrixa lesz.

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet megoldható akkor és csak akkor, ha \underline{b} T^k -beli vektor valamely \underline{x} T^n -beli vektor képeként írható, azaz $\underline{b} \in \text{Im}A$.

Legyen $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ a T^n tér rögzített bázisa. Ekkor az $A\underline{e}_1, A\underline{e}_2, \dots, A\underline{e}_n$ vektorok az $\text{Im}A$ tér egy generátorrendszerét alkotják.

Ezek pont az A mátrix

$\text{Im}A$ az $\{\underline{a}_i: i=1, \dots, n\}$ vektorok által generált altér. \underline{b}

pontosan akkor eleme ennek az altérnek, ha az $\{\underline{a}_i: i=1, \dots, n, \underline{b}\}$ rendszer is $\text{Im}A$ -t generálja.

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ki} \end{pmatrix} \text{ oszlopvektorai.}$$

Ez azt jelenti, hogy $\langle \underline{a}_i: i=1, \dots, n \rangle$ és $\langle \underline{a}_i: i=1, \dots, n, \underline{b} \rangle$ alterek dimenziója ugyanaz, azaz a két vektor rendszerből kiválasztható maximális lineárisan független rendszer elemszáma ugyanaz.

Mátrix rangja

Háromféle rang fogalmat definiálunk, majd belátjuk, hogy ugyanazok. Az első az előző észrevételeken alapul.

O. Definíció

Egy A mátrix oszloprangja r , ha A oszlopvektorai között található r lineárisan független, de r -nél több nem.

S. Definíció

Egy A mátrix sorrangja r , ha A sorvektorai között található r lineárisan független, de r -nél több nem.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

mátrix oszloprangja 2. Az első két oszlop lineárisan független. Ugyanakkor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$
 sorrangja 2. Az első két sor lineárisan független. A harmadik kifejezhető velük.

$(9 \ 10 \ 11 \ 12) = 2 \cdot (5 \ 6 \ 7 \ 8) - (1 \ 2 \ 3 \ 4)$

- ⊙ A nullmátrix oszloprangja 0.
- ⊙ Az $n \times n$ -es **E** egység mátrix sor- és oszloprangja n .
- ⊙ Egy $k \times n$ -es mátrix oszloprangja legfeljebb n (nincs több oszlop), másrészt a vektorok \mathbb{R}^k -ből valók, így legfeljebb k lineárisan független lehet köztük, hiszen \mathbb{R}^k dimenziója k .

Aldetermináns (nem előjeles!): egy négyzetes rész mátrix determinánsa.

Tetszőleges h oszlop és h sormetszeteiben álló h^2 elem által alkotott $h \times h$ -as mátrix determinánsa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 27 = -16$$

D. Definíció

Egy A mátrix determinánsrangja r , ha van olyan $r \times r$ -es al determinánsa ami nem nulla, de bármely r -nél nagyobb rendű al determinánsa már nulla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$$
 determináns rangja 2. Ugyanis

Azonban akármelyik harmadrendű al determinánsra igaz, hogy a harmadik sorához hozzáadva az első, majd ebből kivonva a második kétszeresét csupa 0 sort kapunk. Eközben viszont a determináns értéke nem változott.

Mátrix transzponáltja: Egy $k \times n$ -es A mátrix transzponáltja az az $n \times k$ -as A^T mátrix, melynek ij -ik eleme megegyezik A ji -ik elemével.

A és A^T determináns rangja megegyezik.

Tétel

Egy mátrix oszloprangja, sorrangja és determinánsrangja megegyezik.

Ezt a közös értéket nevezzük a mátrix rangjának, jele $r(A)$.

Bizonyítás

Legyen A sor-, oszlop- és determinánsrangja rendre $s(A)$, $\alpha(A)$, illetve $d(A)$.

- Elég belátni, hogy $\alpha(A) = d(A)$ minden A mátrixra. Ugyanis $s(A) = \alpha(A^T) = d(A^T) = d(A)$ következik.
- Az oszlop- és determinánsrangra belátjuk, hogy elemi sor ekvivalens átalakítások során nem változnak, valamint hogy a kapott RLA-ban mindkettő a vezéregyenes száma.

3. Legyenek az A mátrix oszlopvektorai $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$. Ekkor $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha az $x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_r \underline{a}_r = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van. Ez elemi sor ekvivalens átalakításokkal nem változik.

4. Determinánsrangra elég látni, hogy nem nő elemi sor ekvivalens átalakításokor. Ugyanis ha A -ból B -et kaptuk, akkor B -ből A az átalakítás inverzével kapható. Eközben $d(A) \geq d(B) \geq d(A)$.

Azaz, elég látni, hogy ha A -ban minden $h \times h$ -as al determináns 0, akkor B -ben is.

M1: Egy sor nem nulla skalárral való szorzása. Ha a B -beli al determináns tartalmazza ezt a sort, akkor az értéke a skalárszorosa egy A -belinek, ami 0. Ha pedig nem tartalmazza, akkor megegyezik egy A -beli al determinánssal, tehát 0.

M3: Két sort felcserélünk. Ekkor minden B -beli al determináns valamely A -belivel egyezik meg.

M4: Csupa 0 sort elhagyunk

M2: Valamelyik sorhoz egy másik skalárszorosát hozzáadjuk. Legyen D a B egy $h \times h$ -as al determinánsa.

- Ha D -ben nem szerepel a megváltoztatott sor, akkor megegyezik A egy al determinánsával, azaz 0.
- Ha D -ben szerepel a megváltoztatott sor, meg az is, amelynek a skalárszorosát hozzáadtuk, akkor A egy al determinánsából annak egy sorának skalárszorosát egy másik sorához adva kaptuk, azaz az értéke ugyanaz, 0.
- A megváltoztatott sor szerepel D -ben, de aminek skalárszorosát hozzáadtuk, nem. A kényelem kedvéért: az 1. sor λ -szorosát adtuk a 3. sorhoz, D az 1, 2, ..., h oszlopok és a 2, 3, ..., $h-1$ sorok metszete.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2h} \\ \alpha_{31} + \lambda \alpha_{11} & \alpha_{32} + \lambda \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{3h} + \lambda \alpha_{1h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{h+1,1} & \alpha_{h+1,2} & \cdots & \alpha_{h+1,h} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2h} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{h+1,1} & \alpha_{h+1,2} & \cdots & \alpha_{h+1,h} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2h} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{h+1,1} & \alpha_{h+1,2} & \cdots & \alpha_{h+1,h} \end{vmatrix} =$$

$$= D_1 + \lambda D_2$$

Itt D_1 az A mátrix egy h -rendű aldeterminánsa, azaz 0.
 D_2 pedig sorcserékkal alakítható azzá, azaz szintén 0.

5. Tekintsük az A mátrix RLA-ját, amelyben r darab vezéregyes van. Azonosan nulla sorok törlése után a sorok száma is r .

Tehát sem az oszloprang, sem a determinánsrang nem lehet r -nél több.

A vezéregyest tartalmazó oszlopok az $r \times r$ -es egység mátrixot alkotják, melynek oszlopai lineárisan függetlenek és a determinánsa 1. Tehát mindkét rang tényleg r .

Tétel

Az $Ax=b$ egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $r(A)=r(A|b)$, azaz az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával. A megoldás akkor és csak akkor egyértelmű, ha a (közös) rang megegyezik az ismeretlenek számával.

Bizonyítás

Az egyenletrendszert $x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ra_r = b$ alakban írjuk.

I. Legyen először $r(A)=r(A|b)$, és legyen a_1, a_2, \dots, a_r r -elemű független rendszer. Az a_1, a_2, \dots, a_r, b rendszer lineárisan összefüggő $r(A|b)=r$ miatt. Ekkor b kifejezhető az a_1, a_2, \dots, a_r vektorok lineáris kombinációjaként. A többi oszlopvektort 0 együtthatóval hozzávesszük.

II. Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor vannak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ számok, hogy b az a_j oszlopvektorok lineáris kombinációja

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_r a_r \quad (*)$$

Legyen $r(A)=r$. Tekintsük $A|b$ $r+1$ oszlopvektorát.

(i) Ha ezek közt b nem szerepel, akkor $r(A)=r$ miatt lineárisan összefüggők.

(ii) Ha az $r+1$ vektor közül az r darab A -beli összefügg, akkor az $r+1$ vektor is.

(iii) Ha az r darab A -beli lineárisan független, mondjuk a_1, a_2, \dots, a_r , akkor bármelyik másik a_j kifejezhető a lineáris kombinációjuként. Ezeket a kifejezéseket $(*)$ -ba behelyettesítve kapjuk, hogy b is előáll a_1, a_2, \dots, a_r lineáris kombinációjaként, azaz az $r+1$ vektor lineárisan összefügg. Tehát $r(A) \leq r(A|b) \leq r$

III. Megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha b egyértelműen áll elő A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként. \Leftrightarrow Az A oszlopvektorai lineárisan függetlenek, azaz $r(A)$ =oszlopok száma=ismeretlenek száma

Példa

Egy $k \times n$ -es A mátrix rangja 1 akkor és csak akkor, ha egy nem nulla oszlopvektor ($k \times 1$ -es mátrix) és egy nem nulla sorvektor ($1 \times n$ -es mátrix) szorzata.

Tegyük fel, hogy $r(A)=1$. Ekkor az oszlopvektorai közül bármely kettő összefügg, azaz $a_j = \alpha_j a_1$ (feltehetjük, hogy a_1 nem 0). Tehát

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} \cdot (1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots \quad \alpha_n)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a_1}$

Legyen $A = \underline{u} \cdot \underline{v}^T$ egy oszlop és egy sorvektor szorzata. Ekkor akármelyik oszlopvektora az \underline{u} egy skalárszorosa, azaz egymással összefüggők.

Mátrix inverze

Közönséges számok esetén az $ax=b$ egyenletet $1/a$ -val való beszorzóással oldjuk meg.

Lehet-e hasonló tenni az $A\underline{x}=\underline{b}$ egyenlettel is?

$1/a$ a szorzásra vonatkozó inverze a -nak: $a(1/a)=(1/a)a=1$.

$1/a = a^{-1}$.

Analógia: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ az egységmátrix. Ha mindkét szorzás értelmes, akkor A szükségképpen négyzetes. Tehát innentől egy darabig minden mátrixról feltesszük, hogy négyzetes.

Definíció

B az A mátrix balinverze, ha $BA=E$.

J az A mátrix jobbinverze, ha $AJ=E$.

K az A mátrix inverze, ha $AK=KA=E$, azaz ha bal- és jobbinverz is.

Állítás

Ha az A mátrixnak létezik balinverze és jobbinverze is, akkor ezek egyenlők.

Bizonyítás

Legyen B balinverz, J jobbinverz. Ekkor

$(BA)J=EJ=J$, valamint $(BA)J=B(AJ)=BE=B$.

Tétel

I. Ha $\det A \neq 0$, akkor A -nak létezik kétoldali inverze.

II. Ha A -nak létezik bal- vagy jobbinverze, akkor $\det A \neq 0$.

Következmény

Az egyik oldali inverz létezése maga után vonja a másik oldali létezését, és a két inverz egyenlő.

Bizonyítás(a tételé)

I. Legyen \hat{A} az a mátrix, amelyik i -ik sora és j -ik eleme A_{ji} , az α_{ji} elemhez tartozó előjeles aldetermináns. Ekkor

$$A\hat{A} = \hat{A}A = (\det A) \cdot E = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Nem ij!

$$A\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Az $A\hat{A}$ mátrix j -ik sorának j -ik eleme az A mátrix j -ik sorának és az \hat{A} mátrix j -ik oszlopának szorzata:

$$\alpha_{j1}A_{j1} + \alpha_{j2}A_{j2} + \dots + \alpha_{jn}A_{jn}$$

ami j esetén a Kifejtési Tétel szerint pont $\det A$, $j \neq j$ esetén pedig a Ferde Kifejtési Tétel szerint 0.

Az $\hat{A}A$ szorzat hasonló, a Kifejtési Tételt oszlopokra kell használni. Jelölje A^{-1} az A mátrix kétoldali inverzét. Azt kaptuk

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$$

II bizonyításához használjuk a Determinánsok Szorzattételét:

Tétel (Determinánsok Szorzattétele)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Bizonyítás

Igazán csak ellenőrizni kell, hogy az egyenlőség két oldalán milyen összegek szorzatai állnak, és azok hogyan fejthetők ki a disztributivitási szabályok alapján.

$$\det(AB) = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{1k} \beta_{k\sigma(1)} \right) \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{2k} \beta_{k\sigma(2)} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{nk} \beta_{k\sigma(n)} \right) = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} \alpha_{1k_1} \beta_{k_1\sigma(1)} \alpha_{2k_2} \beta_{k_2\sigma(2)} \dots \alpha_{nk_n} \beta_{k_n\sigma(n)}$$

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \left(\sum_{\mu} (-1)^{I(\mu)} \alpha_{1\mu(1)} \alpha_{2\mu(2)} \cdots \alpha_{n\mu(n)} \right) \left(\sum_{\tau} (-1)^{I(\tau)} \beta_{1\tau(1)} \beta_{2\tau(2)} \cdots \beta_{n\tau(n)} \right)$$

$$= \sum_{\mu, \tau} (-1)^{I(\mu)} \alpha_{1\mu(1)} \alpha_{2\mu(2)} \cdots \alpha_{n\mu(n)} (-1)^{I(\tau)} \beta_{1\tau(1)} \beta_{2\tau(2)} \cdots \beta_{n\tau(n)}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} \alpha_{1k_1} \beta_{k_1\sigma(1)} \alpha_{2k_2} \beta_{k_2\sigma(2)} \cdots \alpha_{nk_n} \beta_{k_n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma, \pi} (-1)^{I(\sigma)} \alpha_{1\pi(1)} \alpha_{2\pi(2)} \cdots \alpha_{n\pi(n)} \beta_{\pi(1)\sigma(1)} \beta_{\pi(2)\sigma(2)} \cdots \beta_{\pi(n)\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \sum_{1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n} \alpha_{1k_1} \beta_{k_1\sigma(1)} \alpha_{2k_2} \beta_{k_2\sigma(2)} \cdots \alpha_{nk_n} \beta_{k_n\sigma(n)}$$

Ez utóbbi összeg olyan determinánsok szorzatainak összege, melyeknek van azonos oszlopaik, illetve soraik, azaz nullák.

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \sum_{\mu, \tau} (-1)^{I(\mu)} \alpha_{1\mu(1)} \alpha_{2\mu(2)} \cdots \alpha_{n\mu(n)} (-1)^{I(\tau)} \beta_{1\tau(1)} \beta_{2\tau(2)} \cdots \beta_{n\tau(n)} =$$

$$= \sum_{\mu, \omega} (-1)^{I(\mu)} \alpha_{1\mu(1)} \alpha_{2\mu(2)} \cdots \alpha_{n\mu(n)} (-1)^{I(\omega)+I(\mu)} \beta_{\mu(1)\omega(1)} \beta_{\mu(2)\omega(2)} \cdots \beta_{\mu(n)\omega(n)}$$

Mivel tudjuk, hogyan kell egy szorzat előjelét felírni, ha nem a sorok szerint rendezve írjuk. Ez utóbbi összeg pedig megegyezik a baloldal nem nulla részével.

Itt ω az a permutáció, amelyik i -hez $\tau(\mu(i))$ -t rendel.

Ezek után, ha egy \mathbf{A} mátrixnak van balinverze (jobbinverze) \mathbf{B} (\mathbf{J}), akkor $1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{B} \det \mathbf{A}$, azaz egyik determináns sem lehet 0.

Reguláris és szinguláris mátrixok

Definíció

Egy négyzetes mátrixot szingulárisnak nevezünk, ha a determinánsa 0, egyébként reguláris.

Tétel (összefoglaló)

Az alábbiak ekvivalensek:

- ☞ $\det \mathbf{A}$ nem nulla
- ☞ \mathbf{A} -nak létezik kétoldali inverze
- ☞ \mathbf{A} -nak létezik jobbinverze
- ☞ \mathbf{A} -nak létezik balinverze
- ☞ az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása van
- ☞ van olyan $\mathbf{b} (\in \mathbb{R}^n)$, melyre az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van
- ☞ bármely $\mathbf{b} (\in \mathbb{R}^n)$ -re az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van
- ☞ $r(\mathbf{A}) = n$
- ☞ \mathbf{A} oszlopai lineárisan függetlenek
- ☞ \mathbf{A} sorai lineárisan függetlenek.

Az \mathbf{A} jobbinverze az $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ mátrixegyenlet megoldása. Legyenek \mathbf{X} oszlopai $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ az \mathbf{E} oszlopai $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

$\mathbf{AX} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{Ax}_i = \mathbf{e}_i$ minden i -re. Azaz \mathbf{A}^{-1} meghatározáshoz ezt az n egyenletrendszert kell megoldani. Ha $\det \mathbf{A}$ nem 0, akkor mindegyik egyenletrendszer egyértelműen megoldható, azaz van inverz.

Ha $\det \mathbf{A} = 0$, akkor legalább az egyik $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{e}_i$ egyenletrendszer nem oldható meg. Ugyanis a Gauss eliminációval kapott RLA determinánsa is 0, azaz van csupa 0 sora. Ekkor van \mathbf{b} , hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nem oldható meg. Viszont ha minden $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{e}_i$ megoldható lenne, akkor a megoldásaikból „kikombinálható” lenne az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ megoldása is.

Mátrix inverz számítása gyakorlatban

Az $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{Ax}_n = \mathbf{e}_n$ egyenletrendszerek egyszerre kezelhetők.

Írjuk le \mathbf{A} -t, majd a vonal mellé $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ -et, azaz \mathbf{E} -t:

$\mathbf{A} | \mathbf{E}$. Gauss eliminációt alkalmazunk.

Ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor az \mathbf{A} -ból kapott RLA az egységmátrix, és akkora jobboldalokból pont \mathbf{A}^{-1} lesz.

Ha viszont $\det \mathbf{A} = 0$, akkor az RLA utolsó sora csupa 0, és ez valamelyik egyenletrendszernek tilos sort ad, azaz nincs inverz.

Azt hogy $\det \mathbf{A} = 0$, vagy nem, nem kellett kiszámolni előre, a Gauss eliminációból kiderült.

Tétel

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix mellé írjuk le az $n \times n$ -es E egységmátrixot: $A|E$. A -nak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $A|E$ -ből Gauss eliminációval $E|B$ alakú mátrixhoz jutunk, és ekkor $A^{-1}=B$.

Példa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad A|E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A^{-1}