

## Zárthelyi: Október 31 szerda 15-17 óráig

Ez úgy értendő, hogy 15:15-kor  
kezdjük az íratást, 100 perc  
munkaidő áll rendelkezésre.

Terembeosztás

A-D: IB 028

E-Ké: E.I.B.

Ki-Pe: K.II.21.

Po-ZS: Ch.Max.

## Sajátérték, minimálpolinom

Sajátérték, sajátvektor

$V$  véges ( $n$ ) dimenziós, nem nulla vektortér  $T$ -test felett. Hom  $V$  a  $V$  önmagára való lineáris leképezéseinek (lineáris transzformációinak) vektortere.

Hom  $V$  dimenziója  $n^2$ . Az  $A_{ij}$  leképezések ahol  $A_{ij}e_j = \delta_{ik}e_k$ , ahol  $\delta_{ik}$  a Kronecker delta, bázist alkotnak Hom  $V$ -ben.  $V$  bázisa az  $\{e_i; i=1, \dots, n\}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Lineáris leképezést meghatározzák a báziselemek képei. Legyen

$$Be_i = v_i = \lambda_{i1}e_1 + \lambda_{i2}e_2 + \dots + \lambda_{in}e_n. \text{ Ekkor } B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} A_{ij}$$

### Definíció

Egy  $\lambda$   $T$ -beli skalárt az  $A$  lineáris transzformáció sajátértéke, ha létezik nemnulla  $V$ -beli  $v$  vektor, melyre  $Av = \lambda v$ .

### Definíció

Egy nemnulla  $v$   $V$ -beli vektor az  $A$  lineáris transzformáció sajátvektora, ha létezik olyan  $\lambda$   $T$ -beli skalár, melyre  $Av = \lambda v$ .

$v$  NEM lehet  $0$ , de  $\lambda=0$  lehetséges.

### Példa

- A közös síkvektorok terében a  $180^\circ$ -os elforgatásnak minden nemnulla  $v$  vektor sajátvektora,  $-1$  sajátértékkal.
- A térvektorok között az  $(x, y)$ -síkra való tükrözésnek minden ebben a síkban levő vektor sajátvektora  $1$  sajátértékkal, a  $z$  egyenesbe eső vektorok pedig  $-1$  sajátértékkal.
- Ha  $V$ -a legfeljebb  $n$ -edfokú polinomok vektortere, akkor az  $f: x \mapsto x^n$  leképezés sajátvektorai a  $C^n$  alakú polinomok,  $n$  sajátértékkal

### Tétel

- Minden sajátvektorhoz pontosan egy sajátérték tartozik.
- Egy adott  $\lambda$  sajátértékhez tartozó összes sajátvektor és a  $0$  alteret alkotnak. Ezt a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátértékternek nevezzük.

#### Bizonyítás

I. Ha  $Av = \lambda v$ , akkor  $(\lambda - \mu)v = 0$ , azaz mivel  $v$  nemnulla,  $\lambda - \mu = 0$ .

II. Legyen  $Av = \lambda v$ ,  $Aw = \lambda w$ . Ekkor  $A(v+w) = Av + Aw = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$ .

$A(cv) = cAv = c\lambda v = \lambda(cv)$ . Tehát a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektorok halmaza zárt az összeg képzésre és skalárral való szorzásra, azaz alternál.

### Tétel

Egy lineáris transzformáció mátrixa akkor és csak akkor diagonális, ha sajátvektorokból álló bázisban írtuk fel. Ekkor a főátlóban álló elemek a megfelelő bázisvektorhoz tartozó sajátértékek.

#### Bizonyítás

$$[A]_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha  $Ae_1 = \lambda_1 e_1, \dots, Ae_n = \lambda_n e_n$ .

Példa

Az  $\mathbf{A}$  transzformáció mátrixa az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 3(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

$\mathbf{A}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 0(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

$\mathbf{A}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 0(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

Az  $\mathbf{A}$  mátrixa az  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  bázisban tehát

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Karakterisztikus polinom

Tétel

Legyen  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  bázis  $V$ -ben,  $\mathbf{A} \in \text{Hom } V$ . Egy  $\lambda \in T$  skalár pontosan akkor sajátértéke  $\mathbf{A}$ -nak, ha az  $[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}]_{\mathbf{e}}$  mátrix determinánása  $\det([\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}]_{\mathbf{e}}) = 0$ .

Bizonyítás

$\lambda$  sajátérték  $\Leftrightarrow$  van  $\mathbf{x} \neq 0$ , melyre  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = 0$ .  $\Leftrightarrow$  mátrix alakban  $[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}][\mathbf{x}] = [0]$ . Azaz  $\lambda$  pontosan akkor sajátérték, ha ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.  $\Leftrightarrow$  együtthatómátrix determinánása  $\det([\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}]_{\mathbf{e}}) = 0$ .

Definíció

Legyen az  $\mathbf{A} \in \text{Hom } V$  transzformáció mátrixa valamilyen bázisban

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Az  $\mathbf{A}$  karakterisztikus polinomján

$$k_{\mathbf{A}}(x) = \det[\mathbf{A} - x \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}$$

polinomot értjük.

A karakterisztikus polinom  $n$ -ed fokú, főegyütthatója  $(-1)^n$ .

$n-1$ -ed fokú tag együtthatója az  $[\mathbf{A}]$  főátlójában levő elemek összegének  $(-1)^{n-1}$ -szerese. (Ez utóbbi összeget a mátrix nyomának hívják.)

Hoppá!!!! Hiszen ez a definíció függ a bázis választásától, amelyben a transzformáció mátrixát felírtuk!!

Vagy mégsem?

Tétel

Legyen a  $V$  egy bázisa  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  illetve  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ . Legyen  $\mathbf{S}$  az az egyértelmű lineáris transzformáció, melyre  $\mathbf{S}\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_j$ . Ekkor bármely  $\mathbf{A} \in \text{Hom } V$ -re

$$[\mathbf{A}]_{\mathbf{f}} = [\mathbf{S}]_{\mathbf{e}}^{-1} \cdot [\mathbf{A}]_{\mathbf{e}} \cdot [\mathbf{S}]_{\mathbf{e}}$$

Bizonyítás

Legyenek az (új)  $[\mathbf{A}]_{\mathbf{f}}$  mátrix elemei  $\alpha'_{ij}$ . Ekkor  $[\mathbf{A}]_{\mathbf{f}}$   $j$ -ik oszlopa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{f}_j) = \alpha'_{1j} \mathbf{f}_1 + \alpha'_{2j} \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha'_{nj} \mathbf{f}_n$$

$(\mathbf{AS})(\mathbf{e}_j) = \mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{e}_j)$ ,  $\mathbf{S}\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_j$  alapján:

$$(\mathbf{AS})(\mathbf{e}_j) = \mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{e}_j) = \mathbf{A}\mathbf{f}_j = \alpha'_{1j} \mathbf{f}_1 + \alpha'_{2j} \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha'_{nj} \mathbf{f}_n = \alpha'_{1j} \mathbf{S}\mathbf{e}_1 + \alpha'_{2j} \mathbf{S}\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha'_{nj} \mathbf{S}\mathbf{e}_n = \mathbf{S}(\alpha'_{1j} \mathbf{e}_1 + \alpha'_{2j} \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha'_{nj} \mathbf{e}_n)$$

Balról  $\mathbf{S}^{-1}$ -el szorozva:

$$(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS})(\mathbf{e}_j) = \alpha'_{1j} \mathbf{e}_1 + \alpha'_{2j} \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha'_{nj} \mathbf{e}_n$$

Azaz az  $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$  leképezés  $\mathbf{e}$ -bázisban felírt mátrixa megegyezik az  $\mathbf{A}$  leképezés  $\mathbf{f}$ -bázisban felírt mátrixával. Ugyanakkor

$$[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{S}]_{\mathbf{e}}^{-1} \cdot [\mathbf{A}]_{\mathbf{e}} \cdot [\mathbf{S}]_{\mathbf{e}}$$

A karakterisztikus polinom független a bázis választásától:

$$k_{\mathbf{A}}(x) = \det[\mathbf{A} - x \mathbf{E}]_{\mathbf{f}} = \det[\mathbf{S}^{-1}]_{\mathbf{e}} \det[\mathbf{A} - x \mathbf{E}]_{\mathbf{e}} \det[\mathbf{S}]_{\mathbf{e}} = \det[\mathbf{A} - x \mathbf{E}]_{\mathbf{e}} \det[\mathbf{S}^{-1}]_{\mathbf{e}} \det[\mathbf{S}]_{\mathbf{e}} = \det[\mathbf{A} - x \mathbf{E}]_{\mathbf{e}} \det[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}]_{\mathbf{e}} = \det[\mathbf{A} - x \mathbf{E}]_{\mathbf{e}} \det[\mathbf{E}]_{\mathbf{e}} = \det[\mathbf{A} - x \mathbf{E}]_{\mathbf{e}}$$

Determinánsok szorzattétele szerint

$\mathbf{e}$ -bázisról  $\mathbf{f}$ -bázisra áttérés mátrixa

A két determináns ugyanaz

Sajátérték számítás:

$\det([\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}]_B)$  a  $\lambda$  ismeretlennek  $n$ -ed fokú polinomja, gyökei a sajátértékek.

Sajátvektor számítás:

$\lambda$  sajátértékhez a homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásait kell megtalálni.

Példa

Legyen  $\mathbf{A}$  a síkvektorok  $x$ -tengelyre vonatkozó tükrözése.  $\mathbf{A}$  mátrixa a szokásos bázisban

$$\det([\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}]_B) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Azaz a sajátértékek  $1, -1$ .  
A sajátvektorokat meghatározó egyenletrendszerek:

$$\begin{aligned} \lambda = 1: & \begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + -2 \cdot x_2 = 0 \end{cases} & \lambda = -1: & \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Minimálpolinom

$V$   $n$ -dimenziós vektortér  $T$  felett,  $n > 0$ ,  $\mathbf{A} \in \text{Hom } V$ ,  $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k \in T[x]$ .

Értelmezzük az  $f(\mathbf{A})$  helyettesítési értéket, mint egy  $\text{Hom } V$ -beli lineáris transzformációt.

$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$ . Így  $f(\mathbf{A}) = a_0 \mathbf{E} + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_k \mathbf{A}^k \in \text{Hom } V$ .  $\mathbf{A}$  gyöke  $f$ -nek, ha  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  a nulla leképezés.

Definíció

Az  $f$  polinom az  $\mathbf{A}$  transzformáció minimálpolinomja, ha  $f$  a legkisebb fokú olyan nemnulla polinom, melynek az  $\mathbf{A}$  gyöke. Jelölés:  $m_{\mathbf{A}}$ .

Tétel

Tetszőleges  $\mathbf{A}$ -nak létezik minimálpolinomja, és az konstans szorzó erejéig egyértelmű.

Bizonyítás

Létezik: Tekintsük  $\text{Hom } V$ -ben az  $\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{n^2}$  ( $n = \dim V$ )

transzformációkat.  $\dim \text{Hom } V = n^2$ , ezért ezek lineárisan összefüggők: létezik  $c_0, c_1, \dots, c_n$   $T$ -beli skalárok, nem mind 0, hogy

$$c_0 \mathbf{E} + c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}^2 + \dots + c_n \mathbf{A}^{n^2} = \mathbf{0}$$

azaz  $\mathbf{A}$  gyöke az  $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^{n^2}$  polinomnak.

Egyértelmű: legyen  $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$  és  $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$  is minimálpolinomja  $\mathbf{A}$ -nak.  $(a_k, b_k \neq 0)$ .  $h = a_k g - b_k f$  polinomra

$$h(\mathbf{A}) = a_k g(\mathbf{A}) - b_k f(\mathbf{A}) = a_k \mathbf{0} - b_k \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de  $h$  foka kisebb  $k$ -nál, azaz  $h = 0$ ,  $f = cg$ , ahol  $c = a_k/b_k$

Megjegyzés:  $(f+g)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A})$  és  $(fg)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})g(\mathbf{A})$ .

Kijött:  $\deg m_{\mathbf{A}} \leq n^2$

Tétel (Cayley-Hamilton -tétel)

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, azaz van olyan  $f(x) \in T[x]$ , hogy  $k_{\mathbf{A}}(x) = f(x)m_{\mathbf{A}}(x)$  minden  $\mathbf{A} \in \text{Hom } V$ -re.

Következmény:  $\deg m_{\mathbf{A}} \leq n$ .

Tétel

$$g(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow m_{\mathbf{A}} | g$$

Bizonyítás

Ha  $m_{\mathbf{A}} | g$ , akkor  $g = t \cdot m_{\mathbf{A}}$ , azaz  $g(\mathbf{A}) = t(\mathbf{A}) \cdot m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = t(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

Legyen  $g(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . Ekkor  $g = t \cdot m_{\mathbf{A}} + r$  ahol  $\deg r < \deg m_{\mathbf{A}}$  vagy  $r = 0$ .

$r(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}) - t(\mathbf{A}) \cdot m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0} - t(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Mivel  $r$  foka kisebb, mint a minimálpolinomé, ezért ez csak úgy lehet, ha  $r = 0$ .

Tehát Cayley-Hamilton: minden transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Tétel

A minimálpolinom  $T$ -beli gyökei éppen a sajátértékek.

Bizonyítás

Legyen  $m_{\mathbf{A}} = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ , valamint  $\lambda \in T$  sajátérték. Ekkor van  $\underline{u}$  nemnulla, hogy  $\mathbf{A}\underline{u} = \lambda \underline{u}$ . Ekkor  $\mathbf{A}^k \underline{u} = \lambda^k \underline{u}$ .

$m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  alkalmazva  $\underline{u}$ -ra:

$$\mathbf{0} = m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\underline{u} = (a_0 \mathbf{E} + a_1 \mathbf{A} + \dots + a_k \mathbf{A}^k)\underline{u} = a_0(\mathbf{E}\underline{u}) + a_1(\mathbf{A}\underline{u}) + \dots + a_k(\mathbf{A}^k \underline{u}) = a_0(\underline{u}) + a_1(\lambda \underline{u}) + \dots + a_k(\lambda^k \underline{u}) = (a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_k \lambda^k)\underline{u} = m_{\mathbf{A}}(\lambda)\underline{u}.$$

Mivel  $\underline{u}$  nemnulla, ezért  $\mathbf{0} = m_{\mathbf{A}}(\lambda)\underline{u}$ -ból  $m_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$  következik.

Legyen  $\lambda \in T$  gyöke  $m_{\mathbf{A}}$ -nak. Ekkor  $m_{\mathbf{A}} = (x - \lambda)g$ .

$\mathbf{0} = m_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})g(\mathbf{A}) \Rightarrow \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \supseteq \text{Im } g(\mathbf{A})$ .  $\deg g < \deg m_{\mathbf{A}}$ , ezért  $g(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ , tehát  $\text{Im } g(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$ . Így  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \neq \mathbf{0}$  is igaz. Viszont  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$  bármely nemnulla eleme  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektor, azaz  $\lambda$  sajátérték.

## Bilineáris függvények

Bilineáris függvények, kvadratikus alakok: geometriából, másodrendű görbék, felületek vizsgálata.

Általános merőlegesség fogalom

Szép bilineáris függvény: skaláris szorzat

Kiseb változtatásokkal komplex számtest felett is értelmezhető

## Valós bilineáris függvény

Bi-: kétszeresen, kettő (mint bicikli, azaz kétkerekű).

Definíció

Legyen  $V$  vektortér  $\mathbb{R}$  felett. Az  $A: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés (valós) bilineáris függvény, ha mindkét változójában lineáris, azaz az egyik változó bármely rögzített értéke esetén a másikban lineáris.

Vagyis  $u, v, u', v' \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  esetén

- $A(u, v)$  egyértelmű valós szám
- $A(u + u', v) = A(u, v) + A(u', v)$
- $A(\lambda u, v) = \lambda A(u, v)$
- $A(u, v + v') = A(u, v) + A(u, v')$
- $A(u, \lambda v) = \lambda A(u, v)$

Példa

- Közös sík illetve térvektorok geometriai skaláris szorzata.

- Skaláris szorzás  $\mathbb{R}^k$ -ban:  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ , akkor  $A(u, v) = \sum_{i=1}^k u_i v_i$

- $u_1 v_3 + 3u_2 v_1 - 77u_3 v_2$ , stb.

- Minden vektorpárhoz a 0 valóst rendelve kapjuk a **0** bilineáris leképezést

- $V$  a  $[0, 1]$  -en értelmezett folytonos függvények vektortere a valós számtest felett. Egy  $f, g$  függvénypárhoz rendeljük a

$$A(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Továbbiakban csak véges dimenzió.

Tétel

Legyen  $b_1, b_2, \dots, b_n$  bázis a  $V$  vektortérben. és  $\alpha_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$  tetszőleges valós számok. Ekkor pontosan egy olyan  $A$  bilineáris függvény létezik, melyre

$$A(b_i, b_j) = \alpha_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Bizonyítás

Legyen  $u$  és  $v$  két tetszőleges  $V$ -beli vektor.  $u = u_1 b_1 + \dots + u_n b_n$  és  $v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n$  egyértelműen. Ha létezik  $A$ , akkor

$$A(u, v) = A(u_1 b_1 + \dots + u_n b_n, v_1 b_1 + \dots + v_n b_n) =$$

$$\sum_{i,j=1}^n u_i v_j A(b_i, b_j) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \alpha_{ij}$$

Az, hogy a  $A(u, v) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \alpha_{ij}$  függvény valóban bilineáris, házi feladat.

Definíció

Az  $A$  bilineáris függvény  $b_1, b_2, \dots, b_n$  bázis szerinti mátrixán azt az  $n \times n$ -es mátrixot értjük, melyben az  $i$ -ik sor  $j$ -ik eleme  $\alpha_{ij} = A(b_i, b_j)$  és  $[A]_b$ -vel jelöljük.

Tétel

Rögzített bázisban kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a  $V$ -n értelmezett bilineáris függvények és az  $n \times n$ -es valós mátrixok között.

$$A(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} u_i v_j$$

vagy mátrixos alakban:

$$A(u, v) = [u]^T [A] [v] =$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Jelölje az  $u$  és  $v$  vektorok skaláris szorzatát  $u \cdot v$ . Ekkor minden  $A$  Hom  $V$ -beli lineáris transzformációra  $A(u, v) = u \cdot Av$  bilineáris függvényt határoz meg,  $A$  és  $A$  mátrixa egyazon rögzített bázisban ugyanaz, valamint minden bilineáris függvény előáll ilyen módon alkalmas Hom  $V$ -beli  $A$ -val.

## Ortogonalizálás

Mikor lesz egy bilineáris függvény mátrixa diagonális?

Kell, hogy szimmetrikus legyen.

Definíció

Egy  $A$  bilineáris függvény szimmetrikus, ha minden  $u, v \in V$ -re  $A(u, v) = A(v, u)$ .

Állítás

Egy  $A$  bilineáris függvény akkor és csak akkor szimmetrikus, ha a tetszőleges bázisban felírt mátrixa szimmetrikus.

### Tétel

Legyen  $A$  szimmetrikus bilineáris függvény  $V$ -n. Ekkor létezik olyan bázis, melyben  $A$  mátrixa diagonális.

Diagonális  $\Leftrightarrow A(b_i, b_j) = 0$ , ha  $i \neq j$ . Speciálisan, ha térvektorokról van szó, és  $A$  a skaláris szorzás, akkor a mátrix diagonális pontosan akkor, ha a bázisvektorok páronként merőlegesek.

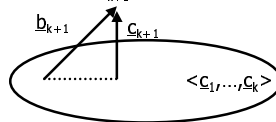
### Definíció

Legyen  $A$  szimmetrikus bilineáris függvény. Az  $u, v$  vektorok  $A$ -ortogonálisak, ha  $A(u, v) = 0$ .

Tétel: minden szimmetrikus  $A$ -hoz van  $A$ -ortogonális bázis.

### Bizonyítás (Gram-Schmidt ortogonalizáció)

Rekurzívan konstruáljuk a bázist. Kiindulunk a  $b_1, \dots, b_n$  bázisból. Ha már  $c_1, \dots, c_k$  megvan, úgy, hogy  $\langle b_1, \dots, b_k \rangle = \langle c_1, \dots, c_k \rangle$ , akkor vesszük  $b_{k+1}$ -nek erre az altérre való merőleges vetületét, és annak, illetve az egy az altérre merőleges vektornak az összegeként írva  $b_{k+1}$ -et, ez utóbbit vesszük  $c_{k+1}$ -nek.



Feltesszük, hogy  $A(u, u) \neq 0$ , ha  $u \neq 0$ . Legyen  $b_1, \dots, b_n$  tetszőleges bázis.

$$c_1 = b_1$$

$$c_2 = b_2 + \rho_{21}c_1$$

$$c_3 = b_3 + \rho_{31}c_1 + \rho_{32}c_2$$

$\vdots$

$$c_n = b_n + \rho_{n1}c_1 + \rho_{n2}c_2 + \dots + \rho_{n,n-1}c_{n-1}$$

$c_1, \dots, c_n$  a  $\rho_{pq}$  skalárok bármely értéke mellett generátorrendszer, mivel  $b_j$  a  $j$ -ik sor alapján kifejezhető belőlük. A tér  $n$ -dimenziós, így  $c_1, \dots, c_n$  bázis is.

Az ortogonalitáshoz a skalárokat sorban választjuk meg, hogy a  $c_1, \dots, c_j$  vektorok páronként ortogonálisak legyenek  $j=2, 3, \dots, n$ -re.

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 \\ c_2 &= b_2 + \rho_{21}c_1 \\ c_3 &= b_3 + \rho_{31}c_1 + \rho_{32}c_2 \\ &\vdots \\ c_n &= b_n + \rho_{n1}c_1 + \rho_{n2}c_2 + \dots + \rho_{n,n-1}c_{n-1} \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy  $c_1, \dots, c_{m-1}$ -ről tudjuk az ortogonalitást. Legyen  $m > j$ . Ekkor kell hogy  $0 = A(c_m, c_j)$ .

$$\begin{aligned} A(c_m, c_j) &= A(b_m + \rho_{m1}c_1 + \rho_{m2}c_2 + \dots + \rho_{mj}c_j + \dots + \rho_{m,m-1}c_{m-1}, c_j) = \\ &= A(b_m, c_j) + \rho_{m1}A(c_1, c_j) + \rho_{m2}A(c_2, c_j) + \dots + \rho_{mj}A(c_j, c_j) + \dots \\ &\quad + \rho_{m,m-1}A(c_{m-1}, c_j) = A(b_m, c_j) + \rho_{mj}A(c_j, c_j), \text{ ahonnan } \rho_{mj} \text{-re adódik egyenlet.} \end{aligned}$$

ez nem 0

ezek 0-k