

Bevezetés a Számításelméletbe II. 6. előadás

Sali Attila

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

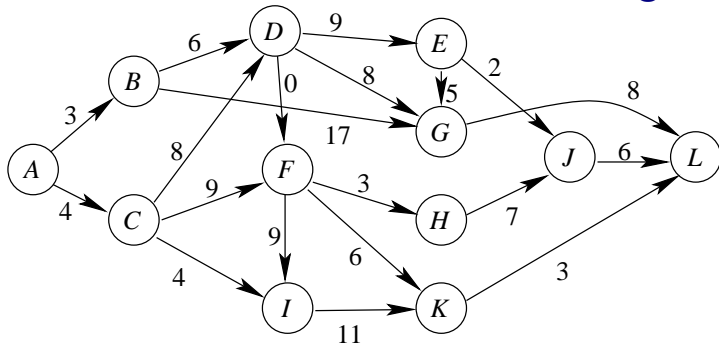
`sali@cs.bme.hu`

2002 március 19.

A kritikus út módszere (PERT-módszer)

Az „emeletekre bontás” fontos alkalmazása az úgynevezett PERT-módszer. Az elnevezés az angol „Program Evaluation and Review Technique” rövidítéséből származik.

Tegyük fel, hogy egy összetett feladatot több alvállalkozóval kell elvégeztetni. Az egyes részfeladatok nem végezhetőek el egymástól függetlenül: pl. egy házépítés során a kőművesmunkák nyilván megelőzik a festési munkákat. A helyzetet egy G gráffal szemléltethetjük, melynek pontjai a részfeladatok, és egy l hosszúságú (x, y) irányított él azt fejezi ki, hogy az y részfeladat nem kezdhető el korábban, mint az x kezdése után l idővel. $l = 0$ is lehetséges: x és y ilyenkor kezdhető egyszerre, vagy y későbben.



Mikor tud elindulni Kis Béla?

A feladat jellegénél fogva egy ilyen gráf nem tartalmazhat irányított kört. Ha egy összehasonlítási gráfot irányítottan tekintünk (azaz $x \prec y \iff (x, y) \in E$), az ilyen. Megfordítva, ha egy irányított körmentes gráfba behúzzuk a **tranzitivitás**ból adódó éleket (képezzük a **tranzitív lezárt**át), akkor összehasonlítási gráfot kapunk.

A gráf emeletekre bontható: Először a nyelő(ke)t¹ helyezzük a jobbszélső halmazba, ennek elhagyása után keletkező (és szintén irányított kört nem tartalmazó) gráf nyelőit a jobbról második halmazba és így tovább.

Ezek után balról jobbra haladva, szintenként, meghatározhatjuk minden tevékenység elkezdésének lehetséges legkorábbi időpontját. A bal szélső tevékenység(ek) azonnal (0. időpontban) megkezdhető(ek), később egy y tevékenységhez tekintsük át az összes olyan x_1, x_2, \dots tevékenységet, melyre $(x_i, y) \in E(G)$, és ha ezek legkorábban a t_1, t_2, \dots időpontban kezdhetőek el, akkor y elkezdésére legkorábban a **$\max(t_1 + l(x_1, y), t_2 + l(x_2, y), \dots)$** időpontban kerülhet sor.

¹ **Nyelő**: olyan csúcs melyből nem megy **ki** él

Kritikus út

Megjelöljük nyelő(k)ből visszafelé azokat az (x_i, y) éleket, melyeken a fenti maximumok felvételnek. A megjelölt élek a G gráf kritikus élei, az ezek által meghatározott részgráf mindig tartalmaz legalább egy irányított utat a forrásból a nyelőbe. Ezeket az utakat *kritikus út*nak nevezzük, nyilván ezek a leghosszabb utak a forrásból a nyelőbe.

Az ilyen kritikus utakon lévő pontoknak megfelelő részfeladatok bármelyikének késedelmes elvégzése az egész összetett feladat befejezését késleltetné (innét a kritikus út elnevezés). Ha viszont egy pont nincs kritikus úton, akkor a megfelelő feladat késedelmes elvégzése bizonyos határon belül még elfogadható.

Bonyolultság

A részfeladatok „beprogramozásához” (vagyis a kezdési időpontok meghatározásához) szükséges lépések száma a G pontjainak fokszámösszegével (vagyis e -vel) arányos. Ugyanis minden él hosszát pontosan egyszer vesszük figyelembe a maximumok számításakor. A szintekre bontás is (alkalmas gráf tárolás esetén) fokszám összeggel arányos (minden élet figyelembe kell venni, amikor töröljük az egyik végpontját.)

A leghosszabb út meghatározása – ellentétben a legrövidebb útéval (lásd Algoritmelmélet) – általában nem végezhető el polinom időben. Ebben a speciális esetben azért tudtunk gyors algoritmust adni, mert G -ben nincsenek irányított körök.

Hogyan tároljunk gráfokat?

Egy v pontú és e élű G gráf szomszédossági mátrixa v^2 , illeszkedési mátrixa ve helyet foglal el. Egyszerűs gráfokra $e \leq v(v-1)/2$ irányítatlan gráfok esetén és $e \leq v(v-1)$ irányított gráfok esetén.

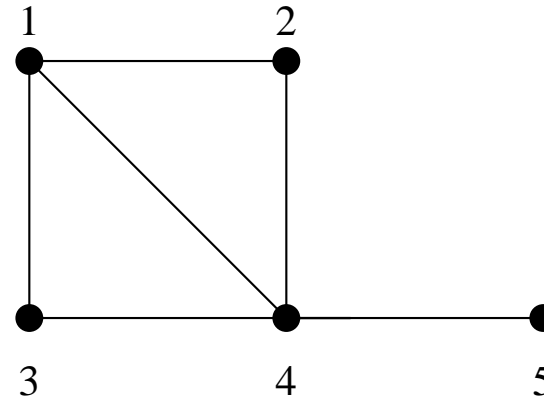
Az illeszkedési mátrix mindig feleslegesen sok helyet foglal el (hisz a ve szám között $(v-2)e$ darab zérus van); és ha egy gráf *ritka* (vagyis cv^2 -nél jóval kevesebb éle van), akkor a szomszédossági mátrixban is rengeteg a zérus. A feleslegesen nagy tárigény mellett a gráfelméleti algoritmusok lépésszámát (tehát időigényét) is növelné, ha a hasznos információkhoz csak számos felesleges zérus kiolvasásán keresztül jutnánk.

Például egy csúcsról eldönteni hogy nyelő, szomszédossági mátrix esetén annak egy teljes oszlopát ($|v|$) adatot kell kiolvasni.

Szomszédossági tömbök és listák

Gyakran hasznos a gráfot úgy tárolni, hogy minden pontjához felsoroljuk a szomszédjait.

2 3 4
1 4
1 4
1 2 3 5
4



A szomszédossági listák általában különböző hosszúságúak, \implies érdemes őket egy nagy közös tömbben tárolni, és egy külön tömbben tárolni a „mutatókat” (pointer), hogy honnét kezdve kell olvasni egy adott pont szomszédait.

2 3 4 1 4 1 4 1 2 3 5 4 és 1 4 6 8 12

szomszédossági tömb

Az 1-1 ponthoz tartozó listák külön-külön lehetnek rendezettek, így hamarabb ellenőrizhetjük, hogy egy pont szomszédai között szerepel-e egy adott másik pont.

Az első tömb hossza a fokszámok összege, vagyis $2e$, a második tömbé pedig v . Így a teljes tárigény $2e + v$. Ez az elképzelhető minimális tárigénynek közel kétszerese (az $\{i, j\}$ élt i szomszédainál is, j szomszédainál is felsoroljuk). (megtérül!)

Irányított gráfok esetén minden i ponthoz felsoroljuk azokat a j pontokat, melyekbe (i, j) irányított él vezet i -ből; vagy azokat a k pontokat, melyekből (k, i) irányított él vezet i -be. Sok esetben az a legjobb, ha mindkét listát megadjuk: a kétszeres tárigény számos algoritmusnál nagyságrenddel csökkenti a lépésszám-igényt.

*Rendezett szomszédossági tömb*ről beszélünk, ha az egyes pontok szomszédai már növekvő sorrendben elhelyezve kerülnek tárolásra (a példában is ez volt a helyzet). Világos, hogy a rendezések elvégzése további időt igényel, de ez később megtérülhet.

Láncolt szomszédossági listák

Ha egy olyan algoritmus (probléma) adódik, amikor gyakran kell a gráfból egy élt (vagy akár pontot) elhagyni, akkor a szomszédsági tömb nem megfelelő: a beszúrandó vagy elhagyandó elem után következők eggyel eltolása akár n darab további lépést is igényelhet. \implies Olyan listát adunk, aminek első tömbje a szomszédossági lista elemeit tetszőleges sorrendben tartalmazhatja.

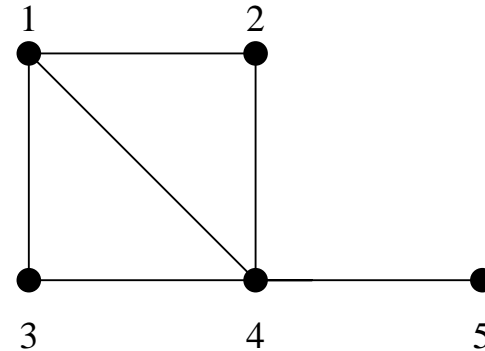
2 3 4

1 4

1 4

1 2 3 5

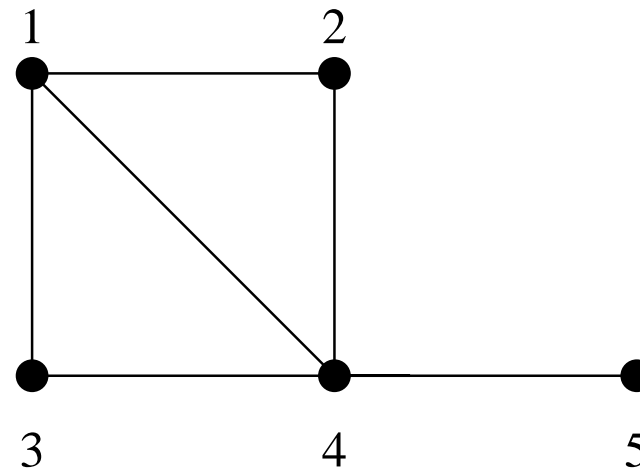
4



Most két darab, egyenként $2e$ hosszú és változatlanul egy darab v hosszú tömb kell:

2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4	1	2	6	3	11
4	12	5	7	10	8	*	*	*	9	*	*					

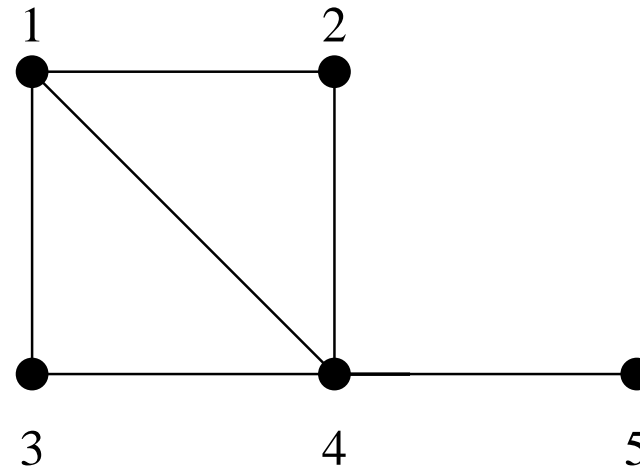
2 3 4
 1 4
 1 4
 1 2 3 5
 4



2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4		1	2	6	3	11
4	12	5	7	10	8	*	*	*	9	*	*						

Most is a v hosszú tömb i -ik eleme mutatja meg, hogy hol kezdjük el az i -ik pont szomszédainak kiolvasását az első $2e$ hosszú tömbből. Azt azonban az alatta lévő szám (tehát a második $2e$ hosszú tömb megfelelő eleme) mutatja meg, hogy hol folytassuk az olvasást, illetve egy speciális $*$ szimbólum jelzi, hogy vége van a listának.

2 3 4
 1 4
 1 4
 1 2 3 5
 4



$\{1,4\}$ él elhagyása után:

2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4		1	2	6	5	11
4	12	*	*	10	8	*	*	*	9	*	*						

$\{2,5\}$ él bevétele után:

2	1	1	3	2	1	4	4	5	3	4	4	5	2		1	2	6	3	11
4	12	5	7	10	8	*	*	*	9	14	13	*	*						

Táblázat 1: Tárigény és a különféle gráfelméleti műveletek időigénye, ha a gráfot szomszédossági mátrixszal (**A**), szomszédossági tömbbel (**B**), rendezett szomszédossági tömbbel (**C**) vagy láncolt szomszédossági listával (**D**) adjuk meg.

	A	B	C	D
Tárigény	v^2	$2e + v$	$2e + v$	$4e + v$
Két pont szomszédosságának eldöntése	1	d	$\log d$	d
Pont szomszédainak megjelölése	v	d	d	d
Minden él megjelölése	v^2	e	e	e
Új él hozzávétele	1	e	e	1
Régi él elvétele	1	e	e	d
Régi pont elvétele	v	e	e	$\min(e, d^2)$

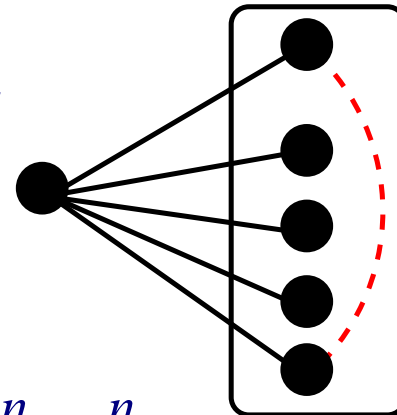
jelölések: v pontszám, e élszám, d maximális fokszám

Mantel tétele

Legfeljebb hány éle lehet egy n -csúcsú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz háromszöget?

Tétel 1. *Ha egy n -csúcsú egyszerű gráf nem tartalmaz háromszöget, akkor éleinek száma legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

BIZONYÍTÁS Ha G nem tartalmaz háromszöget, akkor $\alpha(G) \geq \Delta(G)$. Ugyanakkor $|E(G)| \leq \tau(G) \cdot \Delta(G)$ mindig igaz. Gallai tétele szerint $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)| = n$. Összerakva:

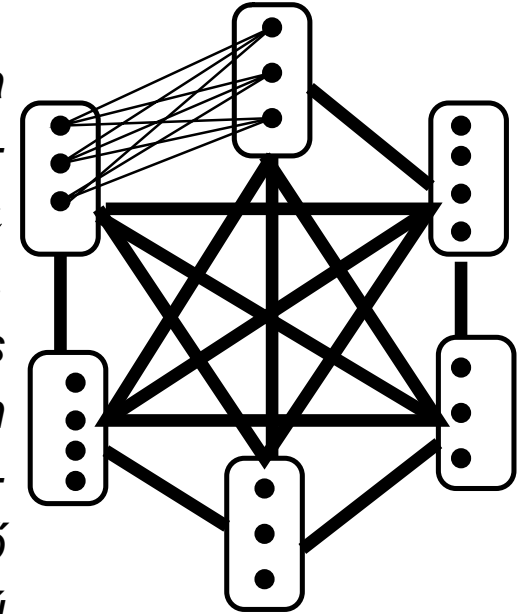


$$|E(G)| \leq \tau(G) \cdot \Delta(G) \leq \tau(G) \cdot \alpha(G) = (n - \alpha(G)) \cdot \alpha(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

A $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ teljes páros gráf mutatja, hogy a tétel állítása éles. Azt, hogy ez az egyetlen ilyen gráf, általánosabban bizonyítjuk.

Turán gráfok

Definíció 2. Definiáljuk a $T_{n,m}$ ($n \geq m$) gráfot a következőképpen. Osszuk el maradékosan n -et m -mel, azaz legyen $n = qm + r$, ahol $0 \leq r < m$. A gráf n pontját osszuk m osztályra, r osztály álljon $q + 1$ pontból, a többi $m - r$ pedig q pontból. A gráfban két pont akkor és csak akkor legyen összekötve, ha különböző osztályban vannak. **m -osztályú gráfnak** nevezünk egy gráfot, ha a pontjai m osztályba oszthatók úgy, hogy az egy osztályban levő pontok között nem fut él. $T_{n,m}$ -et másképpen m -osztályú teljes gráfnak nevezzük.



Tétel 3. Ha egy n pontú G gráf nem tartalmaz K_{m+1} -et, akkor

$$e(G) \leq e(T_{n,m}).$$

Ha pedig $e(G) = e(T_{n,m})$, akkor $G \cong T_{n,m}$.

Turán tétel bizonyítása

1. Az m -osztályú gráfok közül $T_{n,m}$ -nek van a legtöbb éle. Tegyük fel, hogy az a G gráf, amelyiknek a legtöbb éle van, nem a $T_{n,m}$ gráf. Ebben a gráfban kell, hogy legyen két olyan osztály, hogy az egyikben x pont van, a másikban legalább $x + 2$. Ha a nagyobból a kisebbbe átteszünk egy pontot, akkor legfeljebb x él szűnik meg, viszont legalább $x + 1$ új élet húzunk be. Vagyis növeltük az élszámot, ez pedig ellentmond a feltevésünknek.
2. Ha G egy K_{m+1} -et nem tartalmazó n -pontú gráf, akkor ugyanazon a ponthalmazon konstruálható egy olyan m osztályú teljes H gráf, melyben minden pont fokszáma legalább akkora mint G -ben, vagyis minden $v \in V(G) = V(H)$ -ra $d_G(v) \leq d_H(v)$.
3. m -re való teljes indukcióval bizonyítunk. $m = 1$ -re az állítás triviális.
4. Legyen x olyan pont, hogy $d_G(x) = \Delta_G$. Legyen $V_1 = \{u \mid \{u, x\} \in E(G)\}$, vagyis x szomszédainak halmaza, V_2 pedig a többi pont, vagyis $V_2 = V(G) - V_1$ Így persze $x \in$

V_2 . G_1 legyen G -nek a V_1 által feszített részgráfja. Nyilván G_1 -ben nincs K_m , hiszen ez x -szel együtt G -ben K_{m+1} -et alkotna. Így alkalmazhatjuk az indukciós feltevést G_1 -re. Tehát van olyan teljes $m - 1$ -osztályú H_1 gráf, hogy minden $v \in V(G_1)$ -re $d_{G_1}(v) \leq d_{H_1}(v)$.

5. H gráf a következő: Vegyük a V_1 ponthalmazon a H_1 gráfot, majd V_1 minden pontját kössük össze V_2 minden pontjával, viszont hagyjunk el minden két V_2 -beli pontot összekötő élet. Nyilvánvaló, hogy ez a H gráf m osztályú. Ha $v \in V_2$, akkor $d_H(v) = |V_1| = \Delta_G$, a definícióink szerint viszont $d_G(v) \leq \Delta_G$. Ha $v \in V_1$, akkor $d_H(v) = d_{H_1}(v) + |V_2| \geq d_{G_1}(v) + |V_2| \geq d_G(v)$.
6. Így ha egy G gráfban nincs K_{m+1} , de nem izomorf $T_{n,m}$ -mel, akkor konstruáltunk egy nála nagyobb élszámú m -osztályú teljes gráfot (ugyanis ekkor valamelyik egyenlőtlenség biztosan nem egyenlőség), ennek az élszáma pedig nem nagyobb $T_{n,m}$ élszámánál. Egyben beláttuk az állítás második részét is.

Két érdekes tétel

Tétel 4. [Erdős–Stone] *Ha*

$$e(G) \geq e(T_{n,m}) + \varepsilon n^2,$$

akkor G -ben nemcsak hogy van legalább egy K_{m+1} , hanem létezik olyan $c(\varepsilon, m)$ konstans is, hogy G -ben van olyan teljes $m + 1$ -osztályú részgráf, amelyben az osztályok pontszáma legalább $c \log n$.

Azaz, ha csak kicsit nagyobb az élsűrűség, mint a Turán gráfé, akkor már **rengeteg** K_{m+1} van a gráfban.

Tétel 5. [Erdős–Simonovits] Ha G_1, G_2, \dots, G_k adott gráfok, akkor létezik olyan $ex(n; G_1, G_2, \dots, G_k)$ függvény, amelyre teljesül, hogy minden olyan G gráfnak, amelyre $v(G) = n$ és $e(G) \geq ex(n; G_1, G_2, \dots, G_k)$, van valamelyik G_i gráffal izomorf részgráfja. Az ex függvényre teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n; G_1, G_2, \dots, G_k)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\min_{i=1, \dots, k} \chi(G_i) - 1}. \quad (1)$$

Azaz a maximális G_i -t nem tartalmazó gráf élsűrűségének nagyságrendje G_i kromatikus számától függ, ha az legalább 3.

Ha valamelyik kizárandó gráf páros, akkor a fenti tétel nem határozza meg az élsűrűség nagyságrendjét.

$T_{n,m}$ élszáma

$$e(T_{n,m}) = \binom{n}{2} - r \binom{q+1}{2} - (m-r) \binom{q}{2} \approx \binom{n}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right). \quad (2)$$

$k = 1$ és $G = K_{m+1}$ esetén $\chi(K_{m+1}) = m + 1$, azaz ebben az esetben az Erdős–Simonovits következik a Turánból.