勢で生きておゆき」と.

27 年間フランスに住みつづけた私の兄・森有正がふと言った言葉を思い出す.「物理学と哲学と音楽は頭脳の同じ部分の働きなのだよ. だから有名な物理学者や哲学者は自分で音楽をやる人が多い」そして彼自身もパイプオルガンを本職に近いほど愛し演奏した.

歩いてきた道, 私の生活の中で,「数学」ということに照準を合せると, さまざまなことがとりとめなく頭の中に浮んでくるのである.

（せきや あやこ）

数学と私

菅 直人 衆議員議員

私にとって“数学”は小さい頃から大の得意科目で, 数学の勉強だけは苦にならなかった. 大学もごく当然のように理科系を選んだ. しかし, 大学での“数学”の講義を初めて受けてみて, 高校までの“計算”や問題を解くことを“数学”と思っていた私にとってはかなりの戸惑いを覚えた. つまり“数学”は“抽象概念”の組み立てであって計算でないことがわかってきたからである. 講義をさぼっているうちに, 得意だった数学も次第にチンプンカンプンになってしまった.

大学を卒業したての頃, 一つの発明をした. それは“麻雀の点数計算機”というものである. ほとんどのゲームの得点は足し算かせいぜい掛け算で計算できる. 麻雀だけは一つの“役”がつくごとに得点が倍になる指数計算である. だから通常の電卓では計算に手間どるところから考え出したもので, 今もその特許を大事に持っている.

大学を出て私は暫く特許事務所に勤務し, 弁理士の資格を取った. 弁理士の仕事では“発明”を文章で表現することがポイントとなるが, 時おり数式で表わす場合もあった. 鉄道の軌道を整備する機械だとか, 周波数の異なる音波を聞いて海底の鉱物を探知する方法とか, 中には経験的に表現されていた糸巻の形状を糸の巻き方の相違からモデル計算して形状に差ができることを証明するようなこともあった.

政治家としての活動の中で“数学”を必要とすることは極めて稀である. 予算獲得, 減税, 米価などお金の絡む問題は多いが, だいたいは足し算と引き算で足りる話である.

それでも時には“数学”的要素を含む法律が出てくることがある. 4 年ほど前, 参議院に比例代表制を導入した法律案もその一つであった. 各党の得票数を基礎に当選者を“ドント式”で決める計算を, アバウトな話に慣れた議員の中で何割の人が正確に理解できたか疑問だ.

今の国会に提出されている老人保健法の改正案の中で“加入者按分率”の変更が含まれている. 70 歳以上の老人医療費を各保健制度で負担する“ワリカン”の仕方の変更である. この計算式はかなり複雑なもので, 厚生省は議員の頭を混乱させるために考え出した負担方式ではないかと疑いたくなる.

政治家として数学に触れる機会は少なくなっているが, 何か合理的な物の考え方をする傾向が強いところに“数学”が好きであった影響が残っているのかもしれない. 今でも小学校と中学校の息子の数学の教師だけは何とかつとめている.

（かん なおと）

（え／野口 健）

エルデスの語った8つの話題*

ポール・エルデス＝述
ピーター・フランクル＋秋山仁＝翻案

僕ハ偉大ナ数学者デアル!?

日本の高校生，予備校生，大学生の皆さん，こんにちは．私は，Paul Erdös, p. g. o. m. です．私は日本語で1つだけセンテンスを喋ることができます．それは昔，角谷静夫先生（現在イェール大学教授）から教えていただいたものです．そのセンテンスを紹介しましょう．

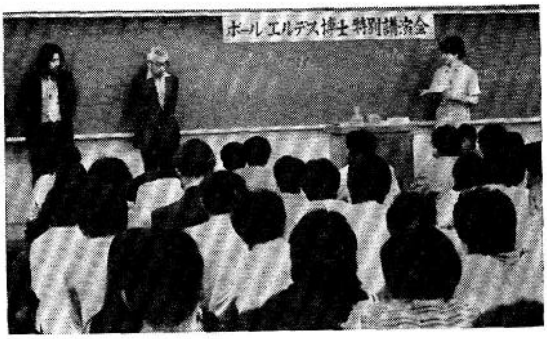
――僕は偉大な数学者である――（笑）

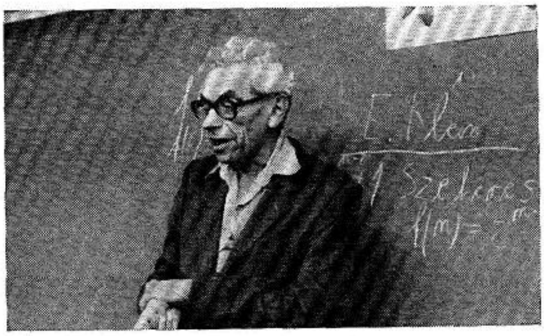
初めに黒板に書いた私の名前の後の暗号，p. g. o. m. とは，“poor great old man” の略称です．私は英語でもハンガリー語でも，普通の人が使わない言葉や暗号を使います．少しそれらを紹介ましょう．

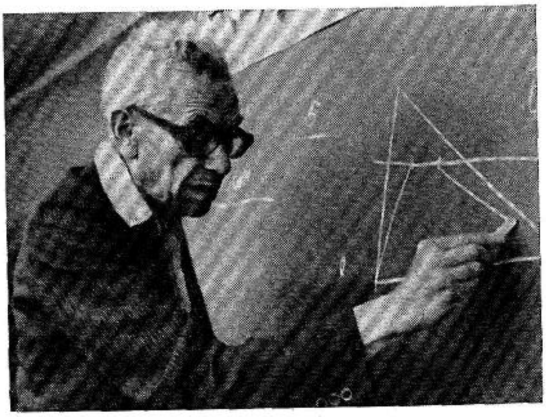
年配の人々（特に私自身）に対する呼び名を考えました．60 歳以上の人を，living dead “生きてる死人”，65 歳以上の人を，a. d. (archeological discovery) “考古学的に貴重な人”，70 歳以上の人を，legally dead “法律的な死人” と呼ぶことにしています．

このことを話すと皆さんから，「75 歳以上の人は何と呼ぶのか」とよく質問されます．以前は，この質問に返答する必要性を全く感じませんでしたが，現在，私は 73 歳になってしまいました．そこで最近，それについて新しい呼び名を考えました．私はハンガリー学士院の会員ですが，学士院の規則によれば「会員の人数はどの時点でも 200 人を越えてはならない」となっています．しかし，たいていは定員いっぱいの 200 人の会員がいて，誰かが死なない限り新しい会員を選出することができませんでした．そこで最近，学士院は会員数に関する規則を少し手直しして，75 歳以上の人は会員として数えないことにしました．すなわち，会員が 75 歳に達したら，彼が死んだのと同じ効果をもたらすのです．そこで，私は 75 歳以上の人を，officially dead “公式には死んだ人” と呼ぶことにしました（笑）．

＊ 本稿は駿台予備学校での特別講演をもとに再構成されたものです．







エルデスの講演会風景

エルデス-モルデルの定理

もっと大切な話をしましょう．私が若い頃，発見した定理のひとつを紹介します．この定理は 1937 年に，私とモルデル（L. J. Mordell, 1888—1972）の共同で得た定理です．

1つの三角形 ABC の内部に点 O をとり，この点 O から3辺 BC, CA, AB のおのおのへ垂線を引いて，垂線の足を X, Y, Z で表す（図1参照）とき，

$$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC} \geqq 2(\mathrm{OX}+\mathrm{OY}+\mathrm{OZ})$$

となる．すなわち点 O と三角形の各頂点を結んだ線分 OA, OB, OC の和は，必ず点 O とそれぞれ X, Y, Z を結んだ線分 OX, OY, OZ の和の2倍以上である．等号は，点 O が正三角形の中心である場合のみ成り立つ．

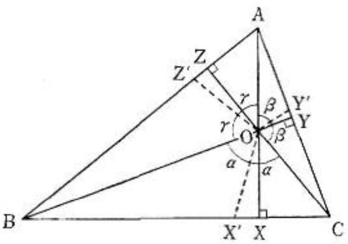


図 1

（証明）

この不等式を証明する際に使用するものは，皆さんも良く知っている次の公式（＊）と不等式（＊＊）である．

$\triangle$ABC の面積 S は，2辺の長さとその間の角によって求まる．すなわち，

$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC} \qquad (*)$$

もうひとつは，相加・相乗平均の関係である．

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad (a>0,\ b>0) \qquad (**)$$

OX′, OY′, OZ′ をそれぞれ，$\angle$BOC $(=2\alpha)$，$\angle$AOC $(=2\beta)$，$\angle$BOA $(=2\gamma)$ の二等分線とする．明らかに，

$$\overline{\mathrm{OX}'} \geqq \overline{\mathrm{OX}}, \quad \overline{\mathrm{OY}'} \geqq \overline{\mathrm{OY}}, \quad \overline{\mathrm{OZ}'} \geqq \overline{\mathrm{OZ}}$$

が成り立つ．よって，

$$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{OC}} \geqq 2(\overline{\mathrm{OX}'}+\overline{\mathrm{OY}'}+\overline{\mathrm{OZ}'})$$

を示せば十分である．簡単のため

$$\overline{\mathrm{OA}}=a, \quad \overline{\mathrm{OB}}=b, \quad \overline{\mathrm{OC}}=c,$$
$$\overline{\mathrm{OX}'}=x, \quad \overline{\mathrm{OY}'}=y, \quad \overline{\mathrm{OZ}'}=z$$

と書く．

$$\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OBX}'+\triangle\mathrm{OX}'\mathrm{C}$$

より

$$\frac{1}{2}bc\sin 2\alpha=\frac{1}{2}bx\sin\alpha+\frac{1}{2}cx\sin\alpha$$

となる．2倍角の公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ および（＊＊）より，

$$x=\frac{2bc}{b+c}\cos\alpha \leqq \sqrt{bc}\cos\alpha$$

を得る．同様に，

$$y \leqq \sqrt{ca}\cos\beta$$
$$z \leqq \sqrt{ab}\cos\gamma$$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であるから，

$$\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma)=\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma$$

$a+b+c-2(x+y+z)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}&a+b+c-2(x+y+z)\\&\quad\geqq a+b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha-2\sqrt{ac}\cos\beta-2\sqrt{ab}\cos\gamma\\&\quad=(\sqrt{a}-\sqrt{b}\cos\gamma-\sqrt{c}\cos\beta)^2\\&\qquad+(\sqrt{b}\sin\gamma-\sqrt{c}\sin\beta)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

最初の不等式の等号は，（＊＊）より，$a=b=c$ のときに成り立つ．このとき最後の不等式において等号が成り立つのは，

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$$

のときである．

$$(\because\ \sin\gamma=\sin\beta, \quad \cos\gamma+\cos\beta=1)$$

よって，等号が成立するのは $\triangle$ABC が正三角形で，かつ O がその中心となるときである．□

整数に関する二つの定理

整数論の問題について少しお話しします．1933 年 12 月，ハンガリーのブタペストを散歩しているとき，次の問題を思いつきました．

1 から $2n$ までの整数の集合から $n+1$ 個の相異なる整数をとりだすとき，これら $n+1$ 個の整数のなかに一方が他方の倍数であるような2整数が存在する．

この問題を思いついたときはすぐに証明ができると思いましたが，証明できたのは翌日になってからでした．私の証明は難しいものだったのですが，私の2人の友だちバースリゲルとバージョニが簡単な証明を見つけました．その証明を紹介しましょう．

(証明)

これら $n+1$ 個の整数を $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ とする．各a_iは

$$a_i = b_i 2^{d_i} \qquad ただし\ b_i\ は奇数,\ d_i \geqq 0$$

と書き表せる．明らかに $b_i < 2n$ である．1から $2n$ までの整数のうち奇数はn個しかないので鳩の巣原理より，$b_i = b_j$ であるような a_i, a_j が存在する．

$$a_i = b_i 2^{d_i} \qquad a_j = b_j 2^{d_j} \qquad (ただし\ b_i = b_j)$$

対称性より，$d_i < d_j$ としてよい．このとき，

$$a_j = b_j 2^{d_j} = b_j 2^{d_i} 2^{d_j - d_i}$$
$$= a_i 2^{d_j - d_i}$$

よって，a_j は a_i の倍数である．□

これと関連したもう1つの問題を紹介しましょう．

---

1 から $2n$ までの整数の集合から，任意に $n+1$ 個の整数をとりだすとき，その中に互いに素な2数が存在する．

(証明)

任意の整数 x $(1 \leqq x \leqq 2n)$ に対して，x と $x+1$ は互いに素である．したがって，$n+1$ 個の整数をとりだすときその中には連続した2数が必ず存在することをいえばよい．

鳩の巣原理を使うことによりこのような2数の存在を示せる．すなわち，ひとつおきに選んでも高々n個にしかならないので，残りの1個は必ずこれらn個のうちのどれかと連続した数にならざるを得ない．□

この定理において $n+1$ を n にすると，この定理は成り立ちません．なぜならば，すべての偶数 $(2, 4, 6, \cdots, 2n)$ を選ぶならば，これら偶数の個数はnで，どの2つも互いに素ではないからです．

これにまつわるエピソードがあります．1959 年，ハンガリーの若い天才的数学者と一緒に昼食を共にしたことがありました．彼はポーシャ (L. Pósa) という名でしたが，その当時12歳だったと思います．スープを一緒に飲んでいるとき，彼にこの問題を出してみました．彼はスープを飲み終えるや否やスプーンを手にしたままで，『任意に選ばれた $n+1$ 個の整数の中には連続した(すなわち，互いに素な) 2数 x と $x+1$ が必ず存在する』と答えました．すなわち，彼は二，三分でこの問題を解決してしまったのです．それ以来，私は彼と共同で研究するようになりました．彼が 14 歳のときには，私は彼と共著の論文も書きました．

カナダにおもしろい数学の本があります．それはホンスベルガー (R. Honsberger) 氏が書いた "Mathematical Gems" という本です．この本の章のひとつがこのポーシャという数学者にあてられています．この本には，「ポーシャが上の定理を証明したとき，彼が飲んでいたものがスープではなくシャンパンだったら彼を祝福できてよかったのに」というジョークが書かれています．

ポーシャの第一定理

ポーシャが13歳にもならなかったときに，彼が独自に発見した最初の定理を紹介しましょう．

位数（点の個数）n（$\geqq 4$）の単純グラフ（ループや多重辺をもたないグラフ）G のサイズ（辺の個数）が $2n-3$ 以上ならば，G には対角線を含むサイクルが存在する．

サイズを $2n-4$ にするとこの定理は成り立ちません（図2 (a) 参照）．この定理の証明はそれほど難しくはありませんが，しかし 13 歳くらいの男の子の定理にしては素晴らしいものです．

(証明)

対角線を含むサイクルが存在しないような位数nのグラフの最大サイズを $g(n)$ で表す．

$$g(2) = 1, \qquad g(3) = 3$$

は明らか．

$$g(n) = 2n-4 \qquad (n \geqq 4) \qquad (*)$$

であることを示せばよい．

これをnに関する帰納法で証明する．$n=4$ ときは明らかに $g(4) = 4$ で命題（$*$）は成り立つ．$n-1$ 以下のとき（$*$）は成立すると仮定する．

G を位数 n のグラフとする．Gから任意の辺を選び，それを xy とする．辺の端点 x, y のどちらか一方でも（たとえばxとする）次数2の場合にはグラフ $G-x$ を考えると，

$$|E(G)| \leqq |E(G-x)|+2 \leqq g(n-1)+2 = g(n)$$

となるから命題（$*$）は成立する．

辺 xy について上の場合以外のときを考える．

このときはグラフ $G' = G-xy$ を考える．G' には，x と y の両方を通過するようなサイクルは存在しない．すなわち，G' において x と y を結ぶ互いに点素な道の最大個数 η は0個か1個である．$\eta = 0$ ならば，G' は

非連結となり，各成分について帰納法の仮定を適用すればよい．$\eta=1$ である場合を考える．メンガーの定理

「x, y をグラフ G の2点とするとき，G 内の辺素な x-y 道の最大個数は，すべての x-y 道を切断するような除去すべき点の最小個数に等しい」

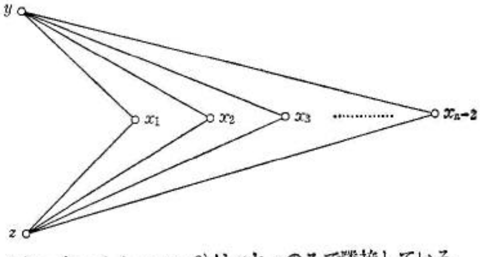
により，$G'-z$ が非連結となるような点 z がちょうど1個 G' に存在する．集合 X, Y を $x\in X,\ y\in Y,\ z\in X\cap Y,\ X\cup Y=V(G')$ なるものとする．($G'-z$ が非連結であることよりそのような X, Y が選べる)．このとき，$X-z$ の点と $Y-z$ の点とを結ぶ辺は存在しない．$|X|\geqq|Y|$ と仮定してよい．帰納法の仮定より，

$$|E(G)|\leqq|1+E(G')|\leqq g(|X|)+g(|Y|)+1$$

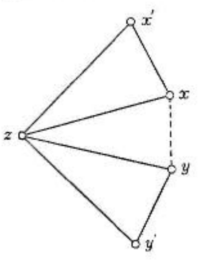
この不等式の最右辺は，x, y の G' における次数は共に2以上であるから $|X|, |Y|\geqq 3$ である事実に基づき次の3つの場合に分ける．

$$(\text{最右辺})=\begin{cases} g(3)+g(3)+1 \\ \qquad (|X|=|Y|=3\text{ のとき}) \quad (1) \\ \text{または} \\ g(n-2)+g(3)+1 \\ \quad (|X|=n-2,\ |Y|=3\ \text{ のとき，ただし } n-2\geqq 4) \quad (2) \\ \text{または} \\ g(n-i)+g(i+1)+1 \\ \quad (|X|=n-i,\ |Y|=i+1\ \text{ のとき，ただし } n-i, i+1\geqq 4) \quad (3) \end{cases}$$

(1) の場合には等号は成り立たない．なぜならば図2



(a) $x_i\,(i=1,2,\cdots,n-2)$ は y と z のみで隣接している



(b)

図 2

(b) のグラフは辺 xy を戻すと対角線を含むサイクルがいくつも存在してしまう．よって，(1) の場合には最右辺より1を引いて

$$|E(G)|\leqq 1+2g(3)-1=6=g(5)$$

(2), (3) の場合には

$$|E(G)|\leqq g(n-2)+4=g(n)$$
$$|E(G)|\leqq g(n-i)+g(i+1)+1=g(n)-1. \qquad \square$$

4 整数論の未解決問題

次の問題は一見簡単そうですが，実は未解決の難しい問題です．

集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ の部分集合 $T\ (|T|=t)$ で，次の条件 (＊) をみたすものを考える：

(＊) T のどの k 個の要素を選んでも，互いに素でない2数が存在する．

このとき，t の最大値 $t(k,n)$ を求めよ．

この問題に対する私の予想はこうです：

最初の $(k-1)$ 個の素数を $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$ とするとき，これらの素数の倍数で n 以下であるものを T の要素とします．すなわち，$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5, \cdots\cdots$ ですから，n 以下のすべての偶数，および n 以下の3の倍数，……を T の要素とするとき，$|T|$ が最大の t を得る．

このような整数の集合 T は条件 (＊) みたします．なぜこの条件をみたすかというと，これらのうちの k 個をとると，それらはどれも $2, 3, \cdots, p_{k-1}$ のうちの少なくともひとつの倍数だからです．鳩の巣原理により，k 個のうちの少なくともふたつがある素数の倍数となっているから，これら2数は互いに素ではありません．$k=2$ の場合は，さきほどポーシャの結果 (2節の2番目の定理) を紹介しましたね．

一般の k に対してはこの問題は今でも未解決です．この問題を解決した人には，私は喜んで1万円を進呈しましょう．

私はしばしば自分の出題した未解決問題に懸賞金をつけるのですが，よく聞かれるのは，「すべての問題が同時に解かれたらどうやって懸賞金を支払うのか？」ということです．もちろん支払えません．しかし，世界最大の銀行でも，人々がみな同時に預金を引き出そうとしたら倒産するだろうと思います．私が出題したすべての問

題が同時に解決する確率は，大銀行が倒産する確率よりも低いのです．ですからご安心ください．

モルリーの定理

次は幾何学の問題です．初等幾何学です．19 世紀まで初等幾何学はとても人気がありましたが，今世紀はあまり有名な定理は証明されていません．しかし，今世紀証明された定理のなかにも素晴しい定理がいくつかあります．そのひとつは次の**モルリー（Frank Morley）の定理**だと思います．

三角形の3つの角のそれぞれの3等分線を引く．このとき，隣接する3等分線の交点を結ぶ線分は正三角形をつくる（図3参照）．

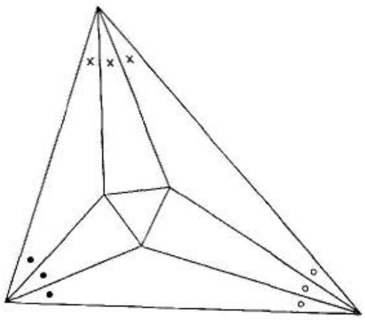


図 3

モルリーはイギリスの数学者で，今世紀初頭（1904年）にこの定理を証明しました．幾何学の父と呼ばれているユークリッドは，この定理を聞いたら何というでしょうか．当然理解できると思いますが，彼の時代のギリシャでは角の3等分は当然できませんでした．今は彼に質問できませんが，多分もうすぐあの世で質問できると思います．でもそのときにはあなた方に，彼の返事を伝えることはできませんね（笑）．

それではモルリーの定理を証明しましょう．

証明のために次の補題を準備しましょう．

（補題）　ナラニエンガー（Naraniengar）

4 点 Y', Z, Y, Z' が，

（i）　$\overline{Y'Z} = \overline{ZY} = \overline{YZ'}$

（ii）　$\angle YZY' = \angle Z'YZ = 180° - 2\alpha > 60°$

このとき，これら4点は同一円周上にある．さらに，点Aを直線 $Y'Z'$ に対して点 Y と反対側にあり $\angle Y'AZ' = 3\alpha$ であるとすると，点 A も同じ円周上にある（図4参照）．

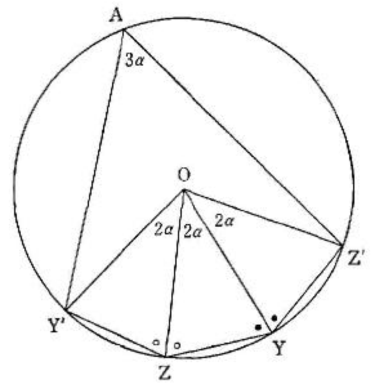


図 4

（証明）

$\angle YZY'$, $\angle Z'YZ$ の内角の2等分線を引きその交点をOとする（図4参照）．3つの三角形 $\triangle OY'Z$, $\triangle OZY$, $\triangle OYZ'$ は底角 $90° - \alpha$ の合同な二等辺三角形である．よって，

$$\overline{OY'} = \overline{OY} = \overline{OZ} = \overline{OZ'}$$

となるから4点 Y', Z, Y, Z' は半径 OY' の円周上にあることがわかる．またこのとき，弦 $Y'Z, ZY, YZ'$ のつくる中心角は，

$$\angle Y'OZ = \angle ZOY = \angle YOZ' = 2\alpha$$

である．点Y を含まない側の弧 $Y'Z'$ 上の任意の点 A をとると，$\angle Y'AZ' = 3\alpha$ は Y を含む側の弧 $Y'Z'$ の円周角である．この弧 $Y'Z'$ は，線分 $Y'Z'$ に対して点 Y と反対側の位置において角 3α をなす点の軌跡とも考えられる．したがってそのような点のひとつが A である．□

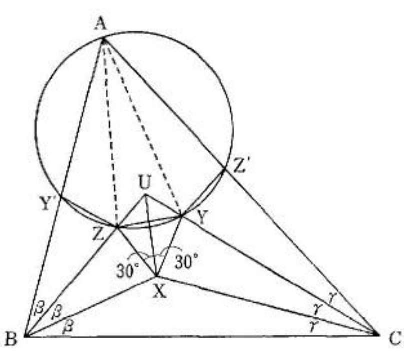


図 5

補題を用いてモルリーの定理を証明しましょう．

（証明）

$\angle \mathrm{A} = 3\alpha, \quad \angle \mathrm{B} = 3\beta, \quad \angle \mathrm{C} = 3\gamma$

とおく．$\angle$B, $\angle$C の三等分線の交点を U, X とする（図5参照）．$\triangle$BCU において，線分 BX, CX は，$\angle$UBC, $\angle$UCB の二等分線となるから，点 X は $\triangle$BCU の内心である．したがって，線分 UX は $\angle$U を二等分する．

点 Y, Z を，線分 CU, BU 上に $\angle \mathrm{UXY} = \angle \mathrm{UXZ} = 30°$ となるようにとる．このとき，$\triangle \mathrm{UXY} \equiv \triangle \mathrm{UXZ}$ となるから $\overline{\mathrm{XY}} = \overline{\mathrm{XZ}}$ である．

さらに，$\angle \mathrm{ZXY} = 60°$ より，$\triangle$XYZ は正三角形である．また，$\triangle$UZY は二等辺三角形であるから $\angle \mathrm{UYZ} = \angle \mathrm{UZY}$ となる．$\angle$ZUY は $\triangle$UBC の角でもあるから

$$\angle \mathrm{UYZ} + \angle \mathrm{UZY} = 2\beta + 2\gamma$$

したがって，

$$\angle \mathrm{UYZ} = \angle \mathrm{UZY} = \beta + \gamma$$

一方，$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$ より，$\alpha + \beta + \gamma = 60°$ である．よって，$\beta + \gamma = 60° - \alpha$ であるから，

$$\angle \mathrm{UZY} = 60° - \alpha$$

$$\angle \mathrm{UZX} = 120° - \alpha$$

次に，線分 $\overline{\mathrm{BA}}$ 上に $\overline{\mathrm{BY'}} = \overline{\mathrm{BX}}$ となるような点 Y′ をとり，線分 CA 上に $\overline{\mathrm{CZ'}} = \overline{\mathrm{CX}}$ となるような点 Z′ をとる．

このとき，

$$\triangle \mathrm{BZX} \equiv \triangle \mathrm{BZY'}$$

$$\triangle \mathrm{CYX} \equiv \triangle \mathrm{CYZ'}$$

よって，

$$\overline{\mathrm{Y'Z}} = \overline{\mathrm{ZX}} = \overline{\mathrm{ZY}} = \overline{\mathrm{YX}} = \overline{\mathrm{YZ'}}$$

これで4点 Y′, Z, Y, Z′ が先の補題の条件 (i) をみたすことが示せた．

次に，$\angle$YZY′ と $\angle$Z′YZ の評価であるがこれは容易である．

$$\angle \mathrm{BZY'} = \angle \mathrm{BZX}$$

より，

$$\angle \mathrm{UZY'} = \angle \mathrm{UZX} = 120° - \alpha$$

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{YZY'} &= \angle \mathrm{UZY} + \angle \mathrm{UZY'} \\ &= (60° - \alpha) + (120° - \alpha) \\ &= 180° - 2\alpha\end{aligned}$$

同様にして，

$$\angle \mathrm{Z'YZ} = 180° - 2\alpha$$

を得る．また，

$$\alpha = \frac{1}{3}\angle \mathrm{A} < 60°$$

であることより，

$$180° - 2\alpha > 60°$$

したがって補題の条件 (ii) をみたす．

補題の結果より，Y′, Z, Y, Z′, A の5点は同一円周上にある．長さの等しい弦 Y′Z, ZY, YZ′ の点 A における円周角はすべて α であるので，AZ, AY は $\triangle$ABC の $\angle$A を三等分する．すなわち，正三角形をつくるために人工的に配置された点 X, Y, Z は，モルリーの定理の角の三等分線の交点と一致する．□

最近こういう幾何学は，流行っていません．その理由は，あまりいい問題がないからでしょう．

18世紀のイタリアの幾何学者マスケローニ（L. Mascheroni, 1750—1800）は，次の定理を証明しました：

定規とコンパスを使って作図可能なものはコンパスだけでも作図できる．

線分 AB を，定規を使わずコンパスだけを使って，2等分するのは難しい．皆さん，定規を使わないで線分 AB を2等分することに挑戦してみてください．マスケローニは，その証明を書いた本をナポレオンに捧げました．ナポレオンという人は実に数学をよく理解していた人で，彼は戦争の代わりに数学をやった方が良かったのではないかと私は思います（笑）．

ナポレオンがフランスを征服した後，フランス学士院を訪ねたとき，マスケローニにもらったその本を贈呈しました．そのときフランスの一番有名な数学者ラプラスは驚愕し，「あなたから数学を教えてもらうとは思ってもいませんでした」とナポレオンに言ったそうです．

ハッピー・エンド問題

次は，初等幾何学の別の問題を考えましょう．1931年，エステ・クレイン（Esther Klein）という女性の数学者が，次のような定理を証明しました：

平面上の一般の位置に5つの点がある．この5点のうちのある4点を選ぶと，それらは凸四角形の4頂点になる．

（証明）

5点を含む最小の凸多角形（凸包）を考える．それが，

五角形か四角形ならば，凸包の4頂点を選べば凸四角形を得る．

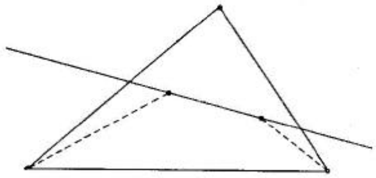


図6 （写真の三枚目参照）

したがって，5 点を含む凸多角形が三角形であると仮定してよい．三角形の頂点にならなかった残りの2点は，三角形の内部にある．その2点を通る直線を引く（図6参照）とこの直線は三角形の3辺のうちの2辺と交わる．交わらない1辺の両端点と内部の2点を選べば，凸四角形を得る．□

これは，とても綺麗な証明ですね．

エステ・クレインがこの定理に関連して出したもう一つの問題は次のものでした：

平面上の一般の位置に $X(n)$ 個の点を配置する．これらの点から n 点が選べて，それらは凸 n 角形の頂点をなす．

$X(n)$ の最小数を $f(n)$ で表わすとき，すべての n に対して $f(n)$ が存在するか？

また，存在するならば $f(n)$ を決定せよ．

私はこの問題を，"ハッピー・エンド問題" と呼んでいます．その理由は後で説明しましょう．

$f(n)$ がすべての n に対して存在することは，セケレシ (G. Szekeres) という私の友人の数学者と共に証明しましたが，ここではジョンソン (S. Johnson) による簡単な証明を紹介しましょう．

(証明)

n (≥ 3) を固定する．n 点からなる集合を以後 **n-集合**と書く．

一般の位置に配置された有限個の点の集合を S とする．S の任意の3-部分集合 $\{a,b,c\}$ に対して，三角形 abc の内部にある S の点の個数を $|abc|_S$ で表わす．

$$A_O = \{\{a,b,c\} \subseteq S\,;|abc|_S = \text{奇数}\}$$

$$A_E = \{\{a,b,c\} \subseteq S\,;|abc|_S = \text{偶数}\}$$

と定める．後述のラムゼー (F. Ramsey) の定理（註）により，

(＊) 『ある最小数 $f(n)$ が存在して，平面上の一般の位置におかれた $f(n)$ 個の点集合 S に対して，ある n-部分集合 B が存在し，B のすべての3-部分集合 A は，A_O か A_E のいずれか一方のみに含まれる』．

背理法で証明するために，B に属する n 点が凸 n 角形の頂点をなさないとする．このとき B の相異なる4点 a,b,c,d で，d が三角形 abc の内部にあるようなものが存在する．

S のどの3点も一直線上にない（∵一般の位置）ので，

$$|abc|_S = |abd|_S + |acd|_S + |bcd|_S + 1$$

このとき，$|abc|_S$, $|abd|_S$, $|acd|_S$, $|bcd|_S$ がすべて同じ偶奇性をもつことはできない．このことは，(＊) の事実

"$A \subseteq A_O$ または，$A \subseteq A_E$ である"

に矛盾する．

したがって，B の各点は凸 n 角形の頂点をなす．□

(註)　ラムゼーの定理

$k(\geq 2), t, a_1, \cdots, a_k$ を正整数とする．このとき次の性質 (＊＊) をみたす最小の自然数 $R(t\,;k\,;a_1,\cdots,a_k)$ が存在する：

(＊＊) X を集合とし，$|X| \geq R(t\,;k\,;a_1,\cdots,a_k)$ のとき，X の t-部分集合族 $\binom{X}{t}$ をかってに k 個の類，$X_1,\cdots,X_k$ に分割するならば，ある i が存在して X のある a_i-部分集合 A_i の t-部分集合族 $\binom{A_i}{t}$ は X_i に含まれる．

このような最小数 $R(t\,;k\,;a_1,\cdots,a_k)$ を**ラムゼー数**と呼ぶ．特に，$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a$ のとき $R(t\,;k\,;a)$ と書く．上述のジョンソンの証明においては，$f(n) = R(3\,;2\,;n)$ となる．

セケレシは，

$$f(n) = 2^{n-2}+1$$

と予想しました．後に彼と私は次の不等式がなりたつことを証明しました．

$$2^{n-2}+1 \leq f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2}+1$$

この論文はオランダとハンガリーで発表され，その後トゥラン (P. Turán) とマカイ (Makai) という2人の数学者は，$f(5)=9$ であることを証明しました．しかし，$f(6)=17$ であるかどうかは，未だに証明されていません．この問題を "ハッピー・エンド問題" と呼ぶ理由は，上の不等式が証明できた後に，エステ・クレインとセケレシは結婚したからです．彼らは今でも一緒にアストラリアーゼに住んでいます．

1969 年に彼らを訪ねたとき，私は次の問題を思いつきました．

関数 $f^*(n)$ を次のように定義する：平面上に $X(n)$ 個の点を一般の位置に配置する．それらの点の集合を S とする．S の中からある n 点が選べて，それら n 点を頂点とする凸 n 角形が作れ，かつその内部に S の点を含まないような $X(n)$ の最小値を $f^*(n)$ とする．このとき $f^*(n)$ を決定せよ．

この節の初めに証明したことから，$f^*(4)=5$ は明らかです．ハーボース (H. Harborth) というドイツの数学者が $f^*(5)=10$ を証明しました．先ほどの関数では，$f(5)=9$ であったので点が 1 個多くなったわけです．彼はさらに，「$f^*(7)=\infty$ となるだろう」と私に手紙を書いてきました．1982 年になってオーストラリアのホルトン (J. D. Horton) という数学者が，$f^*(7)=\infty$（すなわち存在しない）を証明しましたが，$f^*(6)$ がどうなるのかは未解決です．

すべての $n\geqq 7$ に対して，$f^*(n)=\infty$ である．

（証明）

ホルトンの証明は次のようなものです．

$n\geqq 3$ において，$f^*(n)$ を次の条件 (***) をみたすような最小の整数とする：

(***) 平面上の一般の位置におかれた $f^*(n)$ 個の点の集合 A は，集合 A の点を内部にもたないような凸 n 角形の頂点集合を部分集合として含む．ここで，集合 A の元を内部に含まないような凸 n 角形のことを**真空凸 n 角形**と呼ぶことにする．

ここで示すべきことは，$f^*(7)$ およびすべての $n\geqq 7$ において $f^*(n)$ が存在しないということである．

そのために任意の k について，真空凸七角形をもたない 2^k 個の点の集合を構成しよう．$a_1a_2\cdots a_k$ を，$0\leqq i<2^k$ なる i の二進数表示とする．すなわち，

$$i=a_12^{k-1}+a_22^{k-2}+\cdots+2a_{k-1}+a_k$$

ここで，$a_i=0$ または 1 である．このとき，たとえある "1" より左側がすべて 0 であってもそれらを省略しないことにする．c を $c\geqq 2^k+1$ なる任意の実数とし，

$$d(i)=\sum_{j=1}^{k}a_jc^{j-1}$$

とおく．点 $P(i)$ の座標を $P_i(i,d(i))$ とするとき，点の集合

$$S_k=\{P_i\mid i=0,1,\cdots,2^k-1\}$$

を考える．このとき，次の (a) ～ (h) が成り立つ（各自確かめよ）．

(a) $\{P_i\mid i<2^{k-1}\}=S_k$ の左半分（$=L$ とおく）．

(b) $\{P_i\mid i\geqq 2^{k-1}\}=S_k$ の右半分（$=R$ とおく）．R は L を平行移動したものである．

(c) $\{P_j\mid i$ は偶数$\}=S_k$ の下半分（$=B$ とおく）．

(d) $\{P_i\mid i$ は奇数$\}=S_k$ の上半分（$=T$ とおく）．T は B を平行移動したものである．

(e) L, R, B, T は，次の変換 f で互いに移り合う：

$$f:\vec{x}\longrightarrow\vec{a}+c\vec{x}$$

(f) 点 $((2^k-1)/2,\ \sum c^i/2)$ に関して点対称の位置に T と B が位置する．

(g) T のすべての点は，B の任意の 2 点を結ぶ直線より上に位置する．c の値が十分大きく選んであるのでこれは真である．同様に，B のすべての点は T の任意の 2 点を結んだ直線より下に位置する．

(h) 整数 i と j は二進数表示において下 x 桁が等しく，h の下 x 桁はそれらとは異なるとする．このとき，P_h は P_i と P_j を結ぶ直線の上か，または下に位置する．上か下かは，下 x 桁の値に依存する．

(h) より次の補題を得る．

（補題）

---

a,b,c を，$0\leqq a,b,c\leqq 2^k-1$ なる整数とし，ある整数 l $(1\leqq l<k)$ が存在して，

$a\equiv b\pmod{2^l}$ すなわち下 l 桁が同じ

$a\equiv c\pmod{2^{l-1}}$ すなわち下 $l-1$ 桁が同じ

$a\not\equiv c\pmod{2^l}$

をみたすとする．このとき，次のいずれかが成り立つ．

(i) a の二進数表示は，下 l 桁めが 1 である．このとき，b もまた下 l 桁めが 1 である．かつ c は，下 l 桁めが 0 であり，点 $P(c)$ は直線 $P(a)P(b)$ の下側に位置する．

(ii) a,b の下 l 桁めは 0 であり，c の下 l 桁めは 1 である．かつ，点 $P(c)$ は直線 $P(a)P(b)$ より上側に位置する．

（証明）

$a<b$ とし，a,b は共に下 l 桁めが 1 であるとする．このとき，

$$d(a)-d(c)\geqq c^{k-l}-\sum_{k\geqq j>l}c^{k-j}$$

$$d(b)-d(c) \geqq c^{k-l}-\sum_{k \geqq j>l} c^{k-j}$$

が成り立つ．一方，

$$|d(a)-d(b)| \leqq \sum_{k \geqq j>l} c^{k-j} < \frac{c^{k-l}}{c-1}$$

かつ，

$$|a-b| \geqq 2.$$

直線 $P(a)P(b)$ を考えると，その傾きの絶対値は次の不等式をみたす：

$$\left|\frac{d(a)-d(b)}{a-b}\right| < \frac{c^{k-l}}{2(c-1)}$$

したがって，長さ 2^k-1 の区間上で直線 $P(a)P(b)$ の減少量は高々

$$\frac{(2^k-1)c^{k-l}}{2(c-1)} \leqq \frac{(2^k-1)c^{k-l}}{2\cdot 2^k} < \frac{c^{k-l}}{2}$$

($\because c \geqq 2^k+1$ であるから)

$$d(a)-d(c) \geqq c^{k-l}-\frac{c^{k-l}}{c-1} > \frac{c^{k-l}}{2}$$

したがって，この直線は区間 $[0, 2^k-1]$ において常に点 $P(c)$ の上にある．

(ii) も同様にして示せる．□

次に，k についての帰納法によってこれらの点集合 S_k は，真空凸七角形を含まないことを示す．

$k=2$ のときは明らか．

背理法によって証明するために，真空凸七角形が存在するとし，その頂点を $P(i_1), \cdots, P(i_7)$ とおく．

まず始めに，それらの中に奇数 i_j と偶数 $i_{j'}$ が存在すると仮定する．対称性より，偶数 $i_{j'}$ は4個以上あると考えてよい (奇数も同様)．

i_1 を奇数，$i_2<i_3<i_4<i_5$ を偶数とする．このとき次の事実(＊)が成り立つ：

(＊) $2 \leqq j<j' \leqq 5$ について，$P(i)$ が直線 $P(i_j)P(i_{j'})$ より上にあるような偶数 $(i_j<i<i_{j'})$ は存在しない．

実際，(＊) が成り立たなければ，$\triangle P(i_1)P(i_j)P(i_{j'})$ は $P(i)$ を内部の点として含んでしまうから，凸七角形は空でなくなってしまうからである．

対称性より，

$$d(i_2) > d(i_5)$$

このとき，(＊)より，

$$d(i_3) < d(i_2),$$
$$d(i_4) < d(i_2).$$

このとき，2 つの場合が考えられる．

場合1：$d(i_3) > d(i_4)$

場合2：$d(i_4) > d(i_3)$

場合2において(＊)より，$d(i_5) > d(i_4)$ が成り立つ．すなわち，どちらの場合も $d(i)$ の値が単調な，連続した3点が存在する．

場合1を考える．3 つの数の二進数表示を下1桁めから比べていき，i_2, i_3, i_4 のすべてが同じではないような桁で最も右にあるものを考える．

$$d(i_2) > d(i_3) > d(i_4)$$

であることと(＊)より，その桁は，i_2 が1であり，i_3, i_4 が0である．

$$d(i_3) > d(i_4)$$

より，i_3 が i_4 と異なる値をもつような最も右の桁においては，i_3 が1，i_4 が0である．

次のような数 i を考える．

i_3 の二進数表示で0のある桁のうち，i_2 が1をもつ桁のみ1にいれかえたものを i とする．

たとえば

$$i_2 = (0000010)$$
$$i_3 = (0001000)$$
$$i_4 = (1010000)$$

とするとき

$$i = (0001010)$$

となる．

このとき，

$$i_3 < i < i_4$$

また，明らかに補題より i は直線 $P(i_3)P(i_4)$ より上に位置する．これは，凸七角形が空であることに矛盾する．したがって，$i_3 = i_4$ でなければならない．…(#)

残った場合は，

(I) すべての $i_j\ (1 \leqq j \leqq 7)$ が偶数のとき

(II) すべての $i_j\ (1 \leqq j \leqq 7)$ が奇数のとき

である．(場合 1) において，それらの点は

$$2S_{k-1} = \{2\vec{x} : \vec{x} \in S_{k-1}\}$$

の部分集合であり，帰納法の仮定より S_{k-1} は真空凸七角形を含まないことに反する．

(II) については，平行移動したものが $2S_{k-1}$ に含まれるのでこれも矛盾．したがって，S_k は真空な凸七角形を含まないことが証明された．

S_k の構成は次のようにも表せます．

$$S_{k+1} = 2S_k \bigcup (2S_k + (1, c^k))$$

ただし，$A+\vec{x} = \{\vec{a}+\vec{x} \mid \vec{a} \in A\}$.

また，上述の (#) より4つの偶数，i_2, i_3, i_4, i_5 は存在し得ず，高々3点であることがわかります．よって，奇数

の場合と考え合わせて，真空な多角形は，高々6点しか頂点をもつことができません．このことからホルトンは，$f^*(6)$ は存在する可能性が大であると述べているのです．

神様の本から

幾何学の問題をもうひとつ考えてみたいと思います．1933年にヒルベルト（Hilbert）とコンボッセン（Konvossen）によって著された『幾何学と想像』という大変おもしろい本を読んで，私は次のような予想を立てました．

ガライ－シルベスターの定理

平面上に任意に n（$\geqq 3$）個の点をとる．n 個の点すべてが一直線上にある場合を除いて，それらの点のうちのちょうど2点だけを通る直線が存在する．

初め私はこの予想をすぐに証明できると思ったのですが，意外と難しく，後に友人のガライ（Gallai）という数学者が証明に成功しました．後にわかったことですが，シルベスター（Sylvester）という数学者が，すでに1893年にこの予想を立てていたのですが，誰も解けなかったのです．ケリー（L. M. Kelly）という人が以下に示す非常に綺麗な証明をみつけました．でも実はこのような美しい証明はみーんな“神様の本”に書いてあって神様がたまに，その本をチラッチラッと私達に見せてくださるのです．

（証明）

平面上に与えられた n 個の点はすべてが同一直線上にあるのではないとする．

P を点とし，L を直線とするとき，$d(\mathrm{P}, L)$ で P から L への距離を表すとする．P が与えられた各点を動き，かつ，L は P を通らず，しかも与えられた点の少なくとも2個を通る直線であるとする．このとき，正の数 $d(\mathrm{P}, L)$ の集合を S とおく．集合 S は空ではなく（なぜならば，与えられたすべての点が一直線上にはないから），かつ有限である（なぜなら，点の個数は有限個だから，これらの点の2個以上を通る直線の個数も有限）．それゆえ，S は極小元，たとえば $d(\mathrm{P}, M)$ をもつ．次に直線 M が与えられた点のうちのちょうど2個を通ることを示す．

M が与えられた点のうちの3個以上，たとえば $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$，を通ると仮定せよ．P から M へ下した垂線の足を Q とする．$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ のうちの少なくとも2点，たとえば P_2，P_3（図7）は Q に関して同じ側にある（ひとつは Q に一致してもよい）．いま，P_2 は P_3 より P に近い点であると仮定してよい．P と P_3 を通る直線を N と表すとき

$$d(\mathrm{P}_2, N) < d(\mathrm{P}, M)$$

となるが，これは P と M の選び方に矛盾する．よって，M は与えられた点のうちのちょうど2個を通る．□

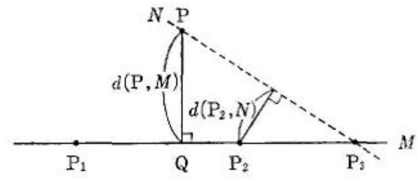


図7

この証明は綺麗でしかも簡単でしょう？　ハラリー（F. Harary）が中国で講義した折，先にのべた“神様の本”について少しおはなししたそうです．そのとき，聴衆の一人が「その素晴しい本の出版社はどこですか？」とマジに質問したそうです（笑）．

ガライがまだこの問題の証明を見つけなかった頃，この定理から次の定理が得られることがわかりました．

平面上に一直線上にはない n（$\geqq 3$）個の点をとる．このとき，これらの点の少なくとも2個を通る直線が n 本以上存在する．

（証明）

n に関する帰納法で証明します．$n=3$ の場合には定理は明らかです．$n-1$ のとき命題が成り立つことを仮定して，n の場合にも命題が成り立つことを証明します．n 個の点すべては一直線上にないという仮定より，次の2つの場合に分けて考えます：

（i）$(n-1)$ 個の点が同一直線 l 上にある場合：

l 上の $(n-1)$ 個の点を $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{n-1}$ とすると，各 P_i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ と残りの1点 P_n とを結ぶ $(n-1)$ 本の直線はすべて異なる直線です．これら $(n-1)$ 本の直線と l を合わせて n 本の直線を得る．

（ii）どの直線も高々 $(n-2)$ 個の点しか含まない場合：

ガライ－シルベスターの定理より，ある2点 P, Q だけを含む直線 PQ が存在します．P を除去すると，帰納法の仮定より残りの $(n-1)$ 個の点の集合において，

$n-1$ 本以上の題意をみたす直線が存在します．点 P を再び付け加えると少なくとも1本の新しい直線を得るので，合せて $(n-1)+1=n$ 本の直線を得る．□

ガライ－シルベスターの定理は，抽象的には成り立ちません．すなわち，ユークリッド平面の計量的性質を除いて考えると，2 点を通るどの直線も3番目の点を含んでしまうような有限個の点の配置が存在するのです．しかもそれらの点と直線は平面の組み合せ論的性質（すなわち，任意の2点を通る直線がちょうど1本存在し，どの2本の直線も唯一つの交点をもつという性質）をみたしています．

最も簡単な例として，**ファノ (Fano)-平面**と呼ばれているものがあります(図8参照)．この平面には，7個の点 $P_0, P_1, \cdots, P_6$ があり，6本のまっすぐな“直線”と，1本の円形の“直線”があります．そして，どの“直線”もちょうど3点を含みます．

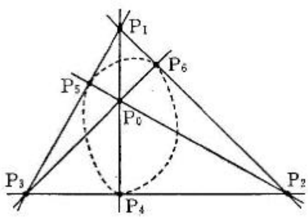


図 8

8 有限幾何の未解決問題

次に考える幾何は，ユークリッド幾何のように無限個の点を含みません．ファノ－平面に含まれている点の個数は，7つだけでしたね．図8の7組の3点の組のおのおのを直線として考えると，これら7個の点と7本の直線は次の性質をみたします：

任意の2つの直線は，唯1つの点で交わり，また任意の2点を通る直線が唯1本存在する．

ガライ－シルベスターの定理は，抽象的には成り立たないわけですが，7 節で解説した2つめの定理は抽象的にも成り立ちます．1947 年に，オランダの数学者デ・ブレーン (de Bruijn) と共同で次のような定理を証明しました．

S を有限集合とし，$|S|=n$ とする．$m\geqq 2$ のとき，$\mathcal{S}=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ を次の性質(☆)をみたす相異なる S の部分集合の族とする．

（☆） S の任意の2元 x, y に対し，x と y を同時に含むような $A_i \in S$ が唯一つ存在する．

このとき，$|\mathcal{S}|=m\geqq n$ である．

(証明)

一般性を失うことなく，$|A_i|=a_i$, $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_m$ としてよい．

S の元を $s_1, s_2, \cdots, s_n$ とし，s_j を含むような A_i の個数を次数とよび，d_j で表すものとする．一般性を失うことなく，

$$d_1\geqq d_2\geqq\cdots\geqq d_n$$

と仮定してよい．

明らかに，

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_m &= (s_j\in A_i \text{ なるすべての組 } (s_j, A_i) \text{ の個数}) \\ &= d_1+d_2+\cdots+d_n \qquad (*) \end{aligned}$$

が成り立つ．

$m<n$ と仮定する．このとき，

$$a_1+\cdots+a_t\leqq d_1+\cdots+d_t \qquad (1\leqq t\leqq m) \qquad (**)$$

が成り立つことを証明しよう．これが証明できれば，定理は背理法で証明できる．なぜならば，

$$a_1+\cdots+a_m\leqq d_1+\cdots+d_m<d_1+\cdots+d_n$$

となり（*）に矛盾するからである．

さて不等式（**）を示すために次の簡単な事実を証明しよう．

(補題)

$s_j\notin A_i$ ならば，$d_j\geqq|A_i|=a_i$ が成り立つ．

(証明)

$A_i=\{x_1, x_2, \cdots, x_{a_i}\}$ とおき，$1\leqq l\leqq a_i$ なる各 l に対し $A(l)$ を，s_j と x_l を同時に含む $\mathcal{S}$ の唯1つの集合とする．（☆）より，

$$|A_i\cap A(l)|\leqq 1$$

よって，

$$A_i\cap A(l)=\{x_l\}$$

したがって，$A(1), \cdots, A(a_i)$ は s_j を含む相異なる $\mathcal{S}$ の集合である．よって，$d_j\geqq a_i$．□

補題を用いて（**）を t に関する帰納法で示そう．

$t=1$ のとき，A_1 について考える．$m\geqq 2$ より，$S\neq A_1$．したがって，A_1 に属さない s_j が選べる．補題より $d_j\geqq a_1$，よって $d_1\geqq d_j\geqq a_1$ が成り立つ．

$t-1$ までは，(**) が成り立っているとする．すなわち，

$$a_1+\cdots+a_{t-1} \leqq d_1+\cdots+d_{t-1} \qquad (t \geqq 2)$$

$a_t \leqq d_t$ を示せば，t のときも（$**$）が成り立つことがわかる．実際，これより強い不等式 $a_2 \leqq d_t$ を示そう．$|A_1 \cap A_2| \leqq 1$ より，S には $A_1 \cap A_2$ に属さない $n-1$（$\geqq m \geqq t$）個以上の点が存在する．補題により，その各点は a_2 以上の次数をもつ．よって $d_t \geqq a_2 \geqq a_t$ となり，（$**$）が示された．よって定理が証明された．□

上の定理で $|A_1| = \cdots = |A_n| = a+1, n = a^2+a+1$ である $\mathscr{S}$ を，**位数 a の射影平面**といいます．ファノ-平面は，位数2の射影平面です．

組合せ論において最も重要な未解決問題の1つは，位数 a の射影平面が存在するのは，a がどんな値のときかを決定することです．

a が素数の巾乗のときは，そのような平面を代数的に構成することはあまり難しくありません．しかし，a が素数巾でないような位数 a の射影平面の存在は知られていません．$a = 6$ のときには不可能であることが知られており，次に問題となるのは $a = 10, 12$ のときです．もし，これが私の出題した問題だったら，これを解いた人には100万円を懸賞金として差し上げるでしょう．

たとえば，$a = 10$ のとき，問題は次のようになります．

111 個の要素をもつ集合から 11 個の要素をもつ 111 個の部分集合をとり，かつそれらの任意の2個の部分集合の交わりは，ちょうど1であるようなものを求めよ．

この111という数字は大きすぎて，コンピュータで直接調べることはできません．ですからどうしても，人間の頭脳に頼らなければなりません．

最後に，発見に関するひとつのおもしろい話をしたいと思います．エジソン（Edison）の名前をご存じだと思います．天才はどのようにして発見や発明をするのかという問いに対し，彼は『1% のアイディアと 99% の汗（努力）である』と答えましたが，数学については事情が少し異なり，アイディアが大部分必要なのであって，汗（努力）はそれほど必要ではありません．

これに関するひとつの逸話を紹介しましょう．レントゲン（Röntgen）は1895年にX線を発見しました．クルックス（Crookes）というイギリスの物理学者は，カソード（陰極）線を発見しました．クルックスはクルックス管というものを発明し，陽極の裏にスクリーンを置いたのです．そのとき，スクリーンに陽極の影が写ることに気付きましたが，そのことから得た彼の結論は「カソード（陰極）から何かが出ている」ということだけでした．10 年後，レントゲンは放射性物質の近くに感光紙を置くと感光することに気付きました．それから何週間もかけて，目に見えないX線を発見しました．すなわち，クルックスの頭脳はその時閉鎖されていて，柔軟に機能していなかったわけです．このことから次の教訓を得ることができるでしょう．

「いつでも，またどんな時でも，頭を空っぽにしておいて，新しいアイディアを取り入れられるように準備しておかなければならない」

ということです．X 線の発見によってレントゲンは，物理学者で初めてのノーベル賞を 1900 年に受賞しました．彼の発見によって世界は変わりました．翌年ベクレル（Becquerd）という人がラジオ・アクティビティを発見し，その次に，キューリー（Curie）夫妻もいろいろな放射性物質の発見をして，その後，原子爆弾が発明されました．この発明は，私たちすべてを滅すものになるかもしれません．

クルックスの得た結論は，「カソード（陰極）から何かが出ている」ということだけだったわけですが，これは世界一の“うかつ”と言えるでしょう．しかし，先ほど話したセケレシという私の友人の数学者は，「おそらくクルックスは正しかったのだ．なぜなら，その発見からいろいろな恐しいものが出てくることを予感したので，わざと事実を究明しなかったのだ」と言っています．

［1986 年 6 月 6 日］

● この講演は，ピーター・フランクル氏が通訳されたものをもとに，翻案されたものです．
この講演の講演資料をご希望の方は（切手170円分を同封の上）お知らせください．［編集部］

（ハンガリー学士院）
（パリ第7大学）
（あきやま じん／東海大学）
（え／長 新太）

バークレイでの国際数学者会議

一松 信

0. はじめに

4年に1回開催される国際数学者会議（ICM; International Congress of Mathematicians）第20回（後述）が，1986年8月2日（土）から11日（月）まで，カリフォルニア州立大学バークレイ校で開催された．日本からの参加者は約200名で，地元アメリカに次ぐ人数だったが，会議慣れした方が多く，特に団体行動をとる場合が少なかったせいか，あまり目立たなかった．全参加者は3500名と報告されたが，当初予想の4000名を下廻った．その理由は前後に他の集会が多く，費用もかかるためらしい．

この種の「マンモス学会のお祭り騒ぎ」に批判の声もあるが，今回は新研究の発表よりも，専門家仲間には周知の知識を広く伝えることを主眼として計画され，諸国諸分野間の情報交流に大きな役割りを果したと思う．

述べたい題材は多いが，まず一般論，開会式，授賞などを第1部，学術的内容を第2部，歴史や関連事項を第3部という形でまとめてみた．もとより私が垣間見た一面だけで，私の専門に偏っていることをお許しください．

第1部　全体の展望

1. 全体の日程

正式の開会式は8月3日（日）午前9時（以下時刻はすべて現地の太平洋岸夏時間（PDT）；日本時間はプラス16時間）からだが，前日2日（土）の正午から登録受付が始まり，2日の午後には，通俗講演や，学生の同窓会的な自主ゼミナールなどが行われた．

私は大阪からサンフランシスコまで，ユナイテッド航空の直行便で往復した．当初は2日朝に到着して，これらの講演をも聞くつもりだったが，飛行機の故障で出発が5時間，到着が6時間遅れた．それでもどうにか2日の午後サンフランシスコのホテルに入り，それからBART（地下鉄；後述）で現地に行って，登録だけは済ませることができた．日曜の朝はBARTが9時始発なので，やむなくタクシーで会場にかけつけた．

初日3日（日）の午前中は，開会式とひきつづきネバンリンナ賞，フィールズ賞受賞者の業績紹介があった．以後，毎日午前は，9時半—10時半と11時—12時に一つずつ1時間の全体講演があった．全体講演は当初合計16が予定されていたが，最終日11日の最後に予定されていたフレーリヒ教授の講演が，講演者不参加のために取り消しになり，閉会式が11時に繰り上げられた．

午後は中休みの7日（木）を除いて，3日から10日まで7日間毎日2時から6時まで1時間ずつの時間帯で，下記の19の分科会に分れて，45分ずつの招待講演または10分ずつ〔質疑応答を入れて1人15分ずつ）の一般講演とが平行して行われた（一般講演は2時間ずつの時間帯）．もちろんすべての分科会で，いつも必ず何かの講演が行われたわけではないが，逆に代数学や実解析学などの分科会では，同時に2つの講演が平行して進められた場合もあった．

分科会名（以下番号で引用する；かっこ内は特長ある一般講演の分野名）

1. 論理学および数学基礎論（数理論理，論理代数）
2. 代数学（論理，非可換環，可換環，線型代数，群論）
3. 整数論（解析数論，不定方程式，素数関連算法）
4. 幾何学（古典幾何，微分幾何）
5. トポロジー（ホモトピー論，位相空間，組み糸，群との関連）
6. 代数幾何学（局所代数幾何）
7. 複素解析学（多変数，1変数）
8. リー群論および表現論（リー群の表現論）