BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK PRÍMFAKTORAIRÓL II.

ERDŐS PÁL

E témával hosszú életem folyamán már sokat foglalkoztam. Egy azonos című dolgozatom (e cikkre mint I fogok hivatkozni) nemrég jelent meg a Matematikai Lapokban. I-ben több megoldatlan problémát vetettem fel és először ezekről akarok beszélni. A második fejezetben rátérek néhány újabb kérdés vizsgálatára. Sajnos mint rendesen, e témában több a megoldatlan kérdés mint az eredmény.

I.

I-ben vizsgáltam a következő felbontást. Legyen

$$\binom{n}{k} = U(n;k)\cdot V(n;k)\cdot W(n;k)$$

$$P(U(n;k)) \leqq k, \quad p(W(n;k)) > n-k, \quad k < p(V(n;k)) \leqq n-k$$

$$P(V(n;k)) \leqq n-k,$$

ahol $P(x)$ x legnagyobb, $p(x)$ x legkisebb prímfaktora.

Legyen $m(n)$ az a legnagyobb szám, melyre

$$V(m(n);k) \leqq V(n;k).$$

Kérdeztem, hogy mi mondható ki $m(n)$-ről? Lehetségesnek tartottam, hogy

(1) $$\limsup_{n\to\infty} m(n)/n = \infty$$

fennáll minden k-ra. (1) bizonyítása tényleg nem nehéz. Legyen ugyanis n olyan szám, melyre $W(n;k)=1$, azaz nincs oly $p \Big| \binom{n}{k}$ melyre $n-k < p \leqq n$, természetesen majdnem minden n-re ez fennáll. Igaz a következő

Lemma 1. Legyenek $1 \leqq n_1^{(i)} < \ldots$ azon számok, melyekre $U(n^{(i)};k)=t_i$. $(p(t_i) \leqq k.)$ Legyen ezen számok sűrűsége $\alpha_i^{(k)}$. Akkor $\alpha_i^{(k)}$ létezik és pozitív. Továbbá $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(k)} = 1$.

A lemma bizonyítása könnyen következik Legendre formulájából, és a bizonyítást nem részletezzük. Az érdeklődő olvasó ezt könnyen megcsinálhatja.

A lemmából azonnal következik, hogy minden ε-hoz van oly A_k, hogy azon n számok sűrűsége, melyekre

$$U(n;k) > A_k$$

kisebb mint ε. Most már könnyen belátható, hogy (1) fennáll egy olyan n_i sorozatra, melynek sűrűsége 1. Legyen n olyan szám, melyre

$$U(n;k) \leq A_k \quad \text{és} \quad W(n;k) = 1. \tag{2}$$

A (2)-t kielégítő számokra (ezeknek sűrűsége, mint már megjegyeztük, $>1-\varepsilon$ ha $A > A_0(\varepsilon)$)

$$V(n;k) \geq \binom{n}{k} / A_k. \tag{3}$$

Legyen mármost p egy oly prímszám, melyre $Cn < p < 2Cn$, ahol C egy „nagy" konstans. Könnyű belátni, hogy

$$V(p;k) < V(n;k). \tag{4}$$

Ha már (4)-t bebizonyítottuk, akkor állításunkat nyilván már igazoltuk. (4) viszont rendkívül egyszerű. Ugyanis

$$V(p,k) \leq \binom{p}{k} / p \quad \text{és} \quad \binom{p}{k} < C^k \binom{n}{k} \tag{5}$$

(3) és (5)-ből (4) azonnal következik elegendő nagy n-re.

E bizonyítás nyilván azt is adja, hogy végtelen sok n-re

$$m(n) > cn^{1+\frac{1}{k}}$$

másrészt könnyű belátni, hogy

$$m(n) < n^{1+\varepsilon_k},$$

ahol $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$, de ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

Talán nem érdektelen $V(n;k)$-t alulról és felülről lehetőleg pontosan megbecsülni, egyrészt végtelen sok n-re

$$V(n;k) = \binom{n}{k}$$

sőt ezen n-ek sűrűsége pozitív. Legyen e sűrűség ε_k, könnyű belátni, hogy $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$.

Jelölje mármost

$$\varrho(k) = \limsup_{n=+\infty} \big(\pi(n) - \pi(n-k)\big).$$

E függvényt Hardy és Littlewood vizsgálták először. Nem ismeretes, hogy $\varrho(k) > 1$ de Hensley és Richards [2] klasszikus vizsgálatai szerint bizonyára igaz, hogy $\varrho(k) - \pi(k) \to \infty$, ha $k \to \infty$. Nyilvánvaló, hogy végtelen sok n-re

$$V(n;k) < (1+o(1)) \binom{n}{k} / n^{\varrho(k)}. \tag{6}$$

Mahler egy jól ismert tétele szerint

$$U(n;k) < n^{1+\varepsilon}$$

és ezért

$$V(n;k) > \binom{n}{k} / n^{1+\varrho(k)+\varepsilon}. \tag{7}$$

Valószínűnek tartom, hogy (7) közelebb van az igazsághoz, mint (6) és azt hiszem, hogy végtelen sok n-re

$$(8) \qquad V(n;k) < \binom{n}{k} \Big/ n^{1+\varrho(k)-\varepsilon}.$$

Nem lehetetlen, hogy (8) igaz marad, ha a $-\varepsilon$-t elhagyjuk a nevezőből, sőt talán végtelen sok n-re

$$(9) \qquad V(n;k) = o\left(\binom{n}{k} \Big/ n^{1+\varrho(k)}\right).$$

E kérdések csak most írás közben jutottak eszembe, s így még nem tudom, van-e remény eldönteni őket — azt gondolnám, hogy a válasz tagadó.

Idézett cikkem végén felvetem a következő kérdést: Van-e végtelen sok prímszám, melyre minden $1 \leqq k \leqq \frac{p}{2}$-re

$$(10) \qquad W(p;k) > U(p;k).$$

Sejtettem, hogy végtelen sok ily prímszám van, és hogy végtelen sok oly prímszám van, melyre (10) nem teljesül.

Próbáltam bebizonyítani, hogy végtelen sok prímszám van, melyre (10) nem teljesül, de sajnos ez eddig nem sikerült. Ha be tudnám bizonyítani, hogy minden C-re van oly k, melyre $p_1 < p_2 < \ldots$ az egymásután következő prímszámok sorozata,

$$(11) \qquad C \log p_k < p_k - p_{k-1} < p_{k+1} - p_k,$$

akkor következne, hogy végtelen sok oly p van, melyre (10) nem teljesül.

Régen bebizonyítottam [3], hogy minden c-re van olyan k, melyre

$$\min(p_k - p_{k-1},\ p_{k+1} - p) > C \log p_k,$$

de (11) bizonyítását egyelőre nem látom.

Graham és én [4] könnyen bebizonyítottuk, hogy van oly $k \leqq (2+o(1)) \log n$, melyre $U(n;k) > 1$. (10) eldöntésével kapcsolatban felmerült a legkisebb $k = k(n)$ meghatározása (illetve megbecslése), melyre

$$(12) \qquad U(n;k) > n.$$

$k(n)$-re nem sikerült minden n-re érvényes nem triviális felső becslést találnom. Könnyű belátni, hogy végtelen sok n-re $k(n) = 3$. Majdnem minden n-re $k(n) \log n$ rendű, de nem sikerült kizárnom, hogy végtelen sok n-re $k(n)$ ennél lényegesen nagyobb.

Jelölje $f(c;x)$ azon k indexek számát, melyekre

$$(13) \qquad p_{k+1} - p_k > C \log x, \ p_k < x.$$

Biztosra veszem, hogy minden C-re van oly ε_C, melyre

$$(14) \qquad f(C;x) > \varepsilon_C \frac{x}{\log x}.$$

Úgy látom, hogy (14)-ből is következne, hogy végtelen sok oly prímszám van, melyre (10) nem teljesül. Úgy érzem — és azt hiszem, ezzel majdnem mindenki egyetért majd, hogy (14) önmagában sokkal érdekesebb, mint esetleges alkalmazása (10)-re.

Érdekes, hogy (14)-et egyáltalán nem tudom bebizonyítani. Sőt még azt se tudom bebizonyítani, hogy

$$(15)\qquad \frac{p_{k+1}-p_k}{\log p_k}$$

sorozatnak van mondjuk $\frac{3}{4}$-nél nagyobb (véges) sűrűsödési pontja. Majdnem 30 éve Ricci és én [5] bebizonyítottuk, hogy a (15) sorozat sűrősödési pontjai pozitív mértékű halmazt alkotnak, de ennek a halmaznak egyetlen végesben levő pontja se ismeretes. Még Wertzynthius bebizonyította 50 éve, hogy $\overline{\lim} \frac{p_{k+1}-p_k}{\log p_k}=\infty$.

Egyelőre reménytelennek látom annak eldöntését, hogy van-e végtelen sok p prímszám, melyre minden $1 \leqq k < \frac{r}{2}$ esetén (10) fennáll. Nem lehetetlen, hogy van oly c, melyre ha $(\log p)^c < k < \frac{p}{2}$, akkor

$$(16)\qquad W(p; k) > U(p; k).$$

(16) teljesen reménytelennek látszik.

Most még néhány I-ben felvetett problémát fogok diszkutálni. Legyen n_k, illetve m_k az a legkisebb szám, melyre $U(n_k; k)=1$, illetve $W(m_k; k)=1$. N_k az a legkisebb szám, melyre $U(m_k; k)=1$, illetve $W(m_k; k)=1$. N_k az a legkisebb szám, melyre $U(n_k; k)=W(N_k; k)=1$. Heurisztikus okoskodások alapján úgy gondolom, hogy elegendő nagy k-ra $m_k < n_k < N_k$, ennek bizonyítása vagy cáfolása egyelőre alig remélhető. Úgy gondolnám, hogy

$$\exp k^{\frac{1}{2}-\varepsilon} < m_k < \exp k^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

és

$$\exp c_1 k/\log k < n_k < \exp c_2 k/\log k.$$

Ezen sejtések is elérhetetlennek látszanak.

Megjegyzem még, hogy 29 a legkisebb prímszám, melyre (10) nem teljesül minden k-ra. $U(29; 6)=180$, $W(29; 6)=29$.

II.

Jelölje $\omega(m)$ m különböző prímfaktorainak számát. Schinzel egy régi sejtése szerint minden k-ra van végtelen sok n, melyre $\omega\left(\binom{n}{k}\right)=k$. Bizonyára végtelen sok n-re $n-i=(k-i)p_i$ $i=0, \ldots, k-1$. Ez esetben $p\left(\binom{n}{k}\right)=\frac{n}{k}$. Selfridge-vel régen sejtjük, hogyha $n \geqq k^2$, akkor $p\left(\binom{n}{k}\right) \leqq \frac{n}{k}$, és így Schinzel sejtéséből következne, hogy Selfridge-vel való sejtésünk nem javítható. Még évekkel ezelőtt Selfridge-vel bebizonyítottuk, hogy van oly $\alpha>0$, melyre minden $n \geqq k^2$ esetén $p\left(\binom{n}{k}\right)<\frac{n}{k^\alpha}$.

Mahler egy jólismert tétele szerint $U(n; k)<n^{1+\varepsilon}$ fennáll minden $\varepsilon>0$-ra, ha $k>k_0(\varepsilon)$. E tételből könnyen következik, hogyha végtelen sok n-re $\omega\left(\binom{n}{k}\right)=k$, akkor ezen k prímszám között legfeljebb egy lehet, mely nem nagyobb, mint k — sőt az is könnyen látható, hogy $\omega\left(\binom{n}{k}\right)=k$ esetén $\binom{n}{k}$ második legkisebb prímfaktora n-nel együtt végtelenhez tart.

Könnyen lehetséges, hogyha $n_1<n_2<\dots$ azon n-ek sorozata, melyekre $\omega\left(\binom{n_i}{k}\right)=k$ akkor $p\left(\binom{n_i}{k}\right)\to\infty$ és $\binom{n_i}{k}$ négyzetmentes véges sok i index kivételével.

Selfridge-vel vizsgáltuk a következő kérdést. Legyen

$$\binom{n}{k}=p_{i_1}\dots p_{i_r},\quad k<p_{i_1}<\dots<p_{i_r},\quad r<k. \tag{17}$$

Nevezzük $k-r$-et $\binom{n}{k}$ deficienciájának. Könnyű belátni, hogy fix k mellett csak véges sok oly n van, melyre a deficiencia pozitív. Sokkal mélyebb az a kérdés, hogy van-e végtelen sok oly n, k számpár, melyre a deficiencia pozitív? Ha a válasz igenlő, akkor kérdeztük, van-e oly $\{n_i, k_i\}$ sorozat, melyre $\binom{n_i}{k_i}$ deficienciája végtelenhez tart. Nem lehetetlen, hogy (17)-ben $r=o(k)$ is lehetséges, de úgy gondoltuk, hogy ha a deficiencia a végtelenhez tarthatna, akkor is $(k-r)/k\to 0$.

$$\binom{47}{11}=13\cdot 19\cdot 23\cdot 37\cdot 41\cdot 43\cdot 47.$$

Azaz $\binom{47}{11}$ deficienciája 4 és ez a legnagyobb deficiencia, melyet találtunk.

Legyen mármost $n>k^2$ és

$$\binom{n}{k}=U(n;k)V'(n;k)W'(n;k),$$

ahol

$$V'(n;k)=\prod_{\substack{p^\alpha\|\binom{n}{k}\\ k<p<\frac{n}{k}}}p^\alpha,\quad W'(n;k)=\prod_{\substack{p|\binom{n}{k}\\ p\geq\frac{n}{k}}}p.$$

Egyszerű átlagolással belátható, hogy majdnem minden n-re

$$W'(n;k)=1. \tag{18}$$

Könnyű belátni, hogy (q prímszám)

$$\prod_{n=m+1}^{2m}W'(n;k)<\prod_{\frac{m-k}{k}\leq q\leq 2m}q^{k\left[\frac{m}{q}\right]+1}<\exp cmk\log k \tag{19}$$

$q|W'(n;k)$ ugyanis csak akkor lehetséges, ha q-nak van többszöröse $n-k$ és n között, és ezért (19) első egyenlőtlensége azonnal következik. $\sum_{x<q<2x}\frac{1}{q}<c/\log x$ jól ismert egyenlőtlenségből (19) második egyenlőtlensége is világos.

(19)-ből (18) azonnal következik, ha még megjegyezzük, hogy ha $W(n;k)>1$ akkor már legalább $\frac{1}{k}n$.

Legyen n'_k az a legkisebb n, melyre $W'(n; k)=1$. (19)-ből könnyen következik, hogy $n'_k < k^{ck}$. Egyelőre nincs nem triviális alsó becslésem n'_k-re.

Nem tudtam bebizonyítani, hogy van oly k és hozzá végtelen sok n, melyekre $W'(n; k)$-nak legalább két prímfaktora van. Ehhez természetesen elég lenne bebizonyítani, hogy végtelen sok n-re $W'(n; k) > n$, de ennek bizonyítása egyelőre nem sikerült. Ha tudnók, hogy

$$\liminf (p_{k+1} - p_k) < \infty, \tag{20}$$

akkor természetesen már következne, hogy már $W(n; k)$-nak is egynél több prímfaktora van. Reméltem, hogy ez $W'(n; k)$-ra (20) nélkül is igazolható lesz, de ezt most már nem hiszem.

Schinzel sejtéséből következne, hogy végtelen sok n-re $W'(n; k) = \binom{n}{k}$, de ennek bizonyítása egyelőre nem remélhető. Bizonyára végtelen sok n-re

$$P\left(\binom{n}{k}\right) < (\log n)^{c_k} \tag{21}$$

de (21) bizonyítása is reménytelennek látszik még akkor is, ha (21) jobboldalán $(\log n)^{c_k}$ helyett n^{ε} vagy akár $n^{1-\varepsilon}$ áll, ahol $\varepsilon > 0$ nem függ k-tól.

Ennek dacára $\binom{n}{k}$ prímfaktorainak eloszlása nem teljesen szabálytalan. Jelölje

$$f(n; k, \alpha) = \prod_{\substack{p^{\beta} \| \binom{n}{k} \\ p < n^{\alpha}}} p^{\beta}$$

szorzatot. Bizonyára fennáll a következő

Tétel. Legyen $0 < \alpha < 1$. Minden $\varepsilon > 0$ és $\eta > 0$-hoz van oly $k_0 = k_0(\varepsilon, \eta)$, melyre ha $k > k_0$, akkor azon n számok sűrűsége, melyekre

$$n^{k\alpha(1-\varepsilon)} < f(n; k, \alpha) < n^{k\alpha(1+\varepsilon)}$$

nagyobb, mint $1-\eta$.

Talán szebb a következő nagyon hasonló tétel:

Legyen $k(n) \to \infty$ tetszőlegesen lassan, akkor azon n számok sűrűsége, melyekre

$$f(n; k(n), \alpha) = n^{k\alpha(1+o(1))}$$

minden $\eta < \alpha < 1-\eta$ esetén,

Sajnos e tételeket csak $\alpha \leqq \frac{1}{2}$-re tudom bebizonyítani és ezért a bizonyítást csak vázolni fogom. Elsősorban is jegyezzük meg, hogy minden $0 < \alpha < 1$ esetén fennáll

$$\sum_{n=2k}^{x} \log f(n; k, \alpha) = (1+o(1))x\alpha k \log x. \tag{22}$$

(22) bizonyítása nagyon hasonlít (19) bizonyításához és ezt nem is részletezzük.

Tételünk azonnal következik Turán módszerével (második momentum módszer), ha sikerül kimutatnunk, hogy

$$\sum_{n=2k}^{x} (\log f(n; k, \alpha))^2 = x(1+\varepsilon_k)\alpha^2 k^2 (\log x)^2, \tag{23}$$

ahol $(\varepsilon_k) \to 0$ ha $k \to \infty$ (és természetesen $x \to \infty$). (23) bizonyítása egyszerű átlagolással történik, de amint mindjárt látni fogjuk, csak $\alpha<\frac{1}{2}$-re sikerül. Fennáll ugyanis $\alpha\leq\frac{1}{2}$-re

$$(24)\qquad \sum_{n=2k}^{x}(\log f(n;k,l))^2=(1+\varepsilon_k)\sum_{p\leq m^\alpha}\frac{xk(\log p)^2}{p}=$$

$$=(1+\varepsilon_k)\left(\sum_{p\leq n^\alpha}\frac{xk(\log p)^2}{p}+\sum_{p,q<n^\alpha}\frac{xk^2\log p\log q}{pq}\right)=(1+\varepsilon_k)\alpha^2k^2x(\log x)^2.$$

Azonban ez az okoskodás azon alapszik, hogy azon $n\leq x$ számok száma, melyekre $\binom{n}{k}$ többszöröse pq-nak $(1+o(1))\frac{k^2x}{pq}$ és ezt nem tudjuk bizonyítani, ha $pq>n$.

(24)-ből tételünk azonnal következik, de nagyon valószínű, hogy a tétel minden $\alpha<1$-re igaz marad, de ez az egyszerű bizonyítás nem alkalmazható.

Most még vizsgáljuk $\omega\left(\binom{n}{k}\right)$ változását, amint n változik $2k$-tól végtelenig. Könnyű belátni, hogy

$$(25)\qquad \min_{2k\leq n<\infty}\omega\left(\binom{n}{k}\right)=(1+o(1))\frac{k\log 4}{\log k}.$$

Azt is könnyű belátni, hogy n értéke, melyre a minimum (25)-ben eléretik $(1+o(1))2k$, de nem tudjuk, hogy van-e végtelen sok k, melyre a minimum $n=2k$-ra éretik el [4].

Egyszerű átlagolással könnyen belátható, hogy

$$(26)\qquad \sum_{2k<n<k^\alpha}\omega\left(\binom{n}{k}\right)=(1+o(1))k\log\alpha\quad(k\to\infty).$$

Valószínűleg azon $n<k^{1+\alpha}$ számok számára, melyekre

$$(27)\qquad \omega\left(\binom{n}{k}\right)=(1+o(1))k\frac{\log n}{\log k}$$

nem áll fenn $o(k^\alpha)$. (27) bizonyítása azonban ugyanúgy nem sikerül, mint (23) bizonyítása.

Legyen $f(k)$ k legkisebb értéke, melyre $\omega\left(\binom{f(k)}{k}\right)\geq k$. Minden bizonnyal fennáll

$$(28)\qquad \log(f(k))=(1+o(1))e\log k.$$

(26)-ból tényleg könnyen adódik, hogy $f(k)<k^{e+\varepsilon}$ minden $\varepsilon>0$ és $k>k_0(\varepsilon)$ esetén. $f(k)>k^{e-\varepsilon}$ bebizonyítása azonban egyelőre reménytelennek látszik.

$F(k)$ jelentse k legnagyobb értékét, melyre

$$\omega\left(\binom{F(k)}{k}\right)<k.$$

Nem teljesen világos annak bizonyítása, hogy minden k-ra

$$(29)\qquad F(k)>f(k).$$

Nem kétséges azonban, hogy (29) igaz. Sőt bizonyára ha $k\to\infty$, akkor

$$F(k)/f(k)\to\infty.$$

Szemerédivel próbáltunk $F(k)$-ra felső becslést találni, de még $F(k) < \exp((1-\varepsilon)h)$ bizonyítása se sikerült nekünk. Jelentse A_k a k-nál nem kisebb egész számok legkisebb közös többszörösét. Bebizonyítottuk, hogy ha $k>k_0$, akkor

$$F(k) < A_k. \tag{30}$$

Még e nevetségesen gyenge eredmény bizonyítása se teljesen triviális.

Először is bebizonyítjuk, hogy

$$F(k) < A_k+k. \tag{31}$$

(31) tényleg nagyon egyszerű. p-ről akkor mondjuk, hogy $n-i$-hez tartozik $0\leqq i\leqq k$, ha

$$p^\alpha \| n-i \quad \text{és} \quad p^\alpha > k. \tag{32}$$

Ha p $(n-i)$-hez tartozik, akkor $p\left|\binom{n}{k}\right.$, továbbá nyilván p legfeljebb egy $n-i$-hez tartozhatik. Ha tehát minden i-re $(0\leqq i<k)$ tartozik $n-i$-hez prímszám, akkor $\omega\left(\binom{n}{k}\right)\geqq k$. Ha viszont $n-i$-hez nem tartozik prímszám, akkor nyilván

$$n-i \leqq \prod_{p^\alpha\leqq k} p^\alpha \quad \text{azaz} \quad n\leqq A_k+i$$

és így (31) be van bizonyítva. Most még (30)-at is be kell bizonyítani. Természetesen csak azt kell bebizonyítani, hogy ha $k>k_0$, akkor $n-k<A_k\leqq n$ esetben $\omega\left(\binom{n}{k}\right)\geqq k$. Legyen $n-i=A_k$. Azonnal belátható, hogy az $n-j$ számokhoz $j\neq i$ tartozik prímszám, és így $\omega\left(\binom{n}{k}\right)\geqq k-1$. Vegyük észre mármost, hogy ha

$$\frac{5k}{12} < p_1 < \frac{k}{2} < p_2 < \frac{7k}{12} \tag{33}$$

(ha $k>k_0$ p_1 és p_2 léteznek), akkor $\binom{n}{k}$ osztható vagy p_1 vagy p_2-vel ti. ha $\frac{5k}{12}<i<\frac{7k}{12}$, akkor $A_k=n-i$ mellett $A_k\pm p_k$ is az $n-k+1 \ldots n$ számok között előfordul, és így $p_1\left|\binom{n}{k}\right.$.

Ha i nincs $\left(\frac{5k}{12}, \frac{7k}{12}\right)$ intervallumban, akkor viszont p_2-nek van két többszöröse az $n-k+1, \ldots, n$ számok között és így $p_2\left|\binom{n}{k}\right.$. Legyen tehát

$$p\left|\binom{n}{k}\right., \quad \frac{5k}{12}<p<\frac{7k}{12} \quad \text{és} \quad n-k\leqq A_k+\varepsilon p\leqq n, \quad \varepsilon=\pm 1,$$

ha p nem tartozik $(A_k+\varepsilon p)$-hez, akkor $\omega\left(\binom{n}{k}\right)\geqq k$, ugyanis $p\left|\binom{n}{k}\right.$, de eddig p-t nem vettük számításba. Tehát ezért végül p $(A_k+\varepsilon p)$-hez tartozik. Nyilván $(A_k, A_k+\varepsilon p)=p$. Ha $A_k+\varepsilon p$-nek van még p-n kívül más, mondjuk q prímfaktora is, akkor

$q > k$ és q nem tartozhat egyetlen $(n-j)$-hez se, és ezért megint $\omega\left(\binom{n}{k}\right) \leqq k$. Tehát végül is feltehetjük, hogy

$$A_k + \varepsilon p = p^t. \tag{34}$$

Tehát

$$\frac{A_k}{p} = p^{t-1} + \varepsilon. \tag{35}$$

(35) azonban lehetetlen, ha $k > k_0$. Ennek bizonyítását most vázoljuk. $x^{t-1}+\varepsilon$ többszöröse $g(x)$ polinomnak, ahol $g(x)$ vagy a $(t-1)$-edik vagy $(2t-2)$-edik primitív körosztási polinom. $t-1$ faktortól eltekintve $g(x)$ minden prímfaktora $\equiv 1 \pmod{t-1}$. (35)-ből azonban következik, hogy $t > ck/\log k$ és amint egyszerű számolás mutatja, hogy ezen prímszámok adaléka A_k-ban kisebb, mint $k^{c(\log k)^2}$. Ugyancsak egyszerű számolás mutatja, hogy $g(p)$ ennél sokkal nagyobb, ($g(p) > \exp(k^{1-\varepsilon})$, $p > \frac{k}{3}$, $\varphi(t-1) > \frac{c_k}{(\log k)^2}$ miatt) és ezzel (30) végül igazolva van.

Célszerű lenne (30)-ra egy egyszerűbb bizonyítást találni, de ez egyelőre nekünk nem sikerült. (30) kissé élesíthető, módszerünkkel minden további nehézség nélkül nyerhető, hogy $F(k)=o(A_k)$, de

$$F(k) < \exp((1-c)k) \tag{36}$$

egyelőre nem sikerült.

(36) nehézség nélkül nyerhető lenne a következő sejtésekből:

I. Jelölje $H(n; k)$ azon $0 \leqq i < k$ számok számát, melyekre $P(n-i) \leqq k$. Igaz-e, hogy

$$\max_{n > 2^k} H\left((n; k) = o\left(\frac{k}{\log k}\right)\right)? \tag{37}$$

Mahler tételéből következik, hogy ha $n > k_0$, akkor $H(n; k) \leqq 1$, de minthogy Mahler tételének effektivizálása eddig nem sikerült, (37) bizonyításához nem használható.

II. Jelölje $L(n; k)$ azon $0 \leqq i < k$ számok számát, melyekre van

$$p \leqq k, \quad p^\alpha | (n-i), \quad p^\alpha > n^{1/2}.$$

Igaz-e, hogyha $n > 2^k$, akkor $L(n; k) = o\left(\frac{k}{\log k}\right)$?

Egy régi sejtésem szerint, ha $n \geqq 2k$, akkor $\binom{n}{k}$ többszöröse valamelyik $(n-i)$-nek, $0 \leqq i < k$-ra. Schinzel e sejtésre ellenpéldát talált, és később Schinzellel bebizonyítottuk, hogy végtelen sok k-ra a sejtés hamis [6]. Sőt, most Schinzel sejti, hogy a sejtés hamis minden $n \geqq 34$-re, mely nem p^α alakú, könnyű belátni, hogyha $k = p^\alpha$, akkor a sejtés igaz.

Legyen $f(n; k)$ $\binom{n}{k}$ legnagyobb osztója, mely n-nél nem nagyobb. Sejtettem, hogy van oly c abszolút konstans, melyre $f(n; k) > cn$.

Most úgy gondolom, hogy e sejtés nem igaz. Legyen $n-i = a_i b_i$, ahol $P(a_i) \leqq k$ $p(b_i) > k$. Sejtésem megcáfolásának céljából először is szeretném bebizonyítani, hogy minden c-hez van oly $\binom{n}{k}$ $(n \geqq 2k)$, melyre $p\left(\binom{n}{k}\right) > k$ (azaz $U(n; k) = 1$) és

$\min_{0 \leqq i < k} a_i > c$. Ez egyelőre nem sikerült. Lehetséges, hogy elnézek valamit, azonban e kérdés eldöntése talán nem egészen triviális, ha ugyanis az a_i-k nagyok, akkor várható, hogy $U(n; k) > 1$.

Egy régi sejtésem szerint $\min_{0 \leqq i < k} a_i = o(k)$, azaz ha $k > k_0(\varepsilon)$ és $n \geqq 2k$, akkor van oly i, $0 \leqq i < k$, melyre $a_i < \varepsilon k$. Ruzsa nemrég megjegyezte, hogy ha sejtésem igaz, akkor már majdnem nem javítható, ugyanis ha $f(n; k) = \min_{0 \leqq i < k} a_i$, akkor Ruzsa egyszerűen bebizonyította, hogy $f(n; k) > c_1 k / \log k$ lehetséges, és nem lehetetlen, hogy másrészt $f(n; k) < c_2 k / \log k$.

IRODALOM

[1] ERDŐS PÁL, Binomiális együtthatók prímfaktorairól, Mat. Lapok 28 (1977—80) 287—296. E cikkben sok idevonatkozó dolgozatomat citálom.

[2] D. HENSLEY AND I. RICHARDS, Primes in intervals, Acta Arith. 25 (1974), 375—391, lásd még P. Erdős and I. Richards, Density functions for prime and relatively prime numbers, Monatshefte für Math. 83 (1977), 99—112.

[3] P. ERDŐS, Problems and results on the differences of consecutive primes, Publ. Math. Debrecen, 1 (1949), 33—37.

[4] P. ERDŐS AND R. L. GRAHAM, On the prime factors of $\binom{n}{k}$, Fibonacci Quarterly, 14 (1976), 348—352.

[5] G. RICCI, Recherches sur l'allure de la suite $\frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n}$, Coll. théorie des nombres Bruxelles 1955, 93—96, lásd még Riv. Math. Univ. Parma 5 (1959), 3—54.

[6] A. SCHINZEL, Sur un problème de P. Erdős, Coll. Math. 5 (1958), 198—204.

О ПРЯМЫХ ФАКТОРАХ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЭНТОВ II.

ПАЛ ЕРДЁШ

ON PRIME FACTORS OF BINOMIAL COEFFICIENTS II.

P. ERDŐS