R. R. HALL EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

ERDŐS PÁL és SÁRKÖZY ANDRÁS

E cikkben az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

$c_1, c_2, \ldots, X_0, X_1, \ldots$ pozitív abszolút állandókat jelölnek. Az S véges halmaz elemeinek számát $|S|$-sel jelöljük. e^x helyett $\exp(x)$-et írunk. A k-szor iterált logaritmust $\log_k x$-szel jelöljük, tehát $\log_k x = \log(\log_{k-1} x)$. Az n természetes szám *különböző* prímosztóinak számát $\nu(n)$-nel, az *összes* prímosztók számát $\omega(n)$-nel jelöljük:

$$\nu(n) = \sum_{p/n} 1 \quad \text{és} \quad \omega(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha.$$

Legyen valamely x rögzített pozitív számra $A \subset (0, x]$ az $a_1 < a_2 < \ldots$ természetes számokból álló sorozat. Legyen

$$N(x) = \sum_{a \in A} 1,$$

$$F(x) = \sum_{a \in A} \frac{1}{a}$$

és

$$B(x) = \sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \frac{1}{[a_1, a_2]}.$$

Nyilvánvalóan tetszőleges A sorozatra $B(x) \geq F^2(x)$. Szerzők egy problémájából kiindulva, R. R. Hall az alábbi tételt bizonyította:

1. Tétel (R. R. Hall, [7]):

Ha az $F(x)$ függvényt

$$F(x) = \exp\{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\} \tag{1}$$

alakban írva,

$$\psi(x) \to +\infty \tag{2}$$

teljesül, akkor szükségképpen

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} \to +\infty. \tag{3}$$

Hall (3)-at az élesebb

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} > \exp(c_1 \psi^2(x)) \tag{4}$$

formában bizonyította. Továbbá igazolta, hogy az 1. tétel nem javítható abban az értelemben, hogy a (2) feltétel nem gyengíthető:

2. Tétel (R. R. Hall, [7]):

Tetszőlegesen nagy ω számhoz találhatók olyan X_0, Ω számok, hogy $x > X_0$ esetén létezik olyan A sorozat, melyre

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} < \Omega$$

teljesül, továbbá $F(x)$-et (1) alakban írva,

$$\psi(x) > \omega.$$

(L. még szerzők [3]—[6] cikkeit.)

E cikkben célunk annak megmutatása — mégpedig egy új, a Hall által alkalmazottól teljesen eltérő módszer alkalmazása révén —, hogy két más irányban viszont javítható az 1. tétel, ill. a (4) becslés:

Egyrészt, a (4) becslés kissé tovább javítható, ha az A sorozat „sűrű", azaz $\psi(x)$ „nagy" $\left(\log\psi(x) \sim \frac{1}{2}\log_3 x\right)$:

3. Tétel:

Ha az $F(x)$ függvényt az (1) alakban írva, (2) teljesül, akkor $x > X_1$ esetén szükségképpen

$$\frac{B(x)}{F^2(x)} > \exp\left\{c_2\left(\frac{\psi(x)\log_3 x}{1+\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}}\right)^2\right\}. \tag{5}$$

Megjegyezzük, hogy az $A = \{1, 2, 3, \ldots, [x]\}$ sorozat mutatja, hogy ez a becslés ((4)-gyel ellentétben) „sűrű" sorozatokra is *a lehető legjobb, eltekintve a c_2 állandó értékétől;* ugyanis megmutatható, hogy ha c_2 helyére egy elég nagy pozitív számot írunk, akkor erre az A sorozatra — minden elég nagy x-re — az (5) egyenlőtlenség ellenkezője teljesül.

Másrészt, a (2) feltétel, azaz $\psi(x)$ nagy volta lényegében annak felel meg, hogy „sok" olyan $y(\le x)$ van, melyre $N(y) = \sum_{a\in A,\, a\le y} 1$ „nagy", nevezetesen

$$N(y) \gg \frac{y}{\log y}\exp\{\psi(x)(\log_2 y)^{1/2}\log_3 y\}$$

teljesül (ahol $\psi(x)$ kielégíti (2)-t, és a $\gg$ szimbólum azt jelöli, hogy a bal oldal nagyobb, mint a jobb oldal konstansszorosa). Így az 1. Tétel durván úgy fogalmazható, hogyha $N(y)$ „sok" y-ra nagy, akkor ebből következik, hogy a (3) bal oldalán álló hányados nagy. Meg fogjuk mutatni, hogy az 1. Tétel élesíthető abban az értelemben is, hogy $B(x)$ már akkor is szükségképpen nagy, ha $N(x)$ csupán *egyetlen* x-re nagy; más szóval, $B(x)$-et $F(x)$ helyett $N(x)$ függvényében fogjuk becsülni. Pontosabban, a következő tételt fogjuk igazolni:

4. Tétel:

Legyen $x > X_2$, $A \subset (0, x]$,

$$N(x) > \frac{x}{\log x} \exp\{(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}, \tag{6}$$

és definiáljuk $\psi(x)$-et az

$$N(x) = \frac{x}{\log x} \exp\{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\} \tag{7}$$

egyenlőséggel. Ekkor

$$\frac{B(x)}{N^2(x)} x^2 > c_3 \exp\left\{\frac{1}{68} \frac{\psi^2(x)(\log_3 x)^2}{\left(1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}\right)^2}\right\}, \tag{8}$$

tehát $\psi(x) \to +\infty$ esetén a bal oldal $+\infty$-hez tart.

(Megjegyezzük, hogy például $A \subset (x/2, x]$ esetén (8) bal oldala kisebb, mint $4\frac{B(x)}{F^2(x)}$, tehát ekkor $\psi(x) \to +\infty$ esetén (8) valóban (3), ill. (4) élesítését adja.)

Minthogy a 3. és 4. Tétel lényegében ugyanúgy bizonyítható, ezért csupán a 4. Tételt fogjuk bizonyítani: a 2. és 3. pont e bizonyítást fogja tartalmazni. A 4. pontban néhány további megjegyzést fogunk fűzni a 3. Tétel bizonyításához, valamint a 4. Tételhez.

2. Ebben a pontban kimondunk és részben bizonyítunk néhány olyan lemmát, melyre szükségünk lesz a 4. Tétel bizonyítása során.

1. Lemma.

Léteznek olyan c_4, X_3 állandók, hogy $x > X_3$, $i \leq \log_2 x$ esetén

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \nu(n) = i}} 1 < c_4 \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Ez a lemma valamivel élesebb formában megtalálható G. H. HARDY és S. RAMANUJAN [8] cikkében; l. még [10] és [11].

2. Lemma.

Tetszőlegesen kicsi ε pozitív számot megadva, léteznek olyan $c_5 = c_5(\varepsilon)$ és $X_4 = X_4(\varepsilon)$ állandók, hogy $x > X_4$, $j < (1-\varepsilon)\log_2 x$ esetén

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \nu(n) \leq j}} 1 < c_5 \frac{x}{\log x} \left(\frac{e \log_2 x}{j}\right)^j \frac{\sqrt{j}}{\log_2 x}.$$

Bizonyítás.

$j=1$ esetén az állítás következik a prímszámtételből. $j > 1$ esetén az előző lemmát és a Stirling-formulát alkalmazva, elég nagy x-re kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{n\le x\\ \nu(n)\le j}} 1 = 1+\sum_{i=1}^{j}\sum_{\substack{n\le x\\ \nu(n)=i}} 1 < 1+\sum_{i=1}^{j} c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{i-1}}{(i-1)!} =$$

$$= 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{i=1}^{j}\frac{i(i+1)\dots(j-1)}{(\log_2 x)^{j-i}} \le$$

$$\le 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{j}{\log_2 x}\right)^{j-i} <$$

$$< 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{i=1}^{j}(1-\varepsilon)^{j-i} <$$

$$< 1+c_4\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\varepsilon)^{k} = 1+\frac{c_4}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!} <$$

$$< \frac{c_5}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{\left(\frac{j-1}{e}\right)^{j-1}\sqrt{j-1}} < \frac{c_6}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\left(\frac{e\log_2 x}{j}\right)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{j}} =$$

$$= \frac{c_7}{\varepsilon}\frac{x}{\log x}\left(\frac{e\log_2 x}{j}\right)^{j}\frac{\sqrt{j}}{\log_2 x}.$$

3. Lemma.

Léteznek olyan $c_8(>0)$ *és* X_5 *állandók, hogy* $x>X_5$ *esetén*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ \nu(n)>\log_2 x}} 1 > c_8 x.$$

Ez a lemma jól ismert standard valószínűségszámítási módszerekkel igazolható (következik pl. az ún. Erdős—Kac tételből; l. pl. [1] és [9]).

4. Lemma.

Ha $\varepsilon>0$ *és*

$$1<\frac{j}{\log_2 x}<2-\varepsilon,$$

akkor $x>X_6(\varepsilon)$ *esetén*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ j\le\omega(n)}} 1 < c_9(\varepsilon)\frac{1}{\frac{j}{\log_2 x}-1}\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Ez a lemma azonos a [2], 242. oldalon szereplő 1. korollárium első felével.

3. Rátérünk a 4. Tétel bizonyítására.

(6)-ból, (7)-ből és $N(x)\le x$-ből következik, hogy

$$1<\psi(x)\le\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\log_3 x}. \tag{9}$$

Legyen

$$j = \left[\frac{1}{4} \frac{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{1 + \log \dfrac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right], \tag{10}$$

és jelöljük A_1-gyel A azon n elemeinek a halmazát, melyekre $v(n) \leqq j$ teljesül; legyen továbbá $A_2 = A - A_1$.

(9)-re tekintettel (10)-ből következik, hogy

$$j \geqq \frac{1}{5} \frac{(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{1 + \log \dfrac{(\log_2 x)^{1/2}}{\log_3 x}} \geqq \frac{1}{5} \frac{(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{\dfrac{1}{2} \log_3 x} = \frac{2}{5} (\log_2 x)^{1/2} \tag{11}$$

és

$$j \leqq \frac{1}{4} \frac{\log_2 x}{1 + \log 1} = \frac{1}{4} \log_2 x. \tag{12}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség szerint j ilyen választása mellett a 2. lemma alkalmazható $|A_1|$ becslésére. A 2. lemma, (7) és (12) alapján elég nagy x-re

$$\frac{|A_1|}{N(x)} < \frac{c_5 \dfrac{x}{\log x} \left(\dfrac{e \log_2 x}{j} \right)^j \dfrac{\sqrt{j}}{\log_2 x}}{\dfrac{x}{\log x} \exp \{\psi(x) (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}} < \tag{13}$$

$$< \frac{1}{2} \frac{\left(\dfrac{e \log_2 x}{j} \right)^j}{\exp \{\psi(x) (\log_2 x)^{1/2} \log_3 x\}}.$$

Itt (10)-re, (11)-re és a jól ismert

$$1 + x \leqq e^x$$

egyenlőtlenségre tekintettel

$$\frac{\log_2 x}{j} \leqq \frac{\log_2 x}{\dfrac{1}{5} \dfrac{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2} \log_3 x}{1 + \log \dfrac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}}} =$$

$$= 5 \left(1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x} \right) \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x} < 5 \left(\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x} \right)^2,$$

és így (13)-ból (9) és (10) alapján

$$\frac{|A_1|}{N(x)} < \frac{1}{2}\exp\left\{j\log\frac{e\log_2 x}{j} - \psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} <$$

$$< \frac{1}{2}\exp\left\{j\left(\log 5e + 2\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}\right) - \psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} <$$

$$< \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{4}\frac{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x}{1+\log\dfrac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}}\left(3+3\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}\right) - \psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{4}\psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\right\} < \frac{1}{2}.$$

Innen következik, hogy

$$(14)\qquad |A_2| = |A - A_1| = |A| - |A_1| = N(x) - |A_1| > N(x) - \frac{N(x)}{2} = \frac{N(x)}{2}.$$

Jelöljük S-sel azon n természetes számok halmazát, melyekre $n \leqq x^2$ teljesül, és melyek felírhatók a következő alakban:

$$(15)\qquad au = n, \quad \text{ahol} \quad a \in A_2 \quad \text{és} \quad \nu(u) > \log_2 x.$$

Jelöljük továbbá adott n mellett (15) megoldásszámát $\varphi(n)$-nel. A bizonyítandó egyenlőtlenséget azáltal fogjuk igazolni, hogy a $\sum\limits_{n \leqq x^2}\varphi(n)$ összeget megbecsüljük alulról, ill. felülről, majd pedig a két becslést egybevetjük. Először alsó becslést fogunk adni.

A 3. lemma és (14) alapján

$$(16)\qquad \sum_{n \leqq x^2}\varphi(n) = \sum_{a \in A_2}\sum_{\substack{u \leqq x^2/a \\ \nu(u) > \log_2 x}} 1 \geqq \sum_{a \in A_2}\sum_{\substack{u \leqq x^2/a \\ \nu(u) > \log_2 x^2/a}} 1 > \sum_{a \in A_2} c_8\frac{x^2}{a} \geqq$$

$$\geqq c_8\sum_{a \in A_2}\frac{x^2}{x} = c_8 x\sum_{a \in A_2} 1 = c_8 x|A_2| > c_8 x\frac{N(x)}{2} = c_{10}xN(x).$$

Most felső becslést fogunk adni $\sum\limits_{n \leqq x^2}\varphi(n)$-re. A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség alapján

$$(17)\qquad \sum_{n \leqq x^2}\varphi(n) = \sum_{n \in S}\varphi(n) \leqq |S|^{1/2}\Big(\sum_{n \in S}\varphi^2(n)\Big)^{1/2} = |S|^{1/2}\Bigg(\sum_{n \in S}\Big(\sum_{\substack{a \in A^2 \\ a|n \\ \nu(n/a) > \log_2 x}} 1\Big)^2\Bigg)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq |S|^{1/2}\Bigg(\sum_{n \in S}\Big(\sum_{\substack{a \in A \\ a|n}} 1\Big)^2\Bigg)^{1/2} = |S|^{1/2}\Bigg(\sum_{n \in S}\Big(\sum_{\substack{a_1 \in A \\ a_1|n}}\sum_{\substack{a_2 \in A \\ a_2|n}} 1\Big)\Bigg)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq |S|^{1/2}\Big(\sum_{n \leqq x^2}\sum_{\substack{a_1 \in A,\, a_2 \in A \\ [a_1, a_2]|n}} 1\Big)^{1/2} = |S|^{1/2}\Big(\sum_{a_1 \in A}\sum_{a_2 \in A}\sum_{\substack{n \leqq x^2 \\ [a_1, a_2]|n}} 1\Big)^{1/2} =$$

$$= |S|^{1/2}\left(\sum_{a_1 \in A}\sum_{a_2 \in A}\left[\frac{x^2}{[a_1, a_2]}\right]\right)^{1/2} \leqq |S|^{1/2}\left(\sum_{a_1 \in A}\sum_{a_2 \in A}\frac{x^2}{[a_1, a_2]}\right)^{1/2} =$$

$$= |S|^{1/2}(x^2B(x))^{1/2} = x|S|^{1/2}(B(x))^{1/2}.$$

Így a vizsgált összeg felső becslése céljából $|S|$-re kell felső becslést adnunk.

Azonban $n \in S$ esetén n a felírható a (15) alakban, ahonnan $a \in A_2$-re és A_2 definíciójára tekintettel

$$\omega(n) = \omega(au) = \omega(a) + \omega(u) \geqq \nu(a) + \nu(u) > j + \log_2 x$$

(ahol j (10) által van definiálva). Így

$$|S| \leqq \sum_{\substack{n \leqq x^2 \\ j + \log_2 x < \omega(n)}} 1 \leqq \sum_{\substack{n \leqq x^2 \\ j - 1 + \log_2 x < \omega(n)}} 1.$$

Innen a 4. Lemma, (11), (12) és a Stirling-formula alapján, valamint felhasználva a

$$\log(1+u) \geqq u - \frac{u^2}{2} \quad (\text{ahol } 0 < u < 1)$$

egyenlőtlenséget, következik, hogy

$$|S| < c_9 \frac{1}{\frac{[j-1+\log_2 x^2]}{\log_2 x^2} - 1} \frac{x^2}{\log x^2} \frac{(\log_2 x^2)^{[j-2+\log_2 x^2]}}{[j-2+\log_2 x^2]!} < \tag{18}$$

$$< c_{11} \frac{\log_2 x}{j} \frac{x^2}{\log x} \left(\frac{e(\log_2 x + \log 2)}{[j-2+\log_2 x + \log 2]} \right)^{[j-2+\log_2 x + \log 2]} \frac{1}{[j-2+\log_2 x + \log 2]^{1/2}} <$$

$$< c_{12} x^2 \frac{\log_2 x}{j \log x} \left(\frac{e \log_2 x}{j + \log_2 x} \right)^{j + \log_2 x} \frac{1}{(\log_2 x)^{1/2}} =$$

$$= c_{12} x^2 \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{j \log x} e^j \log x \left(\frac{\log_2 x}{j + \log_2 x} \right)^{j + \log_2 x} \leqq$$

$$\leqq c_{13} x^2 e^j \left(\frac{1}{1 + \frac{j}{\log_2 x}} \right)^{j + \log_2 x} =$$

$$= c_{13} x^2 \exp\left\{ j - (j + \log_2 x) \log\left(1 + \frac{j}{\log_2 x}\right) \right\} <$$

$$< c_{13} x^2 \exp\left\{ j - (j + \log_2 x) \left(\frac{j}{\log_2 x} - \frac{j^2}{2(\log_2 x)^2} \right) \right\} =$$

$$= c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{j^2}{\log_2 x} \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2 \log_2 x} \right) \right\} < c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{j^2}{\log_2 x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \right\} <$$

$$< c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{1}{4} \frac{j^2}{\log_2 x} \right\} < c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{17} \left(\frac{\psi(x) \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right)^2 \right\} =$$

$$= c_{13} x^2 \exp\left\{ -\frac{1}{68} \left(\frac{\psi(x) \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right)^2 \right\}.$$

(16) és (17) alapján

$$c_{10} x N(x) < \sum_{n \le x^2} \varphi(n) \le x |S|^{1/2} (B(x))^{1/2},$$

ahonnan (18) alapján kapjuk, hogy

$$\frac{B(x)}{N^2(x)} x^2 > c_{10}^2 \frac{x^2}{|S|} > c_{14} \exp \left\{ \frac{1}{68} \left(\frac{\psi(x) \log_3 x}{1 + \log \frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x) \log_3 x}} \right)^2 \right\},$$

és ezzel a 4. Tétel bizonyítását befejeztük.

4. Mint az 1. pontban már említettük, a fenti bizonyítás gondolatmenete alkalmas a 3. Tétel bizonyítására is. Ehhez lényegében csupán annyi módosításra van szükség, hogy a 2. Lemmában szereplő $\sum_{\substack{n \le x \\ \nu(n) \le j}} 1$ összegre adott felső becslés helyett $\sum_{\substack{n \le x \\ \nu(n) \le j}} \frac{1}{n}$ becslésére van szükségünk; ez utóbbi azonban a 2. Lemma alapján parciális összegezés (Abel-átrendezés) révén könnyen becsülhető.

Megjegyezzük továbbá, hogy — mint a 2. Tétel mutatja — az 1. Tétel a lehető legjobb abban az értelemben, hogy a (2) feltétel nem gyengíthető, vagyis „ritkább" sorozatokra már nem igaz az állítás. Ugyanakkor a 4. Tétel még valószínűen javítható ebben az értelemben; talán

$$\frac{B(x)}{N^2(x)} x^2 \to +\infty$$

teljesüléséhez (6) helyett elég megkövetelni, hogy a gyengébb

$$\frac{N(x) \log x}{x} \to +\infty \tag{19}$$

feltétel teljesüljön. (Ha ez a sejtés igaz, akkor már tovább nem élesíthető; ugyanis az A sorozatot az $x/2$ és x közti prímszámoknak választva, látható, hogy a (19) feltétel nem gyengíthető tovább.)

IRODALOM

[1] P. Erdős, On the distribution of additive functions, *Ann. Math.*, 47 (1946), 1—20.

[2] P. Erdős and A. Sárközy, On the number of prime factors of integers, *Acta Sci. Math.* (Szeged), 42 (1980), 237—246.

[3], [4], [5], [6] P. Erdős and A. Sárközy, Some asymptotic formulas on generalized divisor functions, I, II, III, IV, Studies in Pure Mathematics to the Memory of Paul Turán, Akadémiai Kiadó, Budapest; J. Number Theory; Acta Arithemtica; *Studia Sci. Math. Hung.*, valamenynyi sajtó alatt.

[7] R. R. Hall, On a conjecture of Erdős and Sárközi, *Bull. London Math. Soc.*, 12 (1980), 21—24.

[8] G. H. Hardy and S. Ramanujan, The normal number of prime factors of a number n, *Quarterly J. Math.*, 48 (1920), 76—92.

[9] J. Kubilius, Probabilistic methods in the theory of numbers, *Translation of Math. Monographs, Amer. Math. Soc.* 1964, vol. 11.

[10] L. G. Sathe, On a problem of Hardy, *J. Indian Math. Soc.*, 17 (1953), 63—141 és 18 (1954), 27—81.

[11] A. Selberg, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc.*, 18 (1954), 83—87.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ Р. Р. ХАЛЛА

П. ЭРДЕШ—А. ШАРКЕЗИ

ON A PROBLEM OF R. R. HALL

P. ERDÖS—A. SÁRKÖZY

If $A\subset\{1, 2, \ldots, x\}$ then let $N(x)=\sum_{a\in A} 1$, $F(x)=\sum_{a\in A}\frac{1}{a}$ and $B(x)=\sum_{a_1\in A}\sum_{a_2\in A}\frac{1}{[a_1, a_2]}$. R. R. Hall proved in [7] that if $\psi(x)$ is defined bg $F(x)=\exp\{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\}$ and $\psi(x)\to\infty$ holds then we have $\frac{B(x)}{F^2(x)}\to+\infty$; in fact, we have $\frac{B(x)}{F^2(x)}>\exp(c_1\psi^2(x))$. The authors improve on this estimate (applying a different method), by replacing the last inequality by

$$\frac{B(x)}{F^2(x)}>\exp\left\{c_1\left(\frac{\psi(x)\log_3 x}{1+\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}}\right)^2\right\}.$$

Furthermore, they estimate $B(x)$ in terms of $N(x)$. It is shovn that if $\psi(x)$ is defined by $N(x)=\frac{x}{\log x}\exp\{\psi(x)(\log_2 x)^{1/2}\log_3 x\}$ and $\psi(x)>1$ then for large x we have

$$\frac{B(x)}{N^2(x)}x^2>c_2\exp\left\{\frac{1}{68}\frac{\psi^2(x)(\log_3 x)^2}{\left(1+\log\frac{(\log_2 x)^{1/2}}{\psi(x)\log_3 x}\right)^2}\right\}.$$