THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur l'irrationalité d'une certaine série*. Note (*) de **Paul Erdös,** présentée par Jean-Pierre Serre.

Cette Note a pour objet de montrer le résultat suivant : Soit $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \ldots$ une suite d'entiers vérifiant $\lim (a_{n+1} - a_n) = +\infty$; alors $\sum_{n \geqq 1} a_n 2^{-a_n}$ est irrationnel.

The following result is proved: Let $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \ldots$ be a sequence of integers satisfying $\lim (a_{n+1} - a_n) = +\infty$; then $\sum_{n \geqq 1} a_n 2^{-a_n}$ is irrational.

Dans cette Note, je démontre le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit $a_1 < a_2 < \ldots$ une suite d'entiers satisfaisant $a_{n+1} - a_n \to +\infty$. Alors $\sum_{n \geqq 1} a_n/(2^{a_n})$ est irrationnel.*

J'avais conjecturé ce résultat il y a plus de 20 ans, et jusqu'à maintenant, seulement le cas $a_n > cn \log n$ était connu (*cf.* [2]). Le théorème est encore vrai si l'on remplace 2 par un entier $t > 1$. On trouvera dans [1] une introduction plus complète sur ce sujet et des références sur des problèmes voisins.

Il semble très vraisemblable que $\lim_{n \to \infty} a_n/n = +\infty$ est une condition suffisante d'irrationnalité de $\sum_{n \geqq 1} a_n/(2^{a_n})$. En fait je n'ai pas pu trouver d'exemple de suite $\{a_n\}$ avec $\lim\sup (a_{n+1} - a_n) = +\infty$ et $\sum_{n \geqq 1} a_n/(2^{a_n})$ rationnel, mais je pense qu'un tel exemple existe et pourrait être facile à trouver.

Démontrons maintenant notre théorème. La démonstration n'est pas complètement évidente, mais n'utilise aucune idée vraiment nouvelle. Supposons le théorème faux; nous aurions :

$$(1) \qquad \sum_{n \geqq 1} \frac{a_n}{2^{a_n}} = \frac{u}{v\, 2^r},$$

avec $r \geqq 0$, v impair et $(u, v\, 2^r) = 1$.

Nous allons montrer que (1) mène à une contradiction. Soit k un nombre assez grand, et soit $a_n = 2^k - s$ le plus grand $a_n < 2^k$, $a_{n+1} = 2^k + t_1$, $a_{n+2} = 2^k + t_2, \ldots$ On devrait en réalité écrire $a_n = 2^k - s^{(k)}$, $a_{n+1} = 2^k + t_1^{(k)}, \ldots$ mais lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous n'écrirons pas l'indice supérieur (k). Multiplions les deux côtés de (1) par $v\, 2^{a_n} = v\, 2^{2^k - s}$. Pour k assez grand, le membre de droite devient alors un entier. Le membre de gauche devient donc aussi un entier, et :

$$(2) \qquad v \left[\frac{2^k + t_1}{2^{t_1 - s}} + \frac{2^k + t_2}{2^{t_2 + s}} + \ldots \right],$$

doit être un entier et donc doit être $\geqq 1$.

Supposons d'abord :

$$(3) \qquad t_1 + s > k.$$

On remarque alors, comme v est impair, que la partie fractionnaire de $v\,2^k/2^{t_1+s}$ est strictement positive et inférieure à $1-1/2v$. Et comme la somme dans (2) est $\geqq 1$, on doit avoir :

$$\frac{t_1}{2^{t_1+s}}+\frac{2^k+t_2}{2^{t_2+s}}+\ldots \geqq \frac{1}{2v^2}. \tag{4}$$

Cette formule conduit à une contradiction car nous allons maintenant montrer que le membre de gauche de (4) tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Observons d'abord que (3) entraîne $(t_1+s)/2^{t_1+s}<k/2^k$ et :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_1}{2^{t_1+s}}=0. \tag{5}$$

Ensuite, on déduit de (3) :

$$\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2^k+t_2}{2^{t_2+s}}+\frac{2^k+t_3}{2^{t_3+s}}+\ldots\right]=0, \tag{6}$$

en remarquant que $t_{j+1}-t_j\to+\infty$ (cela découle immédiatement de $a_{n+1}-a_n\to+\infty$).

(5) et (6) entraîne que la limite du membre de gauche de (4) est 0, ce qui contredit (4). On en déduit que (3) ne peut avoir lieu pour une infinité de k.

On peut donc supposer maintenant que l'on a $t_1+s\leqq k$. Définissons i par :

$$t_i+s\leqq k<t_{i+1}+s. \tag{7}$$

Par (7), on peut écrire (2) de la façon suivante, avec I_1, I_2, I_3 entiers :

$$\begin{aligned}(8)\quad I_1&=I_2+v\sum_{j=1}^{i}\frac{t_j}{2^{t_j+s}}+v\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^k+t_{i+j}}{2^{t_{i+j}+s}}\\ &=I_2+v\left[\frac{t_1}{2^{t_1+s}}+\frac{2^k+t_{i+1}}{2^{t_{i+1}+s}}\right]+v\left[\sum_{j=2}^{i}\frac{t_j}{2^{t_j+s}}+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{2^k+t_{i+j}}{2^{t_{i+j}+s}}\right]\\ &=I_2+\sum_1+\sum_2+\sum_3.\end{aligned}$$

On observe que $\sum_3$ est une somme infinie et puisque notre suite $a_1<\ldots$ est infinie, $\sum_3>0$.

De (8), on déduit :

$$\sum_1+\sum_2+\sum_3=I_3\geqq 1. \tag{9}$$

La somme $\sum_2$ peut être vide, et sinon, elle tend vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$. C'est immédiat avec $t_{j+1}-t_j\to\infty$. La somme $\sum_3$ tend aussi vers zéro lorsque k tend vers $+\infty$, c'est également immédiat avec $t_{j+1}-t_j\to+\infty$ et $t_{i+1}+s\geqq k$. Ainsi, pour avoir (9), $\sum_1$ ne doit pas être entier, et sa partie fractionnaire doit tendre vers 1. Ce cas demande un peu plus de soins, et c'est la seule partie difficile de la démonstration.

On observe tout d'abord que :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{v t_{i+1}}{2^{t_{i+1}+s}} = 0. \tag{10}$$

(10) découle immédiatement de la relation $t_{i+1}+s>k$. Il reste alors dans $\sum_1$:

$$v\left[\frac{t_1}{2^{t_1+s}} + \frac{2^k}{2^{t_{i+1}+s}}\right] = \Sigma. \tag{11}$$

Si Σ est entier nous arrivons à la contradiction prévue. Supposons donc Σ non entier. Pour obtenir notre contradiction, il suffit de montrer que :

$$\Sigma - [\Sigma] < 1 - \delta, \tag{12}$$

où $\delta > 0$ est une constante absolue indépendante de k; il est clair que (12) contredit (9). On écrit :

$$\frac{v\, 2^k}{2^{t_{i+1}+s}} = \frac{v}{2^w}, \qquad w>0, \quad \text{puisque } t_{i+1}+s>k.$$

Ainsi, pour démontrer (12) nous devons montrer que :

$$v\left[\frac{t_1}{2^{t_1+s}} + \frac{1}{2^w}\right] - \left[v\left(\frac{t_1}{2^{t_1+s}} + \frac{1}{2^w}\right)\right] < 1 - \delta. \tag{13}$$

La démonstration de (13) est facile. La partie fractionnaire de $v/2^w$ est au plus $1-(1/2v)$, et un calcul simple montre que la partie fractionnaire de $v t_1/2^{t_1+s}$ est inférieure à $1-2^{-(v+10)}$. En fait, on a beaucoup mieux. La raison de cette majoration grossière est que, si $t_1+s \leqq v+10$, alors l'inégalité est évidente, et, si $t_1+s \geqq v+10$, alors on voit facilement que $v t_1 < (1/2)\, 2^{t_1+s}$, et la partie fractionnaire est en fait $<1/2$. Posons :

$$\max(t_1+s,\, w) = \mathrm{L}.$$

Si $\mathrm{L} \leqq 2v+20$, alors la partie gauche de (13) est $\leqq 1-(1/2^{2v+20})$, ce qui complète la démonstration de (13). Par ailleurs, si $\mathrm{L} > 2v+20$, ou bien $w>2v+20$, mais alors d'après ce que nous venons de démontrer, la partie gauche de (13) est inférieure à :

$$\frac{v}{2^{2v+20}} + 1 - 2^{-v-10} < 1 - 2^{-v-11}$$

et (13) est encore démontré, ou bien $t_1+s>2v+20$, mais alors il est facile de voir que $v t_1/2^{t_1+s} < 1/4v$ et on en déduit que la partie gauche de (13) est inférieure à $1-(1/4v)$, ce qui achève la démonstration de (13) et aussi du théorème. Peut être, cette démonstration de (13) est-elle un peu trop compliquée.

La condition $a_{n+1}-a_n \to \infty$ peut être un peu affaiblie, mais pour le moment je ne peux pas la remplacer par une condition sensiblement meilleure.

Soit α un nombre rationnel inférieur à 1. On écrit $\alpha = \sum_{n \geqq 1} a_n/2^{a_n}$ où les a_n sont déterminés par « l'algorithme glouton »; plus précisément, si $a_1, \ldots, a_n$ sont déjà définis, je choisis la plus petite valeur possible pour a_{n+1}. Existe-t-il un α pour lequel $a_{n+1}-a_n$ n'est pas majoré? Peut être un point évident m'échappe, mais je n'ai fait aucun progrès sur cette question.

Est-il vrai que pour tout $c>0$, il y a une suite de nombres rationnels (ou réels) $\{u_n\}$, $u_n>(1+c)u_{n+1}$, tels que si $\sum_{i\geqq 1} u_{n_i}$ est rationnel, alors $n_{i+1}-n_i$ est borné?

J'ai essayé plusieurs fois de démontrer que $\sum_{n\geqq 1} g_n/2^{g_n}$ est rationnel où g_n est la suite des nombres sans facteurs carrés. J'ai peut être manqué une idée simple, mais en tout cas j'ai complètement échoué.

Traduction en français de cette Note, par J.-L. Nicolas.

(*) Remise le 11 mai 1981.

[1] P. Erdös, *On the Irrationality of Certain Series* (*Comptes rendus des journées de théorie analytique des nombres de Limoges*, mars 1980, Publication n° 2 du département de Mathématiques de l'Université de Limoges).

[2] *Wiskundige Opgaven met de Oplossingen*, 20, 1955-1959, part 1959, p. 17-19, problème n° 180.

Département de Mathématiques, U.E.R. des Sciences de Limoges,
123, *avenue Albert-Thomas*, 87060 *Limoges Cedex*,
et *Akademia Matematikai Intezete*,
Realtanoda u 13.15, *H*-1053 *Budapest, Hongrie*.